ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

ДРАГОЉУБ Ј. КЕЧКИЋ

1. Намотавање праве на круг

Дефиниција 1.1. Јединични круг у комплексној равни је $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Теорема 1.1. *Постоји и јединствена је функција $h : \mathbf{R} \to \mathbf{U}$ са следећим особинама:*
 (i) $h(x+y) = h(x)h(y)$;
 (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)-1}{x} = i$.

Доказ ће бити изведен касније.

Напомена 1.2. Претходна функција h представља изометрично намотавање реалне праве на круг. И то тако што нулу, прислонимо на тачку $1 = 1 + i0$, и праву замотамо око круга. Први услов обезбеђује да је то намотавање исто у околини сваке тачке. Наиме, множењу унимодуларних комплексних бројева одговара надовезивање одговарајућих лукова. С друге стране, други услов обезбеђује изометричност у близини тачке 0. Наиме вектори $h(x) - 1$ и ix, су утолико "једнакији", уколико смо ближи нули, но тада вектор $h(x) - 1$ апроксимира дужину лука.

Дефиниција 1.2. Функцију из претходне теореме означавамо са cis.

Став 1.3. *(Основне особине функције* cis*)*
 а) $\operatorname{cis} 0 = 1$.
 б) За све $n \in \mathbf{N}$ *је* $\operatorname{cis} nx = (\operatorname{cis} x)^n$.
 в) $\operatorname{cis}(-x) = 1/\operatorname{cis} x = \overline{\operatorname{cis} x}$.
 г) За све $n \in \mathbf{Z}$ *важи* $\operatorname{cis} nx = (\operatorname{cis} x)^n$.

Доказ. а) Ставимо у (i) $x = y = 0$, па имамо $\operatorname{cis} 0 = \operatorname{cis}^2 0$, одакле $\operatorname{cis} 0$ може бити или 0 или 1. Међутим $\operatorname{cis} 0 \in \mathbf{U}$, па мора бити $\operatorname{cis} 0 = 1$.

б) Наиме, стављајући $x = y$ у (i) добијамо $\operatorname{cis} 2x = \operatorname{cis}^2 x$. Даље индукцијом. Претпоставимо да важи $\operatorname{cis} nx = (\operatorname{cis} x)^n$. Узимајући у (i) $y = nx$ имамо $\operatorname{cis}(x + nx) = \operatorname{cis} x \operatorname{cis} nx = \operatorname{cis} x(\operatorname{cis} x)^n$, односно $\operatorname{cis}(n+1)x = (\operatorname{cis} x)^{n+1}$.

в) Стављајући $y = -x$ у (i) и користећи а), имамо $1 = \operatorname{cis} 0 = \operatorname{cis}(x + (-x)) = \operatorname{cis} x \operatorname{cis}(-x)$. Отуда је $\operatorname{cis}(-x) = \frac{1}{\operatorname{cis} x} = \frac{\overline{\operatorname{cis} x}}{|\operatorname{cis} x|^2} = \overline{\operatorname{cis} x}$.

г) Следи из б) и в). Заиста, за $n < 0$ имамо $\operatorname{cis}(nx) = \operatorname{cis}(-(-n)x) = 1/\operatorname{cis}((-n)x) = 1/(\operatorname{cis} x)^{-n} = (\operatorname{cis} x)^n$. □

Напомена 1.4. За разлику од експоненцијалне функције, овде не можемо додати особину $\operatorname{cis}(\frac{p}{q}x) = (\operatorname{cis} x)^{p/q}$, јер не знамо да вадимо корен из комплексног броја.

2. Синус и косинус

Теорема 2.1. *Постоје и јединствене су функције $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ које задовољавају следеће особине:*
 (i) $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$;

(ii) $g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$;
(iii) $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$;
(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ *и* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-1}{x} = 0$.

Уместо доказа. Доказаћемо еквивалентност ове Теореме и Теореме 1.1. Функција $h(x) = g(x) + if(x)$, због услова (iii) пресликава $\mathbf{R}$ у $\mathbf{U}$. С друге стране услови (i) и (ii) еквивалентни су (непосредна провера) услову $h(x+y) = h(x)h(y)$, док је услов (iv) еквиваелнтан са $\lim\limits_{x\to 0} \frac{h(x)-1}{x} = 0$. $\square$

Дефиниција 2.1. Функција sin је функција f, а функција cos је функција g из претходне Теореме.

Став 2.2. *(Правила рачунања са синусом и косинусом)*
а) $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$
б) $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$.
в) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$.
г) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
д) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.
ђ) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$, $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$, $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$.
е) $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$, $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$, $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$.

