

NAPREDNI KONCEPTI ELEMENTARNE MATEMATIKE

Januar 2 2026.

1. Izračunati $\arccos(\cos(\arcsin(\sin x)))$ za $x \in [-\pi, 0]$.
2. Ako $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, dokazati $\sin x > \frac{2x}{\pi}$.
3. Dokazati $\sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{9} + 9 \sin^3 \frac{x}{27} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} = \frac{3^n \sin \frac{x}{3^n} - \sin x}{4}$.
4. Odrediti skup rešenja nejednačine $\frac{1}{x} \left(1 - \sqrt{1 - 9x^2}\right) < 1$.
5. Odrediti skup rešenja nejednačine $\log_x \sqrt{\frac{5}{2}x - 1} > 1$.
6. Rešiti jednačinu $(x+1)(x+4)(x+7)(x+10) + 81 = 0$ u skupu $\mathbb{R}$.
7. Naći sve $z \in \mathbb{C}$ takve da $(z-2)(\bar{z}+i) \in \mathbb{R}$.
8. Izračunati $z \in \mathbb{C}$ dobijen rotacijom $2+3i$ oko $4+2i$ za 45° u smeru kazaljke na satu.
9. Ako $x, y \neq 0$ i $x^2 + xy + y^2 = 0$, izračunati $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2025} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{2025}$.
10. Odrediti ostatak pri deljenju polinoma $X^{2026} + X^{2025} + 1$ sa $X^2 - 2X + 1$.
11. Dokazati da polinom $\frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{X^2}{2} + X + 1$ nema višestruke korene.
12. Za polinom $P(X)$ desetog stepena važi $P(n) = \frac{n}{n+1}$ za $n = 0, 1, \dots, 10$. Izračunati $P(11)$.
13. Ako $a, b, c > 0$ i $a+b+c=1$, dokazati $\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{1+c+a} + \frac{c}{1+a+b} \geq \frac{3}{5}$. Za koje a, b, c se dostiže jednakost?
14. Ako $a, b, c > 0$, dokazati $\frac{a}{c} + 2\sqrt{\frac{b}{a+c}} + 5\sqrt[5]{\frac{c}{b}} > 7$.
15. Ako $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, izračunati maksimalnu vrednost izraza $a + 2b + 3c$.

Svaki zadatak nosi 10 poena.

Ocenjivanje: 0–50:5, 51–60:6, 61–70:7, 71–80:8, 81–90:9, 91– :10.

SKICE REŠENJA

1. Za $x \in [-\pi/2, 0]$, $\arcsin(\sin x) = x$, $-x \in [0, \pi/2]$ i $\arccos(\cos(-x)) = -x$, pa je:

$$\arccos(\cos(\arcsin(\sin x))) = \arccos(\cos x) = \arccos(\cos(-x)) = -x.$$

Za $x \in [-\pi, -\pi/2]$, $-\pi - x \in [-\pi/2, 0]$, pa koristeći $\sin(x) = \sin(-\pi - x)$ i prethodni slučaj:

$$\arccos(\cos(\arcsin(\sin x))) = \arccos(\cos(\arcsin(\sin(-\pi - x)))) = -\pi - x.$$

2. Kako je $\sin x$ konkavna funkcija na intervalu $[0, \pi/2]$, prema Jensenovoj nejednakosti za svako $\lambda \in (0, 1)$ važi $\sin((1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda\pi/2) > (1 - \lambda)\sin 0 + \lambda\sin(\pi/2)$, tj. $\sin(\lambda\pi/2) > \lambda$. Ako za $x \in (0, \pi/2)$ uzmemo $\lambda = 2x/\pi$, dobijamo željenu nejednakost.
3. Koristeći formulu $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ imamo da je:

$$3^{k-1} \sin^3 \frac{x}{3^k} = \frac{3^k \sin \frac{x}{3^k} - 3^{k-1} \sin \frac{x}{3^{k-1}}}{4}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

pa zamenom na levoj strani, i sređivanjem teleskopa dobijamo željenu jednakost.

