0. УВОД

У уводној глави дефинисаћемо елементарне операторе, и даћемо кратак преглед онога што ће у даљем тексту бити изложено.

Нека је $\mathfrak{H}$ сепарабилан Хилбертов простор, и $B(\mathfrak{H})$ алгебра свих ограничених линеарних оператора на $\mathfrak{H}$. *Елементаран оператор* је пресликавање $E : B(\mathfrak{H}) \to B(\mathfrak{H})$ дефинисано са $E(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j$, где су A_j и B_j фиксирани оператори и $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Уколико су A_j и B_j комутирајуће фамилије нормалних оператора, онда ћемо такав елементаран оператор звати *нормално репрезентован* елементаран оператор. Број n зовемо *дужина* елементарног оператора. Овакве операторе увели су Лумер (Lumer G.) и Розенблум (Rosenblum M.) у раду [10], и даље су се проучавали током седамдесетих и осамдесетих година овога века. Најпознатији специјални случајеви елементарних оператора су елементарни множитељ $M_{A,B}(X) = AXB$, деривација $\delta_A(X) = AX - XA$, и уопштена деривација $\delta_{A,B}(X) = AX - XB$.

У ствари, елементарни оператори чине подскуп скупа $B(B(\mathfrak{H}))$. Чак није тешко проверити да, у случају коначнодимензионалног простора $\mathfrak{H}$, елементарни оператори исцрпљују све ограничене операторе на $B(\mathfrak{H})$. Скуп $B(\mathfrak{H})$, међутим није Хилбертов, већ само Банахов простор, тако да при изучавању елементарних оператора не можемо примењивати уобачијене технике рада са операторима на Хилбертовим просторима.

Следеће три теме биће предмет нашег интересовања.

1. Оцена норме. Уобичајена операторска норма је само једна од многих норми, које можемо дефинисати на скупу свих ограничених оператора, или на неком његовом подскупу. Такав подскуп са нормом, која задовољава одређене услове, зваћемо симетрично нормирани идеал. О овоме ће бити више речи у првој глави. Тако елементаран оператор не морамо посматрати увек као оператор који пресликава $B(\mathfrak{H})$ у $B(\mathfrak{H})$. Елементаран оператор E, такав да за све $X \in B(\mathfrak{H})$ $E(X)$ припада $\mathfrak{J}$, где је $\mathfrak{J}$ неки симетрично нормирани идеал компактних оператора, можемо дакле посматрати и као оператор који пресликава Банахов простор $B(\mathfrak{H})$ у Банахов простор $\mathfrak{J}$. Може се веома једноставно, користећи теорему о затвореном графику, показати да је овакав оператор ограничен, и нас ће занимати оцена норме таквог оператора. Такође занимаће нас и оцена норме оператора E посматраног као оператора који пресликава $\mathfrak{J}$ у $\mathfrak{J}$.

2. Геометријска својства. Проучаваћемо геометријска својства само нормално репрезентованих елементарних оператора. Али, најпре покажимо оправданост назива нормално репрезентован елементаран оператор. Скуп свих елементарних оператора затворен је у односу на сабирање и композицију оператора, па према томе чини једну Банахову алгебру. Ова алгебра се може на природан начин снабдети инволуцијом. Наиме, за оператор $E(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j$ дефинишемо његов уопштени адјунговани оператор са $E^*(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j^* X B_j^*$. Кажемо уопштени, зато што оваква инволуција не задовољава услов $||E^*E|| = ||E||^2$, па према томе Банахова алгебра елементарних оператора са оваквом инволуцијом није C^*-алгебра. Нормално репрезентовани елементарни оператори, имају особину да комутирају са својим уопштеним адјунгованим оператором. Нажалост то није нормалан оператор у правом смислу те речи, јер елементарни оператори не чине C^*-алгебру, па немају све особине на које смо навикли. Најважније од геометријских својстава које нас интересује је ортогоналност слике и језгра. Наравно алгебра $B(\mathfrak{H})$ или неки симетрично нормирани идеал $\mathfrak{J}$ (изузев $\mathfrak{S}_2$) нису Хилбертови, већ само Банахови простори, у којима не важи релација паралелограма. Ипак могуће је на одређени начин дефинисати ортогоналност два вектора.

Дефиниција 0.1. *Нека су x и y вектори неког Банаховог простора. Рећи ћемо да је x ортогоналан на y, уколико за све скаларе λ, $\mu \in \mathbf{C}$ важи*

$$||\lambda x + \mu y|| \geq ||\mu y|| \tag{1}$$

Делећи релацију (1) са $|\lambda|$ ($|\mu|$) видимо да се дефиниција неће променити уколико се један од скалара λ или μ изостави. Такође лако се проверава да је у случају Хилбертовог простора релација (1) еквивалентна са

$$|\lambda|^2 \, ||x||^2 + 2 \operatorname{Re} \lambda \overline{\mu} \, \langle x, y \rangle \geq 0,$$

што онда за $\lambda = \overline{\langle x, y \rangle}$, и $\mu = -\, ||x||^2$ постаје

$$| \langle x, y \rangle |^2 \, ||x||^2 - 2 \, ||x||^2 \, | \langle x, y \rangle | \geq 0,$$

а то повлачи да је $\langle x, y \rangle = 0$, то јест ортогоналност у уобичајеном смислу. Интересантно је, међутим, да у Банаховим просторима ова релација не мора бити симетрична, што показује следећи пример.

Пример 0.1. Посматрајмо векторе $x = (-1, 0)$ и $y = (1, 1)$ у Банаховом простору $\mathbf{C}^2$, са max-нормом. Тада је x ортогонално на y, јер је

$$||\lambda x + \mu y|| = ||(\mu - \lambda, \mu)|| = \max\{|\mu - \lambda|, |\mu|\} \geq |\mu| = ||\mu y|| \, ,$$

али y није ортогоналан на x, јер за на пример $\lambda = 2\mu$ имамо

$$||\lambda x + \mu y|| = \max\{|\mu - 2\mu|, |\mu|\} = |\mu| < 2|\mu| = |\lambda| = ||\lambda x|| \, .$$

Показаћемо да нормално репрезентовани елементарни оператори, под неким условима поседују особину нормалних оператора да су језгро и слика међусобно ортогонални, у овом уопштеном смислу. Ова чињеница омогућиће нам да добијемо неке интересантне последице у идућем поглављу.