Доказ. а) $\cos 0 + i \sin 0 = \operatorname{cis} 0 = 1$.
б) $\cos(-x) + i \sin(-x) = \operatorname{cis}(-x) = \overline{\operatorname{cis} x} = \overline{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x$.
в) Формуле за синус и косинус збира следе из дефиниције, а за разлику из формула за збир и претходне тачке.
г) У формуле за збир ставимо $y = x$.
д) Једнакости $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ и $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ одузмемо, односно саберемо.
ђ) Пођемо од десне стране и употребимо адиционе формуле.
е) Следи из претходне тачке после смене $a = x + y$ и $b = x - y$, осим за збир синуса. Збир синуса се изводи из формуле за разлику синуса убацивањем броја $-y$ уместо y, уз примену тачке б). $\square$

Став 2.3. *(Непрекидност синуса и косинуса)*
а) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.
б) $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$, *и* $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Доказ. а) Имамо $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot x = 1 \cdot 0 = 0$. Такође $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 1) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} \cdot x = 0 \cdot 0 = 0$.
б) Имамо $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \lim\limits_{x\to x_0} \sin(x - x_0 + x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} (\sin(x-x_0) \cos x_0 + \sin x_0 \cos(x - x_0)) = \lim\limits_{y\to 0}(\sin y \cos x_0 + \sin x_0 \cos y) = 0 \cdot \cos x_0 + 1 \cdot \sin x_0 = \sin x_0$, после смене $x - x_0 = y$. Слично $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \lim\limits_{x\to x_0} \cos(x - x_0 + x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} (\cos(x-x_0) \cos x_0 - \sin x_0 \sin(x - x_0)) = \lim\limits_{y\to 0}(\cos y \cos x_0 - \sin x_0 \sin y) = 1 \cdot \cos x_0 - 0 \cdot \sin x_0 = \cos x_0$, после смене $x - x_0 = y$. $\square$

3. Број π - периодичност синуса и косинуса

Уочимо скуп
$$C = \{x > 0 \mid \sin x = 0\}.$$

Став 3.1. *Скуп C није празан*

Доказ. Због $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, постоји пунктирана околина нуле $(-\beta,0)\cup(0,\beta)$ у којој је количник $\frac{\sin x}{x}$ позитиван, а то значи да је за $x\in(0,\beta)$, $\sin x>0$.

Претпоставимо супротно да је $C=\emptyset$. Тада је за све $x>0$, $\sin x>0$. Наиме, у супротном (то јест ако постоји $y>0$ са особином $\sin y\le 0$) би постојала тачка ξ где се синус анулира, према Болцановој теореми. Међутим, тада је и $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}>0$, за све $x>0$. Покажимо да је ово последње немогућно.

Уочимо низ $a_0=0$, $a_{n+1}=\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$. Показује се да је a_n строго растући низ који конвергира ка 1. Решите овај задатак. Индукцијом доказујемо да је за све $n\in\mathbf{N}$ и све $x>0$, $\cos x\ge a_n$. Базу индукције чини тврђење $\cos x\ge 0$ што смо већ показали. Корак изгледа овако. Претпоставимо да је за све $x>0$, $\cos x\ge a_n$, Тада је због Става 2.2 г) $\cos x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\ge\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}=a_{n+1}$.

Тако је за све $x>0$ и све $n\in\mathbf{N}$, $\cos x\ge a_n$. Делујемо на ову неједнакост лимесом кад $n\to+\infty$ и добијамо $\cos x\ge 1$. Тада је $\sin x=0$ за све $x>0$ и ту је контрадикција. □

Дефиниција 3.1. $\pi=\inf C$. (Скуп C је према малопре показаном непразан, а ограничен је одоздо бројем β.)

Став 3.2. *(Израчунавање броја π) Важи $\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n s_n$, где је s_n низ задат са $s_1=1$ и $s_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-s_n^2}}{2}}$.*

Доказ. Из дефиниције синуса је $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Како низ $\pi/2^n\to 0$ кад $n\to+\infty$, то на основу Хајнеове Теореме имамо $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=1$, односно $\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}2^n\sin\frac{\pi}{2^n}$. Остаје још да докажемо да низ $s_n=\sin\frac{\pi}{2^n}$ задовољава наведене једнакости. Имамо $s_1=\sin\pi/2=1$, али и $s_{n+1}=\sin\frac{\pi/2^n}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/2^n)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2(\pi/2^n)}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-s_n}}{2}}$, јер се сви бројеви облика $\pi/2^n$ налазе у интервалу $(0,\pi/2)$, па су им синуси позитивни. □

