

NEPREBROJIVOST SKUPA $\mathbb{R}$

SLAVKO MOCONJA

Definicija 1. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$. Definišemo igru I_S za dva igrača A i B na sledeći način:

- Na početku igre (korak 0):
 - * A bira proizvoljan broj $a_0 \in \mathbb{R}$;
 - * B odgovara izborom proizvoljnog broja $b_0 \in \mathbb{R}$ takvog da $a_0 < b_0$.
- Pretpostavimo da su posle koraka n izabrani brojevi a_n (A -ov izbor) i b_n (B -ov izbor) takvi da $a_n < b_n$. U koraku $n + 1$:
 - * A bira proizvoljan $a_{n+1} \in \mathbb{R}$ takav da $a_n < a_{n+1} < b_n$;
 - * B odgovara izborom proizvoljnog $b_{n+1} \in \mathbb{R}$ takvog da $a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$.
- A dobija igru ako $a_\infty := \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in S$.

Komentar 2. a) Primetimo da su svi izbori u toku igre mogući. Konkretno:

- izbor a_0 je moguć jer $\mathbb{R} \neq \emptyset$;
- izbor b_0 je moguć jer $\mathbb{R}$ nema najveći element;
- izbori a_{n+1} i b_{n+1} su mogući jer je $\mathbb{R}$ gusto uređen.

b) Po pravilima igre imamo:

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < b_2 < b_1 < b_0;$$

dakle:

- niz (a_n) je strogo rascući, niz (b_n) je strogo opadajući, i svaki b_n je gornje ograničenje celog niza (a_n) ;
- dakle, $a_\infty = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ postoji;
- štaviše, $a_n < a_\infty < b_n$ za sve n .

c) Igru $I_{\mathbb{R}}$ A sigurno dobija.

Tvrđenje 3. Ako je S prebrojiv, B ima pobedničku strategiju za I_S .

Dokaz. Neka je $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}$; B -ova strategija je:

- u koraku 0, B bira proizvoljno $b_0 \in \mathbb{R}$ takvo da $a_0 < b_0$;
- u koraku n , B bira $b_n = s_n$ ako je takav potez legalan; u suprotnom, bira proizvoljno $b_n \in \mathbb{R}$.

Dokažimo da je B dobio igru. Pretpostavimo suprotno, $a_\infty \in S$. Tada je $a_\infty = s_n$ za neko $n \geq 1$. Kako je $a_n < a_\infty < b_{n-1}$ i $s_n = a_\infty$, prateći strategiju imamo $b_n = s_n$. Međutim, to je u kontradikciji sa $a_\infty < b_n$. $\square$

Teorema 4 (Kantor). $\mathbb{R}$ nije prebrojiv.

Dokaz. Prema komentaru 2(c), B ne može da dobije $I_{\mathbb{R}}$. Prema tvrđenju 3, $\mathbb{R}$ nije prebrojiv. $\square$