3. Теореме типа Фаглида-Патнема. (Fuglede B., Putnam R.C.) Основни резултат овог типа је позната теорема Фаглида-Патнема:

Теорема 0.1. *Ако су A и B нормални оператори и $AX = XB$, тада је $A^*X = XB^*$.*

Доказ. Из претпоставке да је $AX = XB$ лако помоћу индукције добијамо да за сваки природан број n важи $A^n X = X B^n$. Множећи затим ову једнакост са $\overline{\lambda}^n/n!$ и сумирајући од нуле до бесконачно имамо $e^{\overline{\lambda} A} X = X e^{\overline{\lambda} B}$, за све комплексне бројеве λ. Дакле важи $e^{\overline{\lambda} A} X e^{-\overline{\lambda} B} = X$. Помножимо ову једнакост са лева са $e^{-\lambda A^*}$, и са десна са $e^{\lambda B^*}$. Наравно у општем случају није истина да је $e^{\overline{\lambda} A} e^{-\lambda A^*} = e^{\overline{\lambda} A - \lambda A^*}$, али то обезбеђује комутативност оператора $\overline{\lambda} A$ и λA^*. Тако је

$$e^{2i \operatorname{Im} \overline{\lambda} A} X e^{-2i \operatorname{Im} \overline{\lambda} B} = e^{-\lambda A^*} X e^{\lambda B^*}.$$

Функција $\varphi(\lambda) = e^{-\lambda A^*} X e^{\lambda B^*}$ је аналитичка, и како су оператори $e^{2i \operatorname{Im} \overline{\lambda} A}$ и $e^{-2i \operatorname{Im} \overline{\lambda} B}$ унитарни, то важи $||\varphi(\lambda)|| \le \left|\left|e^{2i \operatorname{Im} \overline{\lambda} A}\right|\right| ||X|| \left|\left|e^{-2i \operatorname{Im} \overline{\lambda} B}\right|\right| = ||X||$, па је φ и ограничена. Према теореми Лиувила онда следи да је то константна функција. Дакле $e^{-\lambda A^*} X e^{\lambda B^*} = \varphi(0) = X$, тј. $X e^{\lambda B^*} = e^{\lambda A^*} X$. Диференцирањем и заменом $\lambda = 0$ добијамо тражену једнакост. $\square$

Доказ који је овде изложен предложио је Розенблум, па се ова теорема често назива и теорема Фаглид-Патнем-Розенблума.

Ова теорема се може схватити и на следећи начин. Ако су A и B нормални оператори, тада $\delta_{A,B}(X) = 0$ повлачи $(\delta_{A,B})^*(X) = 0$, то јест језгро нормалне деривације $\delta_{A,B}$ и њене уопштене адјунговане деривације $(\delta_{A,B})^* = \delta_{A^*,B^*}$ се поклапају. Питање које ћемо размотрити јесте уопштење ове теореме са нормалне деривације на било који нормално репрезентован елементарни оператор. Наиме, да ли из $\sum_{j=1}^n A_j X B_j = 0$ произилази $\sum_{j=1}^n A_j^* X B_j^* = 0$, под условом да су A_j и B_j комутирајуће фамилије нормалних оператора. Испоставиће се да такав резултат у општем случају није тачан, али да се под неким додатним условима ипак може доказати.

1. ДЕФИНИЦИЈЕ И ОСНОВНИ СТАВОВИ

Пре него што пређемо на излагање резултата, подсетићемо се неких важнијих дефиниција и тврђења.

Најпре ћемо дефинисати сингуларне бројеве компактног оператора. Нека је A компактан оператор и $A = UH$ његово поларно разлагање, то јест $H = (A^*A)^{1/2} \geq 0$, и U парцијална изометрија из $\overline{\operatorname{ran} A^*}$ у $\overline{\operatorname{ran} A}$. Како је H позитиван и компактан то постоји ортонормиран систем вектора φ_j такав да је $H\varphi_j = \lambda_j(H)\varphi_j$, и важи разлагање $H = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle \quad , \varphi_j \rangle \varphi_j$. Наравно претпостављамо да је низ $\{\lambda_j\}$ опадајући. Помножимо горњу једнакост са лева са U и имамо

$$A = UH = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j \langle \quad , \varphi_j \rangle U\varphi_j.$$

Како је U парцијална изометрија, то је $\psi_j = U\varphi_j$ такође ортонормиран систем. Бројеве $\lambda_j(H) = \lambda_j\left((A^*A)^{1/2}\right)$ зовемо *сингуларни бројеви* оператора A, и означавамо са $s_j(A)$. Тако се A може развити у такозвани *Шмитов развој*

$$A = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j(A) \langle \quad , \varphi_j \rangle \psi_j.$$

Сада ћемо дефинисати сингуларне бројеве произвољног ограниченог оператора. Тачку λ спектра самоадјунгованог оператора зовемо тачка есенцијалног спектра, ако је за све $\varepsilon > 0$ $E_A(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)\mathfrak{H}$ бесконачнодимензионалан подпростор од $\mathfrak{H}$. То ће се, јасно, догодити ако и само ако је λ тачка непрекидног спектра или карактеристична вредност бесконачне вишеструкости. За дати $A \in B(\mathfrak{H})$ дефинишемо број $s_\infty(A)$ као супремум есенцијалног спектра оператора $(A^*A)^{1/2}$. Узгред напоменимо да се може показати да је $s_\infty(A)$ у ствари једнак норми класе оператора A у Калкиновој алгебри $B(\mathfrak{H})/\mathfrak{S}_\infty$.

У интервалу $(s_\infty(A), +\infty)$ дакле, имамо само изоловане карактеристичне вредности коначне вишеструкости. Од тих тачака рачунајући њихову вишеструкост формираћемо опадајући низ. Ако је тај низ бесконачан, онда ћемо по дефиницији узети тај низ за низ $\{s_j(A)\}$. Уколико је пак коначан, рецимо дужине N, онда ћемо тај низ узети за $s_j(A)$, кад је $1 \leq j \leq N$, а за $j > N$ ставићемо $s_j(A) = s_\infty(A)$. У оба случаја је то опадајући низ који конвергира ка $s_\infty(A)$. У ствари оператор $B = A - s_\infty(A)I - AP$, где је $P = E_A([0, s_\infty(A)])$, је компактан и $s_j(A) = s_\infty(A) + s_j(B)$.

Наводимо особине сингуларних бројева. Доказ прве теореме је изостављен и може се наћи у [4] странице 26–28.

Теорема 1.1. *За сингуларне бројеве важи*

(*i*) $s_j(A) = s_j(A^*)$
(*ii*) $s_j(AB) \leq ||A||\, s_j(B)$
(*iii*) $s_j(AB) \leq s_j(A)\, ||B||$.

Теорема 1.2. *Нека је* $A \in B(\mathfrak{H})$ *и* $\varepsilon > 0$. *Тада постоје* $B \in B(\mathfrak{H})$ *и ортонормиран систем* $\{e_j\}$ *са особинама*
(*i*) $||B - A|| < \varepsilon$
(*ii*) B^*B *је дијагоналан*
(*iii*) $s_j(B) = s_j(A)$ *за* $j = 1, 2, \dots$
(*iv*) $B^*Be_j = s_j(A)^2 e_j$.