Следи табела где је израчунато првих 10 чланова низа s_n и приближне вредности броја $\pi\approx 2^n s_n$. (У последњој итерацији тачне су само прве четири децимале.)

n	s_n	$2^n s_n$
1	1	2
2	0,707106781	2,828427125
3	0,382683432	3,061467459
4	0,195090322	3,121445152
5	0,09801714	3,136548491
6	0,049067674	3,140331157
7	0,024541229	3,141277251
8	0,012271538	3,141513801
9	0,006135885	3,14157294
10	0,003067957	3,141587725

Став 3.3. *(Вредности синуса и косинуса)*

а) $\sin\pi=0$, $\cos\pi=-1$.

б) Ако је $0<x<\pi$ *тада је* $\sin x>0$, *а ако је* $0<x<\pi/2$ *онда је* $\cos x>0$.

в) $\sin\pi/2=1$, $\cos\pi/2=0$.

г) $\sin\pi/4 = \cos\pi/4 = \sqrt{2}/2$.
д) $\sin\pi/6 = \cos\pi/3 = 1/2$, $\sin\pi/3 = \cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$.
ђ) $\sin 2\pi = 0$, $\cos 2\pi = 1$.

Доказ. а) Постоји низ $c_n \in C$ који конвергира ка π. Због непрекидности функције sin је тада $\sin\pi = \sin\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sin c_n = 0$. Због услова (iii) је $\cos^2\pi = 1$, па $\cos\pi$ може бити или 1 или -1. У случају $\cos\pi = 1$ било би $\sin^2\pi/2 = \frac{1-\cos\pi}{2} = 0$, односно $\sin\pi/2 = 0$, што се противи чињеници да је $\pi = \inf C$. Тако је $\cos\pi = -1$.

б) Из дефиниције броја π следи да је $\sin x \neq 0$ за $0 < x < \pi$. Ако би за неко $0 < x < \pi$ било $\sin x < 0$, онда би због тога што је синус позитиван у некој околини нуле и Болцанове Теореме добили да постоји $\xi \in (0, x)$ такво да је $\sin\xi = 0$. Тако је за све $0 < x < \pi$, $\sin x > 0$.

С друге стране, ако је $0 < x < \pi/2$, тада је $0 < 2x < \pi$, па је $\cos x = \frac{\sin 2x}{2\sin x} > 0$.

в) и г) Следи из Става 2.2 г).

д) Ставимо $a = \sin\pi/6$, $b = \cos\pi/6$. Из адиционаих формула је, тада, $\sin\pi/3 = 2ab$, $\cos\pi/3 = b^2 - a^2$, а такође и $1 = \sin\pi/2 = \sin(\pi/6 + \pi/3) = \sin\pi/6\cos\pi/3 + \sin\pi/3\cos\pi/6 = a(b^2 - a^2) + 2abb = a(3b^2 - a^2)$, као и $0 = \cos\pi/2 = \cos(\pi/6 + \pi/3) = \cos\pi/6\cos\pi/3 - \sin\pi/3\sin\pi/6 = b(b^2 - a^2) - 2aba = b(b^2 - 3a^2)$. Дакле имамо систем једначина $1 = a(3b^2 - a^2)$ и $0 = b(b^2 - 3a^2)$. Како су (због тачке б)) $a, b > 0$, то из друге једначине следи $b = a\sqrt{3}$, па када то увrстимо у прву налазимо $1 = 9a^3 - a^3$, то јест $a^3 = 1/8$ или $a = 1/2$ и тиме $b = \sqrt{3}/2$.

ђ) $\sin 2\pi = 2\sin\pi\cos\pi = 2\cdot 0\cdot(-1) = 0$, $\cos 2\pi = \cos^2\pi - \sin^2\pi = (-1)^2 - 0^2 = 1$. □

Став 3.4. *Скуп C једнак је скупу $\{k\pi \mid k = 1, 2, \dots\}$.*

Доказ. Из адиционих формула имамо $\sin(x + \pi) = \sin x\cos\pi + \cos x\sin\pi = -\sin x$, и $\sin(x - \pi) = \sin x\cos\pi - \cos x\sin\pi = -\sin\pi$. Одатле индукцијом закључујемо да је $\sin k\pi = 0$ за све $k = 1, 2, \dots$. Наиме, за $k = 1$ то је дефиниција броја π, а ако претпоставимо да је $\sin k\pi = 0$, тада је $\sin(k+1)\pi = \sin(k\pi + \pi) = -\sin k\pi = 0$. Тиме је доказана инклузија $C \supseteq \{k\pi \mid k = 1, 2, \dots\}$.