4. Nejednačina je definisana za $x \in [-1/3, 1/3]$, $x \neq 0$. Za $x \in (0, 1/3]$, množenjem sa x i sređivanjem nejednačina se svodi na $\sqrt{1 - 9x^2} > 1 - x$. Kako su obe strane pozitivne, kvadriranjem i sređivanjem dobijamo $10x^2 < 2x$, pa deljenjem sa $10x > 0$ sledi $x < 1/5$. Dakle, $x \in (0, 1/5)$ je rešenje u ovom slučaju. Za $x \in [-1/3, 0)$, množenjem sa x i sređivanjem nejednačina postaje $\sqrt{1 - 9x^2} < 1 - x$. Obe strane su pozitivne, pa kvadriranjem i sređivanjem ovaj put dobijamo $10x^2 > 2x$. Deljenjem sa $10x < 0$ opet dobijamo $x < 1/5$. Dakle, $x \in [-1/3, 0)$ je rešenje u ovom slučaju. Rešenje je $x \in [-1/3, 0) \cup (0, 1/5)$.
5. Uslovi za definisanost su $x > 0$, $x \neq 1$ i $5x/2 - 1 > 0$, tj. $x > 2/5$, $x \neq 1$. Za $x \in (2/5, 1)$ nejednačina je ekvivalentna sa $\sqrt{5x/2 - 1} < x$. Obe strane su pozitivne, pa kvadriranjem i sređivanjem dobijamo $2x^2 - 5x + 2 > 0$, tj. $2(x - 2)(x - 1/2) > 0$. Dakle, $x \in (2/5, 1/2)$ je rešenje u ovom slučaju. Za $x \in (1, \infty)$ nejednačina je ekvivalentna sa $\sqrt{5x/2 - 1} > x$. Opet su obe strane pozitivne, pa kvadriranjem i sređivanjem dobijamo $2x^2 - 5x + 2 < 0$, tj. $2(x - 2)(x - 1/2) < 0$. Dakle, $x \in (1, 2)$ je rešenje u ovom slučaju. Rešenje je $x \in (2/5, 1/2) \cup (1, 2)$.
6. Uvođenjem smene $y = x + 11/2$ jednačina se svodi na:

$$(y - 9/2)(y - 3/2)(y + 3/2)(y + 9/2) - 81 = 0, \quad \text{tj. } (y^2 - 81/4)(y^2 - 9/4) - 81 = 0.$$

Uvođenjem smene $z = y^2 - 45/4$ jednačina postaje:

$$(z - 9)(z + 9) - 81 = 0, \text{ tj. } z^2 = 0.$$

Odatle, $z = 0$, pa je $y = \pm 3\sqrt{5}/2$, i rešenja polazne jednačine su $x = (\pm 3\sqrt{5} - 11)/2$.

7. Uslov $(z - 2)(\bar{z} + i) \in \mathbb{R}$ ekvivalentan je sa $(z - 2)(\bar{z} + i) = \overline{(z - 2)(\bar{z} + i)}$, tj. sa $(z - 2)(\bar{z} + i) = (\bar{z} - 2)(z - i)$. Množenjem dobijamo $z\bar{z} + iz - 2\bar{z} - 2i = z\bar{z} - 2z - i\bar{z} + 2i$, tj. $2(z - \bar{z}) + i(z + \bar{z}) = 4i$, tj. $4i \operatorname{Im} z + 2i \operatorname{Re} z = 4i$, odakle $\operatorname{Re} z = 2 - 2 \operatorname{Im} z$. Dakle, rešenja su $z = 2 - 2\lambda + i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
8. Broj w rotiran oko 0 za 45° u negativnom smeru jednak je $w(\cos(-\pi/4) + i \sin(-\pi/4)) = w(1 - i)/\sqrt{2}$. Dakle, $z = (2 + 3i - 4 - 2i)(1 - i)/\sqrt{2} + 4 + 2i = (4 - 1/\sqrt{2}) + (2 + 3/\sqrt{2})i$.
9. Neka je $t = x/y$; tada je $t^2 + t + 1 = 0$, odakle je $t^3 - 1 = (t - 1)(t^2 + t + 1) = 0$, tj. $t^3 = 1$. Takođe, $x/(x + y) = t/(t + 1) = t/(-t^2) = -1/t$ i $y/(x + y) = 1/(t + 1) = 1/(-t^2) = -1/t^2$.

Sada je:

$$\left(\frac{x}{x+y}\right)^{2025} + \left(\frac{y}{x+y}\right)^{2025} = -\frac{1}{t^{2025}} - \frac{1}{t^{4050}} = -2,$$

jer je $t^{2025} = t^{4050} = 1$ jer $3 \mid 2025$ i $2 \mid 4050$.