Доказ. Ако је A компактан можемо узети $B = A$. Зато претпоставимо да A није компактан. Конструкцију оператора B изводимо на следећи начин. Узмимо поделу $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = s_\infty(A)$ интервала $[0, s_\infty(A)]$ такву да је $\max_i(\alpha_{i+1} - \alpha_i) < \varepsilon$, и означимо $\mathfrak{H}_j = E_A([\alpha_i, \alpha_{i+1})\mathfrak{H}$ за $0 \leq j \leq n-2$, $\mathfrak{H}_{n-1} = E_A([\alpha_{n-1}, \alpha_n])\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_\infty = E_A((\alpha_n, +\infty))\mathfrak{H}$. Дефинишемо оператор P са $P|_{\mathfrak{H}_0} = 0$, $P|_{\mathfrak{H}_j} = \alpha_{j+1} I_{\mathfrak{H}_j}$ за $1 \leq j \leq n-1$, $P|_{\mathfrak{H}_\infty} = |A||_{\mathfrak{H}_\infty}$, и ставимо $B = UP$, где је U парцијална изометрија из поларног разлагања оператора A. Ако је $s_j(A) > s_\infty(A)$, онда је e_j одговарајући сопствени вектор оператора $(A^*A)^{1/2}$, а ако је $s_j(A) = s_\infty(A)$ за $j > N$ онда узмимо да је $\{e_j\}_{j=N+1}^{+\infty}$ неки ортонормиран систем из простора $\mathfrak{H}_{n-1}$. (Овај последњи случај наступа једино када је $\mathfrak{H}_\infty$ коначнодимензионалан). Доказивање особина (*i*)-(*iv*) сада је ствар рутине.

Теорема 1.3. *За било који систем вектора* $x_1, x_2, \dots, x_k$ *важи неједнакост*

$$\det\left[\langle Ax_j, Ax_k\rangle\right]_{j,k=1}^n \leq s_1(A)^2 s_2(A)^2 \dots s_n(A)^2 \det\left[\langle x_j, x_k\rangle\right]_{j,k=1}^n .$$

Доказ. Узмимо оператор B и ортонормиран систем $\{e_j\}$ из Теореме 1.2. и имамо

$$\begin{aligned}\langle Bx_j, Bx_k\rangle = \langle B^*Bx_j, x_k\rangle &= \sum_{l=1}^{+\infty} \langle B^*Bx_j, e_l\rangle \langle e_l, x_k\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{+\infty} s_l^2 \langle x_j, e_l\rangle \langle e_l, x_k\rangle ,\end{aligned}$$

то јест $[\langle Bx_j, Bx_k\rangle]_{j,k=1}^n = \mathbf{B}\mathbf{B}^*$, где је $\mathbf{B} = [s_j \langle x_k, e_j\rangle]_{k=1}^{n}\,{}_{j=1}^{+\infty}$. Сада је по Бине-Кошијевој теореми линеарне алгебре

$$\begin{aligned}\det\left[\langle Bx_j, Bx_k\rangle\right]_{j,k=1}^n = &\sum_{1\leq l_1 \leq \dots \leq l_n < +\infty} \mathbf{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix} \mathbf{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix}^* \\ \leq & s_1^2 s_2^2 \dots s_n^2 \sum_{1\leq l_1 \leq \dots \leq l_n < +\infty} \mathbf{C}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix} \mathbf{C}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix}^* \\ = & s_1^2 s_2^2 \dots s_n^2 \det\left[\langle x_j, x_k\rangle\right],\end{aligned}$$

где смо са $\mathbf{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix}$, односно $\mathbf{C}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix}$ означили оне миноре, који су добијени од $l_1, l_2, \dots, l_n$-те колоне матрице $\mathbf{B}$ односно $\mathbf{C} = [\langle x_k, e_j\rangle]_{k=1}^{n}\,{}_{j=1}^{+\infty}$.

Резултат сада следи на основу непрекидности детерминанте јер разлика $||B - A||$ може бити произвољно мала. $\square$

Теорема 1.4. (*Неједнакост Хорна*) $\prod_{j=1}^k s_j(AB) \leq \prod_{j=1}^k s_j(A) s_j(B)$ *за* $k = 1, 2, \dots$

Доказ. На основу претходне теореме имамо, за сваки ортонормиран систем $\{x_j\}$:

$$
\begin{aligned}
\det\left[\langle ABx_i, ABx_j\rangle\right]_{i,j=1}^k \leq & s_1^2(A)\dots s_k^2(A)\det\left[\langle Bx_i, Bx_j\rangle\right]_{i,j=1}^k \\
\leq & s_1^2(A)\dots s_k^2(A)s_1^2(B)\dots s_k^2(B)\det\left[\langle x_i, x_j\rangle\right]_{i,j=1}^k \\
= & s_1^2(A)\dots s_k^2(A)s_1^2(B)\dots s_k^2(B).
\end{aligned}
$$

Сада ћемо на основу Теореме 1.2. одабрати ортонормиран низ $\{x_j\}$, тако да буде испуњена неједнакост $\left|\left|(AB)^*ABx_i - s_i^2(AB)x_i\right|\right| \leq \mathrm{d}/n^2$. У том случају ће норма разлике матрица $\left[\langle ABx_i, ABx_j\rangle\right]_{i,j=1}^k$ и $\mathrm{diag}(s_i(AB))$ бити мања од d. А d ћемо одабрати тако да разлика детерминанти буде мања или једнака од неког унапред задатог броја ε. То је могуће урадити због непрекидности детерминанте. Тако ће лева страна горње неједнакости бити већа или једнака од $s_1^2(AB)\dots s_k^2(AB) - \varepsilon$. Теорема је овиме доказана јер ε може бити произвољно мало. $\square$

Сада ћемо прећи на појам унитарно инваријантне норме. Нека је $\mathfrak{J}$ неки двострани идеал у $B(\mathfrak{H})$. Норма $|||\ |||$ на $\mathfrak{J}$ је унитарно инваријантна ако једнакост $|||UAV||| = |||A|||$ важи за све унитарне операторе U и V из $B(\mathfrak{H})$, и ако је $|||A||| = ||A|| = s_1(A)$ за сваки оператор A ранга један. Испоставља се да свака унитарно инваријантна норма зависи искључиво од низа $s_j(A)$, и да има свој природан домен у виду неког двостраног идеала. (Подразумева се да је познато да нема нетривијалних двостраних идеала већих од $\mathfrak{S}_\infty$, нити мањих од идеала оператора коначног ранга). У ствари, свака унитарно инваријантна норма генерисана је неком функцијом Φ на скупу низова, са $|||A||| = \Phi(s_1(A), s_2(A), \dots)$, која задовољава особине

(i) $\Phi(s) > 0$, за $s \neq 0$
(ii) $\Phi(\alpha s) = |\alpha|\Phi(s)$
(iii) $\Phi(s+t) \leq \Phi(s) + \Phi(t)$
(iv) $\Phi(\xi_1, \xi_2, \dots) = \Phi(|\xi_{j_1}|, |\xi_{j_2}|, \dots)$ за сваку пермутацију $k \to j_k$ природних бројева
(v) $\Phi(1, 0, 0, \dots) = 1$.