Докажимо и обратну. Нека је $x > 0$ такво да је $\sin x = 0$, и нека је $l = [x/\pi]$. Тада је $l \leq x/\pi < 1 + 1$, односно $0 \leq x - l\pi < \pi$. Међутим показује се да је $\sin(x - l\pi) = -\sin(x - (l-1)\pi) = \sin(x - (l-2)\pi) = \cdots = (-1)^l\sin x = 0$, па $x - l\pi \in C$. Како је π минимум скупа C, то закључујемо да је $x - l\pi = 0$. □

Дефиниција 3.2. Број T је период функције $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ако за све $x \in \mathbf{R}$ важи $f(x + T) = f(x)$. Основни период функције f је њен најамањи строго позитиван период.

Пример 3.1. Сваки рационалан број је период Дирихлеове функције $D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbf{Q} \\ 1, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$. Дирихлеова функција нема основни период.

Став 3.5. *(Периодичност тригонометријских функција) Функције* sin *и* cos *су периодичне функције. Њихов основни период је 2π.*

Доказ. На основу адиционих формула и Става 3.3 д) имамо $\sin(x + 2\pi) = \sin x\cos 2\pi + \cos x\sin 2\pi = 1\cdot\sin x + 0\cdot\cos x = \sin x$, као и $\cos(x + 2\pi) = \cos x\cos 2\pi - \sin x\sin 2\pi = 1\cdot\cos x - 0\cdot\sin x = \cos x$. Тако је 2π један период функција sin и cos.

Претпоставимо, сада да је број $T > 0$ период функције sin. На основу адиционих формула је тада $\sin x = \sin(x + T) = \sin x\cos T + \cos x\sin T$, за свако x.

Убацујући $x = 0$, налазимо да је $\sin T = 0$, а стављајући $x = \pi/2$ и $\cos T = 1$. Но тада је $\sin^2 T/2 = (1 - \cos T)/2 = 0$, то јест $T \in C$. Због Става 3.4 је тада $T/2 = k\pi$, то јест $T = 2k\pi$, за неко $k \geq 1$ и тиме $T > 2\pi$. Тако је 2π основни период функције sin. Слично се налази и за косинус. □

4. Графици функција синус и косинус

Дефиниција 4.1. Кажемо да је функција $f : A \to \mathbf{R}$ ($A \subseteq \mathbf{R}$) парна ако за њен домен важи $x \in A \Rightarrow -x \in A$, и ако је за све $x \in A$, $f(-x) = f(x)$. Кажемо да је непарна, ако домен има исту особину и ако за све $x \in A$ важи $f(-x) = -f(x)$.

Став 4.1. *График парне функције симетричан је у односу на y-осу, а график непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак.*

Доказ. Прво за парне. Нека тачка (x, y) припада графику функције f. То значи да је $y = f(x)$. Њој симетрична тачка у односу на y-осу је $(-x, y)$. Она такође припада графику функције f, јер је $f(-x) = f(x) = y$.

Сада за непарне. Тачка симетрична тачки (x, y) у односу на координатни почетак је тачка $(-x, -y)$. Она такође припада графику, јер је $f(-x) = -f(x) = -y$. □

На основу Става 2.2 б), функција cos је парна, а функција sin непарна. Тако је за скицирање њиховог графика, довољно нацртати део десно од y-осе, а касније се то симетрично преслика. Међутим, оне су и 2π-периодичне, тако да је довољно нацртати њихов график на неком интервалу дужине 2π, јер се остатак добија транслирањем овог дела у лево и у десно за 2π.

Став 4.2. *а) Функција* sin *је строго растућа на интервалу* $[-\pi/2, \pi/2]$, *а строго опадајућа на интервалима* $[-\pi, -\pi/2]$ *и* $[\pi/2, \pi]$.