10. Zapišimo $X^{2026} + X^{2025} + 1 = (X - 1)^2 q(X) + aX + b$. Zamenom $X = 1$ dobijamo $a + b = 3$. Primenom izvoda imamo $2026X^{2025} + 2025X^{2024} = 2(X - 1)q(X) + (X - 1)^2 q'(X) + a$, pa zamenom $X = 1$ dobijamo $a = 4051$. Sada je $b = -4048$ i ostatak je $4051X - 4048$.
11. Označimo dati polinom sa $P(X)$. Njegov izvod jednak je $P'(X) = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{X^{n-1}}{(n-2)!} + \dots + X + 1$; dakle, $P(X) - P'(X) = X^n/n!$. Ako je α zajednički koren za $P(X)$ i $P'(X)$, α je tada i koren od $P(X) - P'(X)$, pa je $\alpha = 0$ jedini kandidat za zajednički koren. Međutim, kako 0 očigledno nije koren od $P(X)$, $P(X)$ i $P'(X)$ nemaju zajednički koren, tj. $P(X)$ nema višestruke korene.
12. Uočimo polinom $Q(X) = (X+1)P(X) - X$. Očigledno, $Q(X)$ je jedanaestog stepena i $Q(n) = 0$ za $n = 0, 1, \dots, 10$. Dakle, $Q(X) = cX(X-1)(X-2)\dots(X-10)$. Za $X = -1$, sa jedne strane $Q(-1) = (-1+1)P(-1) - (-1) = 1$, a sa druge strane $Q(-1) = c(-1)(-2)\dots(-11) = -c11!$; odatle, $c = -1/11!$. Sada vidimo da je $Q(11) = -1$, pa je $P(11) = (Q(11) + 11)/(11 + 1) = 10/12 = 5/6$.
13. Kako je $a + b + c = 1$, imamo:

$$\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{1+c+a} + \frac{c}{1+a+b} = \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} = f(a) + f(b) + f(c),$$

gde je $f(x) = x/(2-x)$. Iz uslova $a, b, c > 0$ i $a + b + c = 1$ sledi $a, b, c \in (0, 1)$. Funkcija $f(x)$ je konveksna na $(0, 1)$. Ovo nije teško zaključiti jer $f(x) = x/(2-x) = -1 - 2/(x-2)$, ili računom izvoda $f'(x) = 2(x-2)^{-2}$ i $f''(x) = -4(x-2)^{-3}$, odakle je $f''(x) > 0$ za $x \in (0, 1)$. Prema Jensenovoj nejednakosti je:

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\frac{1/3}{2-1/3} = \frac{3}{5},$$

što smo i želeli da dokažemo.

$$\begin{aligned} \text{Alternativno, } \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} &= -3 + \frac{2}{2-a} + \frac{2}{2-b} + \frac{2}{2-c} \geq \\ &\geq -3 + \frac{9}{(2-a)/2 + (2-b)/2 + (2-c)/2} = -3 + \frac{9}{3-1/2} = -3 + \frac{18}{5} = \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

gde nejednakost sledi iz HA nejednakosti.

$$14. \text{ Imamo } \frac{a}{c} + 2\sqrt{\frac{b}{a+c}} + 5\sqrt[5]{\frac{c}{b}} =$$

$$\begin{aligned} &= -1 + \frac{a+c}{c} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt[5]{\frac{c}{b}} + \sqrt[5]{\frac{c}{b}} + \sqrt[5]{\frac{c}{b}} + \sqrt[5]{\frac{c}{b}} + \sqrt[5]{\frac{c}{b}} \geq \\ &\geq -1 + 8\sqrt[8]{\frac{a+c}{c} \frac{\sqrt{b}^2}{\sqrt{a+c}^2} \frac{\sqrt[5]{c}^5}{\sqrt[5]{b}^5}} = -1 + 8 = 7, \end{aligned}$$

gde je nejednakost AG nejednakost. Jednakost bi važila ako bi svi sabirci bili međusobno jednaki, što automatski znači da bi morali da budu jednaki 1 jer u proizvodu daju 1. Međutim, kako $(a+c)/c \neq 1$ jer $a \neq 0$, zaključujemo da je nejednakost stroga.

15. Neka je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prema Koši–Švarcovoј nejednakosti je:

$$(a + 2b + 3c)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 2^2 + 3^2) = 14,$$

odakle sledi $a + 2b + 3c \leq \sqrt{14}$. Jednakost se dostiže ako $a : 1 = b : 2 = c : 3$, pa nakon ubacivanja u $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ vidimo da se jednakost dostiže za npr. $a = 1/\sqrt{14}$, $b = 2/\sqrt{14}$ i $c = 3/\sqrt{14}$. Dakle, tražena maksimalna vrednost je $\sqrt{14}$.