И обратно, свака таква функција генерише неку унитарно инваријантну норму. Овакве функције зовемо *симетричне нормирајуће функције*, а одговарајуће идеале *симетрично нормирани идеали.*

Други услов у дефиницији унитарно инваријантне норме, који је у ствари неки услов нормализације, изједначује на операторима ранга један две основне норме, униформну и нуклеарну. *Униформна норма* дефинисана на целом $B(\mathfrak{H})$ је у ствари уобичајена операторска норма $||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = s_1(A) = \max_{j\geq 1} s_j(A)$. *Нуклеарна норма* је $||A||_1 = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j(A)$. Њен природан домен је скуп оних компактних оператора за које ред $\sum_{j=1}^{+\infty} s_j(A)$ конвергира. Тај скуп означавамо са $\mathfrak{S}_1$ и зовемо идеал *нуклеарних оператора.* Међу свим унитарно инваријантним нормама нуклеарна је највећа, а униформна најмања, то јест за произвољну унитарно инваријантну норму важи неједнакост $||X|| \leq |||X||| \leq ||X||_1$. Самим тим, униформна норма генерише најслабију, а нуклеарна најјачу топологију.

Скуп $\mathfrak{S}_1$ је важан и из других разлога. Наиме, то је максималан скуп оператора на којем је могуће дефинисати траг. Траг оператора A може бити матрични, то јест $\sum_{j=1}^{+\infty} \langle A\varphi_j, \varphi_j\rangle$, за неки ортонормиран систем $\{\varphi_j\}$, или спектрални, збир свих сопствених вредности. Основни резултат о траговима чини теорема Лидског, која тврди да је за било који нуклеаран оператор матрични траг коначан, не зависи од избора ортонормираног система и да је једнак спектралном трагу. На основу тога није тешко извести да је траг ограничен линеаран функционал на простору $\mathfrak{S}_1$, и да му је норма једнака јединици.

Између нуклеарне и униформне норме могу се интерполирати Шатенове (Schatten R.) p-норме $||A||_p = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} s_j(A)^p\right)^{1/p}$ чији је природни домен $\mathfrak{S}_p = \{A \in \mathfrak{S}_\infty \,|\, ||A||_p < +\infty\}$. Међу $\mathfrak{S}_p$ идеалима посебно је интересантан $\mathfrak{S}_2$ идеал Хилберт-Шмитових оператора, јер се он може на природан начин снабдети скаларним производом. Наиме за A, $B \in \mathfrak{S}_2$ оператор AB^* припада $\mathfrak{S}_1$, па дефиниција $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$ има смисла. Норма која извире из овако дефинисаног скаларног производа је управо Шатенова 2-норма. Сасвим очекиван резултат јесте дуалност између $\mathfrak{S}_p$ и

$\mathfrak{S}_q$ $(1/p+1/q=1)$. Сваки функционал $\varphi \in \mathfrak{S}_p^*$ једнозначно је генерисан неким оператором $Y \in \mathfrak{S}_q$ на следећи начин, $\varphi(X) = \mathrm{tr}(XY)$. При томе важи $||\varphi||_{\mathfrak{S}_p^*} = ||Y||_{\mathfrak{S}_q}$. Помоћу исте једнакости остварује се изоморфизам између $\mathfrak{S}_1^*$ и $B(\mathfrak{H})$.

Други вид интерполације између нуклеарне и униформне норме чине такозване Ки Фанове (Fan Ky) норме $||A||_{(k)} = \sum_{j=1}^{k} s_j(A)$. За њихов домен може се узети било $\mathfrak{S}_\infty$, било $B(\mathfrak{H})$. Значај ових норми огледа се у следећем правилу, које је познато под именом *доминационо својство Ки Фана*.

Теорема 1.5. *Да би неједнакост $|||A||| \leq |||B|||$ важила за сваку унитарно инваријантну норму неопходно је и довољно да је $||A||_{(k)} \leq ||B||_{(k)}$ за $k = 1, 2, \ldots$*

Доказ ове теореме могуће је пронаћи у [4], страница 82.

2. ОЦЕНЕ НОРМЕ

Нека су $A_j,\ B_j \in B(\mathfrak{H})$. Посматрајмо оператор $E(X) = \sum_{j=1}^n A_j X B_j$. У случају $E: B(\mathfrak{H}) \to B(\mathfrak{H})$ имамо $||E(X)|| \le \left(\sum_{j=1}^n ||A_j||\,||B_j||\right)||X||$, то јест, као оператор на алгебри $B(\mathfrak{H})$ E је увек ограничен. Уколико је слика оператора E садржана у неком симетричном нормирајућем идеалу $\mathfrak{J}$ тада је оператор E посматран као оператор чији је домен $B(\mathfrak{H})$, а кодомен $\mathfrak{J}$, такође увек ограничен. Ово се може показати помоћу теореме о затвореном графику. Наиме, ако $(X_n, E(X_n)) \to (X, Y)$ у $B(\mathfrak{H}) \times \mathfrak{J}$, тада $||X_n - X|| \to 0$, али и $||E(X_n) - Y|| \le \|E(X_n) - Y\|_{\mathfrak{J}} \to 0$, одакле следи да $E(X_n)$ тежи ка Y у простору $B(\mathfrak{H})$. Међутим због ограничености оператора E (као оператора који пресликава $B(\mathfrak{H})$ у $B(\mathfrak{H})$) $E(X_n)$ тежи, у истом простору, и ка $E(X)$. Зато је $Y = E(X)$. Тако оператор E има затворен график, и како му је домен Банахов простор, то је он ограничен.

Дакле, уколико докажемо да оператор E има слику која је садржана у неком идеалу $\mathfrak{J}$, тада је он аутоматски ограничен (посматран као оператор из $B(\mathfrak{H})$ у $\mathfrak{J}$). Наравно питање оцене норме таквог оператора није тиме решено. Почећемо од једног специјалног случаја, тачније од такозваног елементарног множитеља $M_{A,B}(X) = AXB$. Резултат који наводимо доказали су Фиалков (Fialkow L.) и Лебл (Loebl R.) у раду [3].