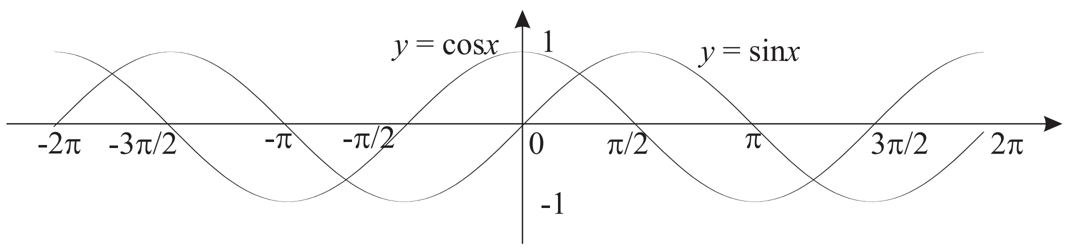
б) Функција cos *је строго растућа на интервалу* $[-\pi, 0]$, *а строго опадајућа на интервалу* $[0, \pi]$.

Доказ. На основу Става 2.2 е) важи $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$. Ако је $-\pi/2 \leq y < x \leq \pi/2$, тада је $\frac{x-y}{2} \in (0, \pi/2]$ и $\frac{x+y}{2} \in (-\pi/2, \pi/2)$. Међутим синус на првом, а косинус на другом скупу су позитивни, па је $\sin x - \sin y > 0$.

Слично, ако је $-\pi \leq y < x \leq -\pi/2$, тада је $\frac{x-y}{2} \in (0, \pi/4]$ и $\frac{x+y}{2} \in (-\pi, -\pi/2)$. На првом интервалу је синус позитиван, али је на другом косинус негативан, јер је за $a \in (-\pi, -\pi/2)$, $a+\pi \in (0, \pi/2)$, па је $\cos a = \cos(a+\pi-\pi) = -\cos(a+\pi) < 0$.

И остало добијамо на сличан начин. □

Графици функција синус и косинус приказани су на наредној слици.



5. Егзистенција и јединственост функција синус и косинус

Став 5.1. *Низ* $h_n(x) = \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n$ *је Кошијев у* $\mathbf{C}$ *за свако* $x \in \mathbf{R}$.

Доказ. Оценимо најпре разлику суседних чланова. Први сабирак ћемо трансформисати и употребити биномну формулу. Имамо

$$|h_{n+1}(x) - h_n(x)| = \left|\left(1 + \frac{ix}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n\right| =$$

$$= \left|\left(1 + \frac{ix}{n} - \frac{ix}{n(n+1)}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n\right| =$$

$$= \Bigg|\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^k\left(-\frac{ix}{n(n+1)}\right)^{n-k} +$$

$$+ (n+1)\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n\Bigg| =$$

Последња два сабирка у биномној формули смо издвојили и они ће се скратити са $h_n(x)$.

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^k\left(-\frac{ix}{n(n+1)}\right)^{n-k}\right|$$

$$\le \frac{|x|^2}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^k\left(\frac{|x|}{n(n+1)}\right)^{n-2-k} =$$

$$= \frac{|x|^2}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n(n+1)}{(n+1-k)(n-k)}\binom{n-1}{k}\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^k\left(\frac{|x|}{n(n+1)}\right)^{n-2-k} \le$$

$$\le \frac{|x|^2}{2n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\left(1 + \frac{|x|}{n}\right)^k\left(\frac{|x|}{n(n+1)}\right)^{n-2-k} =$$

$$= \frac{|x|^2}{2n(n+1)}\left(1 + \frac{|x|}{n} + \frac{|x|}{n(n+1)}\right)^{n-2} \le$$

$$\le \frac{|x|^2}{2n(n+1)}\left(1 + \frac{(n+2)|x|}{n(n+1)}\right)^{n-2} \le \frac{|x|^2}{2n(n+1)}\left(1 + \frac{2|x|}{n}\right)^n \le \frac{|x|^2 e^{2|x|}}{2n(n+1)},$$

односно $|h_{n+1}(x) - h_n(x)| \le \frac{A}{n(n+1)} = A\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, где је $A = |x|^2 e^{2|x|}/2$. Последње неједнакости просумирамо по свим n почевши од n до $m-1$, па имамо

$$|h_m(x) - h_n(x)| \le \sum_{k=n}^{m-1}|h_{k+1}(x) - h_k(x)| \le A\sum_{k=n}^{m-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = A\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \le \frac{A}{n},$$

а ово последње се може учинити мањим од било ког $\varepsilon > 0$, за $m \ge n$ довољно велике. □

Дефиниција 5.1. Дефинишемо функцију $h(x) = \lim_{n\to+\infty} h_n(x)$.

Став 5.2. *Функција* h *из претходне дефиниције задовољава услове* (*i*) *и* (*ii*) *у исказу Теореме 1.1.*

Доказ. Докажимо најпре да увек $h(x) \in \mathbf{U}$. Имамо $|h_n(x)|^2 = h_n(x)\overline{h_n(x)} = (1 + ix/n)^n(1 - ix/n)^n = (1 + x^2/n^2)^n$. Међутим, последњи израз тежи ка 1, што смо видели приликом увођења експоненцијалне функције.

Докажимо сада услов (i). Имамо

$$\begin{aligned}
|h_n(x)h_n(y)-h_n(x+y)| &= \left|\left(1+i\frac{x+y}{n}-\frac{xy}{n^2}\right)^n-\left(1+i\frac{x+y}{n}\right)^n\right| = \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+i\frac{x+y}{n}\right)^k\left(-\frac{xy}{n^2}\right)^{n-k}-\left(1+i\frac{x+y}{n}\right)^n\right| = \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(1+i\frac{x+y}{n}\right)^k\left(-\frac{xy}{n^2}\right)^{n-k}\right| \le \\
&\le \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}\right)^k\left(\frac{|xy|}{n^2}\right)^{n-k} \le \\
&\le \frac{|xy|}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}\right)^k\left(\frac{|xy|}{n^2}\right)^{n-k-1} \le \\
&\le \frac{|xy|}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}\right)^k\left(\frac{|xy|}{n^2}\right)^{n-k-1} = \\
&= \frac{|xy|}{n}\left(1+\frac{|x|+|y|}{n}\right)^{n-1} \le \frac{|xy|}{n}\exp(|x|+|y|),
\end{aligned}$$

одакле, преласком на лимес кад $n\to+\infty$ добијамо $|h(x)h(y)-h(x+y)|\le 0$, па је услов (i) доказан.

Докажимо услов (ii). Имамо

$$\begin{aligned}
|h_n(x)-1-ix| &= \left|\left(1+\frac{ix}{n}\right)^n-1-ix\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{ix}{n}\right)^k-1-ix\right| = \\
&= \left|\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{ix}{n}\right)^k\right| \le \sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k+2}\left(\frac{|x|}{n}\right)^{k+2} \le \\
&\le \frac{|x|^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-k-1)(n-k-2)}{(k+2)(k+1)}\binom{n}{k}\left(\frac{|x|}{n}\right)^k \le \\
&\le \frac{|x|^2(n-1)(n-2)}{2n^2}\left(1+\frac{|x|}{n}\right)^n \le \\
&\le \frac{|x|^2}{2}\exp|x|,
\end{aligned}$$

одакле, преласком на лимес добијамо неједнакост

$$|h(x)-1-ix| \le \frac{|x|^2}{2}\exp|x|,$$

односно

$$\left|\frac{h(x)-1-ix}{x}\right| \le \frac{|x|}{2}\exp|x|,$$

што повлачи $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-1-ix}{x}=0$, па је доказано да важи и услов (ii). □

Доказ Теореме 1.1. Егзистенција следи из Става 5.2. Остаје да докажемо јединственост. На основу Става 3.2, број π је константа која не зависи од дефиниције синуса и косинуса. На основу Става 3.3, б) у интервалу $(0,\pi/2)$ су обе функције sin и cos позитивне, па су, на основу Става 2.2 д) и Става 3.3 в), потпуно одређене њихове вредности у тачкама облика $\pi/2^n$. Но, тада су потпуно одређене њихове вредности и у тачкама облика $k\pi/2^n$, на основу Става 2.2 г). Како су ове последње густе у $\mathbf{R}$, тиме су потпуно одређене вредности функција sin и cos у свакој реалној тачки, одакле следи јединственост. $\square$

6. Функције тангенс и котангенс

Став 6.1. *Једначина* $\sin x = 0$ *еквивалентна је са* $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, *док је једначина* $\cos x = 0$ *еквивалентна са* $x = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Доказ. За једначину $\sin x = 0$ тврђење следи из Става 3.4 и непарности синусне функције. Што се тиче једначине $\cos x = 0$, због адиционих формула је $\sin(\pi/2 + x) = -\cos x$, па се она своди на претходну. $\square$

Дефиниција 6.1. Функција тангенс је $\operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$, $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Функција котангенс је $\operatorname{ctg} : \mathbf{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Став 6.2. *(Правила рачунања са тангенсом и котангенсом)*

а) $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg} \pi/6 = \sqrt{3}/3$, $\operatorname{tg} \pi/4 = 1$, $\operatorname{tg} \pi/3 = \sqrt{3}$.
б) $\operatorname{ctg} \pi/6 = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \pi/4 = 1$, $\operatorname{ctg} \pi/3 = \sqrt{3}/3$, $\operatorname{ctg} \pi/2 = 0$.
в) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$.
г) $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$.
д) $\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$.
ђ) $\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \pm\frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}$.