Теорема 2.1. *Нека је $\mathfrak{J}$ неки симетрично нормирани идеал, и нека је Φ одговарајућа симетрична нормирајућа функција. Тада је $\operatorname{ran} M_{A,B} \subset \mathfrak{J}$ ако и само ако је $\Phi(s(A) \circ s(B)) < \infty$, и још је $\Phi(s(A) \circ s(B)) = ||M_{A,B}||_{B(\mathfrak{H}) \to \mathfrak{J}}$.*

Доказ. Докажимо прво смер "ако". Позната Хорнова неједнакост (Теорема 1.4.) $\prod_{j=1}^n s_j(AB) \le \prod_{j=1}^n s_j(A)s_j(B)$ после логаритмовања постаје $\sum_{j=1}^n \log s_j(AB) \le \sum_{j=1}^n \log s_j(A)s_j(B)$. Одавде се онда, како је exp конвексна функција која тежи нули када x тежи ка минус бесконачно добија $\sum_{j=1}^n s_j(AB) \le \sum_{j=1}^n s_j(A)s_j(B)$ (видети Лему II3.4. у [4]). На тај начин, користећи Теорему 1.1. имамо $\sum_{j=1}^n s_j(AXB) \le \sum_{j=1}^n s_j(A)s_j(XB) \le \sum_{j=1}^n s_j(A)s_j(B)\,||X||$. Проласком кроз ову неједнакост функцијом Φ добићемо $\|AXB\|_{\mathfrak{J}} = \Phi(s_j(AXB)) \le \Phi(s_j(A) \circ s_j(B))\,||X||$. Тако $AXB \in \mathfrak{J}$ и $||M_{A,B}||_{B(\mathfrak{H}) \to \mathfrak{J}} \le \Phi(s_j(A) \circ s_j(B))$.

Докажимо сада супротну неједнакост. Тиме ћемо у ствари доказати други "само ако" део тврђења, јер ако је $\operatorname{ran} M_{A,B} \subset \mathfrak{J}$, тада је, како смо показали $||M_{A,B}||_{B(\mathfrak{H}) \to \mathfrak{J}} < \infty$. Раздвојимо два случаја.

(i) Претпоставимо да можемо одабрати ортонормиране системе $\{e_j\}$ и $\{f_j\}$ такве да је $|A|e_j = s_j(A)e_j$ и $|B|f_j = s_j(B)f_j$, где су $A = U|A|$ и $B = V|B|$ поларне декомпозиције оператора A и B. (То се сигурно може урадити уколико су оба оператора A и B компактна.) Нека је W парцијална изометрија таква да је $Wf_j = e_j$ (и тиме одмах $W^* e_j = f_j$). Оператор $T = W^* U^* M_{A,B}(WV^*)P \in \mathfrak{J}$, где је $P = P_{\mathrm{span}(f_j)}$ ортопројектор на простор разапет векторима f_j. Међутим $Tf_j = W^*U^*AWV^*BPf_j = W^*|A|W|B|f_j = s_j(A)s_j(B)f_j$, а то значи да је оператор T позитиван, да су му вектори f_j сопствени вектори, и најзад да је $s_j(T) = s_j(A)s_j(B)$. Одавде произилази да је $\Phi(s_j(A) \circ s_j(B)) < \infty$ и да је $\Phi(s_j(A) \circ s_j(B)) = \|T\|_{\mathfrak{J}} \le \|AWV^*B\|_{\mathfrak{J}} \le ||M_{A,B}||_{B(\mathfrak{H})\to\mathfrak{J}} ||WV^*|| = ||M_{A,B}||_{B(\mathfrak{H})\to\mathfrak{J}}$. Тиме је доказ у овом случају завршен.

(ii) Претпоставимо сада да не можемо, као у (i), одабрати погодне ортонормиране системе. Тада бар један од оператора A, B, на пример B није компактан. Докажимо најпре да постоји бесконачнодимензионалан подпростор $\mathcal{M}$ и константа $\gamma > 0$ таква да је $||Bx|| \ge \gamma ||x||$, за све $x \in \mathcal{M}$. У том циљу претпоставимо супротно, да је за све $m \in \mathbf{N}$, скуп вектора $x \in \mathfrak{H}$ таквих да је $||Bx|| \ge (1/m)\,||x||$, означимо га са K_m, коначног ранга. Узмимо сада произвољан низ $\{x_n\}$ који слабо конвергира ка нули, и који нема јако конвергентан подниз. Доказаћемо да $\{Bx_n\}$ јако тежи ка нули. Заиста у K_n налази се само коначно много чланова низа $\{x_n\}$, јер би у противном, због локалне компактности коначнодимензионалних простора, и ограничености слабо конвергентног низа, следило да $\{x_n\}$ има јако конвергентан подниз. Зато је за скоро све чланове низа $\{x_n\}$, $||Bx_n|| < (1/m)\,||x_n|| \le (1/m)M$, одакле једноставно излази да $||Bx_n|| \to 0$, па је B компактан супротно претпоставци.

$B(\mathcal{M})$ је очигледно затворен, па постоји парцијална изометрија V која слика $B(\mathcal{M})$ *на* $\mathfrak{H}$. Оператор VB је онда сурјективан, и тиме инвертибилан са десна, то јест постоји оператор C, који је на основу теореме о отвореном пресликавању ограничен, такав да је $VBC = I$. Одавде је $A = AVBC \in \mathfrak{J}$. Јасно, сада $\Phi\left(s_j(A) \circ s_j(B)\right) \le ||B||\,\Phi\left(s_j(A)\right) < +\infty$. На основу Теореме 1.2. уочимо низ оператора $\{B_k\}$ и низ ортонормираних система $\{e_n^{(k)}\}_1^{+\infty}$ тако да $||B_k - B|| \to 0$, $B_k^*B_ke_n^{(k)} = s_n(B)^2e_n^{(k)}$, $s_n(B_k) = s_n(B)$ и $|B_k|$ је дијагоналан. Оператор $|A|$ је већ дијагоналан јер је $A \in \mathfrak{J} \subset \mathfrak{S}_\infty$. На основу претходног случаја је сада слика оператора M_{A,B_k} садржана у $\mathfrak{J}$, и важи неједнакост

$$||M_{A,B_k}||_{B(\mathfrak{H})\to\mathfrak{J}} \ge \Phi\left(s_j(A) \circ s_j(B_k)\right) = \Phi\left(s_j(A) \circ s_j(B)\right).$$

Резултат сада следи ако пустимо да k тежи ка бесконачно јер је

$$||M_{A,B_k} - M_{A,B}|| = \sup_{||X||=1} \|AX(B_k - B)\|_{\mathfrak{J}} \le \|A\|_{\mathfrak{J}}\,||B_k - B||.$$

Доказ је завршен. $\square$

У неким ситуацијама, што ћемо видети касније, општи случај се може пренети на овај посебан, који је до краја решен. Међутим генерално то није могуће, што показује следећи контрапример, који су навели Фиалков и Лебл [3].

Пример 2.1. Нека су $M = \operatorname{diag}(1/\sqrt{n})_{n=1}^{+\infty}$ и $N = \operatorname{diag}(1/n)_{n=1}^{+\infty}$ компактни позитивни оператори, и нека је даље

$$A_1 = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} -N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}.$$

Ако ставимо

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

тада кратак рачун показује да је

$$A_1XB_1 = \begin{bmatrix} MX_{11}N & MX_{12}M \\ NX_{21}N & NX_{22}M \end{bmatrix}; \quad A_2XB_2 = \begin{bmatrix} MX_{11}N & -MX_{12}M \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$E(X) = A_1XB_1 + A_2XB_2 = \begin{bmatrix} 2MX_{11}N & 0 \\ NX_{21}N & NX_{22}M \end{bmatrix}.$$

Сада се није тешко уверити да $E(X) \in \mathfrak{S}_1$ за свако X (сви блокови у матричном представљању јесу нуклеарни према претходној теореми), док сабирци A_1XB_1 и A_2XB_2 не припадају идеалу

$\mathfrak{S}_1$ за поједине X-ове, на пример за $X = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тако се проблем инклузије $E(X) \subset \mathfrak{J}$ не може свести са збира $\sum_{j=1}^{n} A_j X B_j$ на сабирке $A_j X B_j \in \mathfrak{J}$ за свако j. $\square$

Интересантно је да оператор E из овог примера може бити реализован и на други начин: $E(X) = A_1' X B_1' + A_2' X B_2'$, где су

$$A_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad B_1' = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \quad A_2' = \begin{bmatrix} 2M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_2' = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

при чему су оба сабирка $A_1' X B_1'$, $A_2' X B_2' \in \mathfrak{S}_1$. Питање које су поставили Фиалков и Лебл гласи: да ли за сваки елементарни оператор $E : B(\mathfrak{H}) \to \mathfrak{J}$ постоје оператори A_j' и B_j' такви да је $E(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j' X B_j'$, и да $A_j' X B_j' \in \mathfrak{J}$ за све j између 1 и n? Аутору није познато да ли је овај проблем решен.

Директна последица Теореме 2.1. јесте следећа оцена.

Последица 2.1. *Нека су $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{B_j\}_{j=1}^{\infty}$ низови ограничених оператори такви да ред $\sum_{j=1}^{\infty} \Phi(s_k(A_j) \circ s_k(B_j))$ конвергира. Тада је оператор $E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j X B_j$ ограничен, посматран као оператор који пресликава $B(\mathfrak{H})$ у $\mathfrak{J}$, и при томе је $||E|| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(s_k(A_j) \circ s_k(B_j))$*

Доказ. Конвергенција реда $\sum_{j=1}^{+\infty} \Phi\left(s_k(A_j) \circ s_k(B_j)\right)$ означава у ствари апсолутну конвергенцију реда $\sum_{j=1}^{+\infty} M_{A_j, B_j}$ у Банаховом простору $B(B(\mathfrak{H}), \mathfrak{J})$, који онда конвергира и обично то јест по норми простора $B(B(\mathfrak{H}), \mathfrak{J})$. Тим пре он конвергира у тачки $X \in B(\mathfrak{H})$. Последња неједнакост је онда неједнакост троугла у простору $B(B(\mathfrak{H}), \mathfrak{J})$. $\square$

Сада ћемо прећи са елементарног множитеља на општи случај елементарног оператора, из једног другог правца. У том циљу за фамилију оператора $\{A_j\}$ увешћемо следеће ознаке,

$$A = \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j^* A_j \right)^{1/2} \quad ; \quad A_* = \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j^* A_j \right)^{1/2}, \tag{1}$$

под условом да редови слабо конвергирају, или јако што је еквивалентно са обзиром на то да су му чланови позитивни. Почећемо са једном релативно једноставном лемом о "дељењу" оператора.

Лема 2.1. *Уколико редови* (1) *конвергирају онда постоје (једнозначно одређени) оператори A_j', A_j'' такви да је $A_j = A_* A_j'' = A_j' A$, и да важи $\sum_{j=1}^{\infty} A_j'^* A_j' = P_{\overline{\operatorname{ran} A}}$; $\sum_{j=1}^{\infty} A_j'' A_j''^* = P_{\overline{\operatorname{ran} A_*}}$*

Доказ. Како важи неједнакост $||Ax||^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} A_j^* A_j x, x \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} ||A_j x||^2$, то закључујемо да за све j важи $||A_j x|| \leq ||Ax||$. Нека је h вектор из $\overline{\operatorname{ran} A}$. Тада постоји низ вектора $\{x_n\}$ такав да $\{Ax_n\}$ тежи ка h. Низ $\{Ax_n\}$ је онда Кошијев, а на основу неједнакости $||A_j x_n - A_j x_m|| \leq ||Ax_n - Ax_m||$ закључујемо да је и низ $\{A_j x_n\}$ такође Кошијев, за свако j. Ставимо $A_j' h = \lim_{n \to +\infty} A_j x_n$, и покажимо да та вредност не зависи од избора низа $\{x_n\}$. Заиста, ако су низови $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ такви да $Ax_n \to h$ и $Ay_n \to h$, тада је $||A_j x_n - A_j y_n|| \leq ||Ax_n - Ay_n|| \to 0$. На $\left(\overline{\operatorname{ran} A}\right)^{\perp}$ дефинишемо оператор A_j' нулом.

Покажимо сада једнакост $A_j' A = A_j$. Ако је $x \in \ker A$, тада је $A_j' A x = 0$ и $A_j x = 0$ (због $||A_j x|| \leq ||Ax||$). Ако је, пак $x \in \overline{\operatorname{ran} A}$ тада је $Ax \in \operatorname{ran} A$, и јасно можемо узети константан низ $x_n = x$ у дефиницији оператора A_j', па је $A_j' A x = A_j x$, чиме смо показали да је $A_j' A = A_j$. Остало је још да докажемо да је $\sum_{j=1}^{\infty} A_j'^* A_j' = P_{\overline{\operatorname{ran} A}}$. Прост рачун показује да је $A \left(\sum_{j=1}^{+\infty} A_j'^* A_j' \right) A = \sum_{j=1}^{+\infty} A_j^* A_j = A^2$, одакле следи да је $\sum_{j=1}^{+\infty} A_j'^* A_j' x = x$ за $x \in \operatorname{ran} A$, а даље на основу непрекидности и за $x \in \overline{\operatorname{ran} A}$. За $x \in \ker A = (\operatorname{ran} A)^{\perp}$ је по дефиницији $\sum_{j=1}^{+\infty} A_j'^* A_j' x = 0$. Тако је $\sum_{j=1}^{+\infty} A_j'^* A_j' = P_{\overline{\operatorname{ran} A}}$.