Доказ. Доказ лако следи из Става 2.2. $\square$

Став 6.3. *(Особине функција* tg *и* ctg*)*

а) tg *и* ctg *су непрекидне* π*-периодичне функције.*
б) $\lim\limits_{x\to\pi/2-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pi/2+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{ctg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{tg} x = -\infty$.
в) tg *је растућа функција на интервалу* $(-\pi/2, \pi/2)$, *и* $\operatorname{tg}(-\pi/2, \pi/2) = \mathbf{R}$.
г) ctg *је опадајућа функција на интервалу* $(0, \pi)$, *и* $\operatorname{ctg}(0, \pi) = \mathbf{R}$.

Доказ. а) Непрекидне су, јер су количник две непрекидне функције. За периодичност имамо $\operatorname{tg}(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \operatorname{tg} x$, па π јесте период функције tg. Докажимо да је најмањи. Ако би број $T > 0$ био период функције tg, тада би имали $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x+T) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} T}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} T}$ за свако x. Ако узмемо $x = \pi/4$ добијамо $1 = (1 + \operatorname{tg} T)/(1 - \operatorname{tg} T)$, одакле је $\operatorname{tg} T = 0$, а тиме и $\sin T = 0$. По дефиницији броја π је, тада, $T \geq \pi$. Слично и за котангенс.

б) Следи директно из правила за лимес количника и Ставова 2.2 а, и 3.3 б).

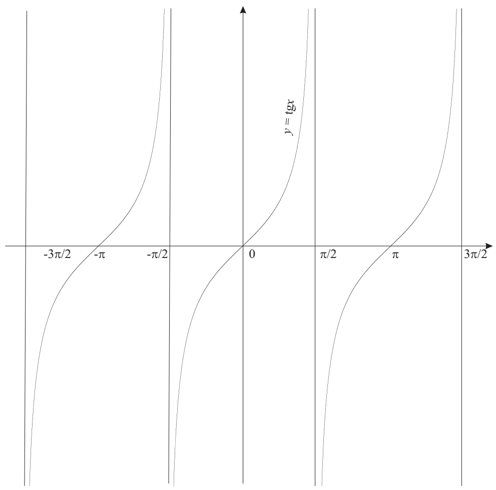
в) Да је растућа следи из Става 6.2 д), а да је $\operatorname{tg}(-\pi/2, \pi/2) = \mathbf{R}$, следи из претходне тачке и особина непрекидних функција.

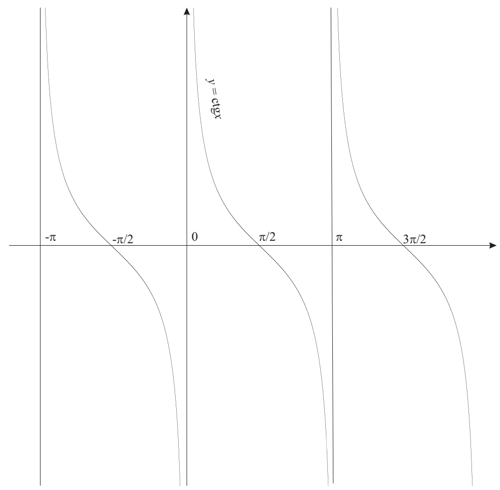
г) Слично као претходно. $\square$

Графици функција tg и ctg налазе се на следћој страници.

7. Инверзне тригонометријске функције

Како смо видели, функција $\sin : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ није бијекција, и отуда нема инверзну функцију. Међутим, ако извршимо рестрикцију домена и кодомена може да постане. Наиме, према Ставову 4.2, sin је строго растућа на $[-\pi/2, \pi/2]$, док је cos строго опадајућа на $[0, \pi]$. Како је, још $\sin(\pm\pi/2) = \pm 1$, те је sin бијекција интервала $[-\pi/2, \pi/2]$ на интервал $[-1, 1]$. Слично, cos је бијекција интервала $[0, \pi]$ на интервал $[-1, 1]$.





Дефиниција 7.1. Функција $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ је функција инверзна функцији sin. Функција $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ је функција инверзна функцији cos.