Операторе A_j'' заједно са наведеним особинама добијамо примењујући претходно доказани део тврђења на операторе A_j^* уместо A_j. $\square$

Помоћу ове Леме (Јоцић [5]) могуће је доказати следеће интересантно тврђење, одакле ћемо извести једну другу оцену норме елементарних оператора.

Теорема 2.2. *Ако редови*

$$A_* = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} A_j A_j^*\right)^{1/2} \quad ; \quad B = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} B_j^* B_j\right)^{1/2}$$

конвергирају, онда за све $X \in B(\mathfrak{H})$ *постоји* $W \in B(\mathfrak{H})$ *такав да је* $\sum_{j=1}^{\infty} A_j X B_j = A_* W B$, *при чему је* $||W|| \leq ||X||$.

Доказ. Имамо $\sum_{j=1}^{\infty} A_j X B_j = \sum_{j=1}^{\infty} A_* A_j'' X B_j' B = A_* \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j'' X B_j'\right) B$. За W ћемо узети оператор $\sum_{j=1}^{\infty} A_j'' X B_j'$ и доказаћемо да је $||W|| \leq ||X||$. За јединичне векторе f и g важи

$$\begin{aligned}
|\langle Wf, g\rangle| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle A_j'' X B_j' f, g\right\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle X B_j' f, A_j''^* g\right\rangle\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} ||X|| \left|\left|B_j' f\right|\right| \left|\left|A_j''^* g\right|\right| \\
&\leq ||X|| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left|B_j' f\right|\right|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left|A_j''^* g\right|\right|^2\right)^{1/2} \\
&= ||X|| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle B_j'^* B_j' f, f\right\rangle\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle A_j'' A_j''^* g, g\right\rangle\right)^{1/2} \\
&= ||X|| \left\langle P_{\overline{\operatorname{ran} B}} f, f\right\rangle^{1/2} \left\langle P_{\overline{\operatorname{ran} A_*}} g, g\right\rangle^{1/2} \leq ||X|| .
\end{aligned}$$

Кроз ову неједнакост прођемо супремумом по свим f и g чија је норма једнака 1, и завршили смо доказ. $\square$

Комбинујући Теорему 2.1. и Теорему 2.2. добијамо следећу последицу.

Последица 2.2. *Уколико је* $\Phi(s_j(A_*) \circ s_j(B)) < +\infty$ *тада је* $\sum_{j=1}^{+\infty} A_j X B_j \in \mathfrak{J}_\Phi$ *за све* $X \in B(\mathfrak{H})$, *а за норму таквог пресликавања важи оцена*

$$\left|\left|\left|\sum_{j=1}^{\infty} A_j X B_j\right|\right|\right|_{\mathfrak{J}} \leq \Phi(s_j(A_*) \circ s_j(B))\, ||X|| ,$$

то јест

$$||E||_{B(\mathfrak{H}) \to \mathfrak{J}} \leq \Phi\left(s_j \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j A_j^*\right)^{1/2} \circ s_j \left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j^* B_j\right)^{1/2}\right).$$

У случају да је $A_j = B_j^*$ *једнакост се може достићи.*

Доказ. $\left\|\sum_{j=1}^{\infty} A_j X B_j\right\|_{\mathfrak{J}} = \|A_* W B\| \leq \Phi(s_j(A_*) \circ s_j(B)) \, ||W|| \leq \Phi(s_j(A_*) \circ s_j(B)) \, ||X|| < \infty$. У случају да је $B_j = A_j^*$ биће, најпре $B = A_*$, и тада узимајући $X = I$ имамо $\|E(I)\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} A_j A_j^*\right\| = \Phi\left(s_j(A_*^2)\right) = \Phi\left(s_j(A_*) \circ s_j(B)\right)$. $\square$

Напомена 2.1. Резултат Последице 2.2. може се, у специјалном случају када је $X = I$ наћи и у [2], Теорема $IX5.11$. Додуше доказ је ту изведен само у коначнодимензионалном случају. Још један алтернативни доказ Последице 2.2. може се извести на следећи начин. Посматрамо операторе $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{X}$ на простору $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}$ дефинисане са

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ B_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_n & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X \end{bmatrix}.$$

Лако се проверава да важи $s_k(\mathbf{A}) = s_k(A_*)$, $s_k(\mathbf{B}) = s_k(B)$, $||\mathbf{X}|| = ||X||$, као и да је

$$\mathbf{AXB} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Одатле лако изводимо низ неједнакости

$$\sum_{k=1}^{N} s_k\left(\sum_{j=1}^{n} A_j X B_j\right) = \sum_{k=1}^{N} s_k(\mathbf{AXB}) \leq \sum_{k=1}^{N} s_k(\mathbf{A}) s_k(\mathbf{X}) s_k(\mathbf{B}) \leq \sum_{k=1}^{N} s_k(A_*) s_k(B) \, ||X|| \, ,$$

на основу којих можемо да изведемо закључак Последице 2.2. користећи Ки Фаново доминационо својство.

Напомена 2.2. Мада је оцена норме из Последице 2.2. у појединим ситуацијама тачна (то јест важи једнакост), у другим је опет грубо непрецизна. Наиме посматрајући самоадјунговане операторе A_1', A_2', B_1', B_2' из Примера 2.1. констатујемо да је $\Phi\left(s_j\left(\sqrt{A_1'^2 + A_2'^2}\right) \circ s_j\left(\sqrt{B_1'^2 + B_2'^2}\right)\right) = \infty$, док је $\Phi\left(s_j(A_1') \circ s_j(B_1')\right) + \Phi\left(s_j(A_2') \circ s_j(B_2')\right) < \infty$, где је за Φ узета функција која дефинише $\mathfrak{S}_1$, то јест $\Phi\left(s_j(A)\right) = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j(A)$. Тако у овом случају смисленију оцену даје Последица 2.1. него Последица 2.2. Разлог за овако нешто састоји се у томе што суме облика $\sum_{j=1}^{\infty} A_j A_j^*$, односно $\sum_{j=1}^{\infty} B_j^* B_j$ "не виде" скраћивања.

Извешћемо и једну оцену норме елементарног оператора, чији је домен $\mathfrak{S}_p$, а кодомен произвољан симетрично нормиран идеал $\mathfrak{J}$. Пре него што је формулишемо навешћемо, без доказа, две леме. Прва од њих је, у ствари, Теорема $IV1.6.$ из [2], а друга је Теорема 2.1. из [5].