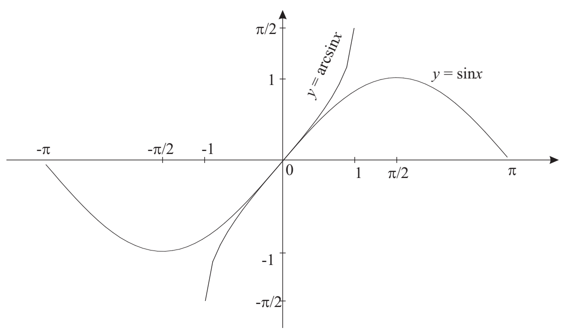
Слично, на основу Става 6.3 в) и г), функције tg и ctg су бијекције са $(-\pi/2, \pi/2)$, односно $(0,\pi)$ на $\mathbf{R}$.

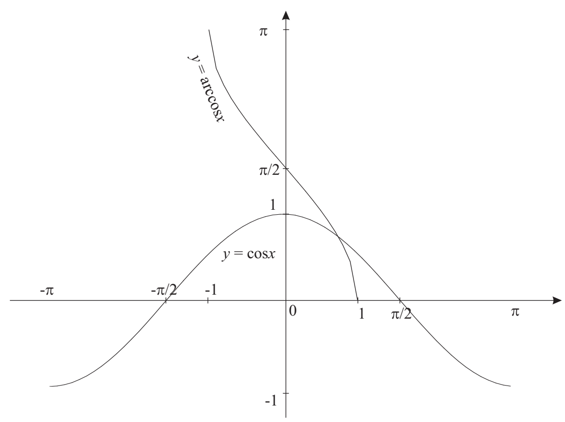
Дефиниција 7.2. Функција $\mathrm{arctg} : \mathbf{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ је функција инверзна функцији tg. Функција $\mathrm{arcctg} : \mathbf{R} \to [0,\pi]$ је функција инверзна функцији ctg.

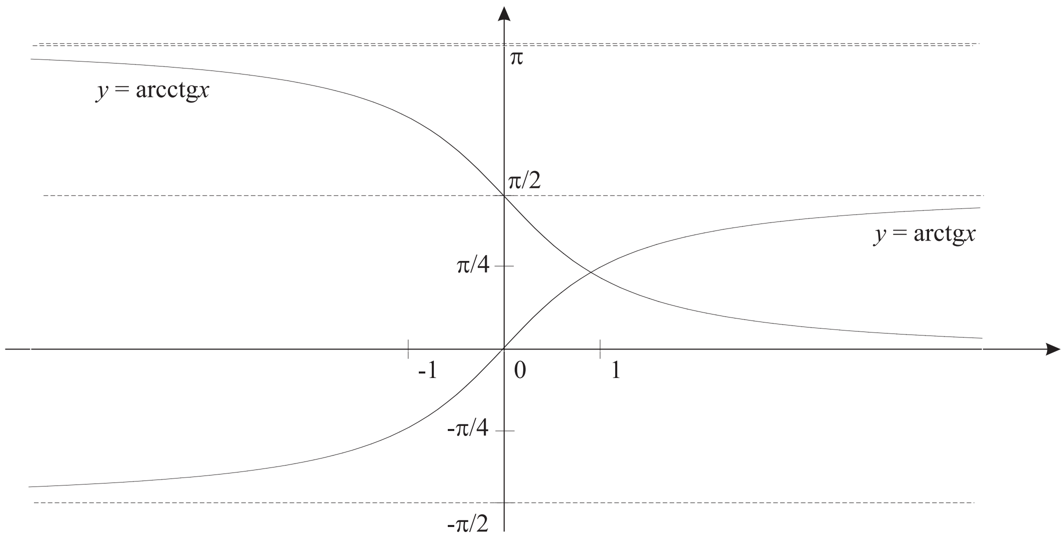
Особине ових функција се лако изводу из особина тригонометријских функција, на основу теореме о инверзној функцији.

Став 7.1. *(Особине инверзних тригонометријских функција)*
а) $\arcsin -1 = -\pi/2$, $\arcsin 0 = 0$, $\arcsin 1 = \pi/1$, $\arccos -1 = \pi$, $\arccos 0 = \pi/2$, $\arccos 1 = 0$, $\mathrm{arctg}\, 0 = 0$, $arcctg 0 = \pi/2$, *итд.*
б) Функције arcsin *и* arctg *су растуће, а функције* arccos *и* arcctg *су опадајуће.*
в) Све инверзне тригонометријске функције су непрекидне.

Следе још графици инверзних тригонометријских функција






π
y = arcctgx
π/2
y = arctgx
π/4
-1
0
1
-π/4
-π/2