Лема 2.2. *(Уопштена Хелдерова неједнакост) Нека је Φ произвољна симетрична нормирајућа функција, и $\{x_j\}$ и $\{y_j\}$ произвољни позитивни опадајући низови. Тада је*

$$\Phi(x_j \circ y_j) \leq \Phi(x_j^p)^{1/p} \Phi(y_j^q)^{1/q},$$

при чему је $1/p + 1/q = 1$.

Лема 2.3. *За произвољне ограничене операторе X, A_n, B_n $(n = 1, 2, \dots)$ важи неједнакост*

$$\left\|\sum_{n=1}^{+\infty} A_n X B_n\right\|_p \leq \tag{2}$$

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^* \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n A_n^* \right)^{p-1} A_n \right)^{1/2p} X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} B_n \left(\sum_{n=1}^{+\infty} B_n^* B_n \right)^{p-1} B_n^* \right)^{1/2p} \right\|_p .$$

На основу ове две леме могуће је доказати следећу теорему.

Теорема 2.3. *За норму оператора* $E : \mathfrak{S}_p \to \mathfrak{J}$ *датог са* $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n X B_n$, *где су* A_n *и* B_n *фиксирани оператори из* $B(\mathfrak{H})$, *важи оцена*

$$||E||_{\mathfrak{S}_p \to \mathfrak{J}} \leq \left\| A^{1/p} \right\| \left\| B_*^{1/p} \right\| \Phi(s_k(A_*) \circ s_k(B))^{1/q},$$

где Φ *означава симетричну нормирајућу функцију која генерише норму* $|| \quad ||_{\mathfrak{J}}$, *и где бројеви* p *и* q *задовољавају релацију* $1/p + 1/q = 1$.

Доказ. У доказу користимо ознаке из Леме 2.1. Имамо

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} A_n X B_n \right\|_{\mathfrak{J}} = & \left\| A_*^{1-1/p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_*^{1/p} A_n'' X B_n' B^{1/p} \right) B^{1-1/p} \right\|_{\mathfrak{J}} \\
= & \Phi \left(s_k \left(A_*^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_*^{1/p} A_n'' X B_n' B^{1/p} \right) B^{1/q} \right) \right) \\
\leq & \Phi \left(s_k \left(A_*^{1/q} \right) \circ s_k \left(B^{1/q} \right) \circ s_k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_*^{1/p} A_n'' X B_n' B^{1/p} \right) \right) \\
\leq & \Phi \left(s_k \left(A_*^{1/q} \right)^q \circ s_k \left(B^{1/q} \right)^q \right)^{1/q} \Phi \left(s_k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_*^{1/p} A_n'' X B_n' B^{1/p} \right)^p \right)^{1/p} \\
\leq & \Phi \left(s_k(A_*) \circ s_k(B) \right)^{1/q} \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} A_*^{1/p} A_n'' X B_n' B^{1/p} \right\|_p .
\end{aligned}$$

При извођењу ових неједнакости користили смо редом, неједнакост Хорна комбиновану са Ки Фановим доминационим својством, затим уопштену Хелдерову неједнакост, и најзад чињеницу да је увек $\Phi(x_j) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} x_j$. Међутим имајући у виду (2) важи

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} A_*^{1/p} A_n'' X B_n' B^{1/p} \right\|_p \leq$$

$$\leq \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n''^* A_*^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_*^{1/p} A_n'' A_n''^* A_*^{1/p} \right)^{p-1} A_*^{1/p} A_n'' \right)^{1/2p} X \right.$$
$$\left. \left(\sum_{n=1}^{+\infty} B_n' B^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} B^{1/p} B_n'^* B_n' B^{1/p} \right)^{p-1} B^{1/p} B_n'^* \right)^{1/2p} \right\|_p$$
$$= \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n''^* A_*^{1/p} \left(A_*^{2/p} \right)^{p-1} A_*^{1/p} A_n'' \right)^{1/2p} X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} B_n' B^{1/p} \left(B^{2/p} \right)^{p-1} B^{1/p} B_n'^* \right)^{1/2p} \right\|_p$$
$$= \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n''^* A_* A_* A_n'' \right)^{1/2p} X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} B_n' B B B_n'^* \right)^{1/2p} \right\|_p$$
$$= \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^* A_n \right)^{1/2p} X \left(\sum_{n=1}^{+\infty} B_n B_n^* \right)^{1/2p} \right\|_p$$
$$= \left\| A^{1/p} X B_*^{1/p} \right\|_p \leq \left\| A^{1/p} \right\| \left\| B_*^{1/p} \right\| \left\| X \right\|_p .$$

Одатле имамо $\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} A_n X B_n \right\|_{\mathfrak{J}} \leq \Phi(s_k(A_*) \circ s_k(B))^{1/q} \left\| A^{1/p} \right\| \left\| B_*^{1/p} \right\| \left\| X \right\|_p$, то јест $\left\| E \right\|_{\mathfrak{S}_p \to \mathfrak{J}} \leq \Phi(s_k(A_*) \circ s_k(B))^{1/q} \left\| A^{1/p} \right\| \left\| B_*^{1/p} \right\|$. Теорема је доказана. $\square$

Сада ћемо се бавити оператором $E(X) = \sum A_j X B_j$ посматраним као $E : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$. Уколико је сума коначна, онда увек из претпоставке да $X \in \mathfrak{J}$ следи $E(X) \in \mathfrak{J}$, и такав оператор је увек ограничен. Наиме важи $\left\| \sum_{j=1}^{N} A_j X B_j \right\| \leq \left(\sum_{j=1}^{N} \|A_j\| \, \|B_j\| \right) \|X\|$. Наравно, исти закључак важи и у случају бесконачне суме под условом да ред $\sum \|A_j\| \, \|B_j\|$ конвергира. Ми ћемо покушати да добијемо бољу оцену изражену помоћу оператора

$$A = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} A_j^* A_j \right)^{1/2} \qquad B_* = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} B_j B_j^* \right)^{1/2} . \tag{3}$$

Конвергенција редова који дефинишу операторе A и B_* је у неку руку природна. То можемо видети на следећи начин. Најмање што можемо да тражимо јесте да ред $\sum_{j=1}^{+\infty} A_j X B_j$ конвергира по норми идеала $\mathfrak{J}$ (а то ће рећи да E јако конвергира) за најједноставније операторе, то јест за операторе ранга један. Међутим за $X = \langle \quad , f \rangle g$ имамо

$$\left\| \sum_{j=N+1}^{M} A_j X B_j \right\| = \left\| \sum_{j=N+1}^{M} A_j \langle \quad , f \rangle g B_j \right\| = \left\| \sum_{j=N+1}^{M} \left\langle \quad , B_j^* f \right\rangle A_j g \right\| \tag{4}$$
$$\leq \sum_{j=N+1}^{M} \left\| B_j^* f \right\| \left\| A_j g \right\| \leq \left(\sum_{j=N+1}^{M} \left\| B_j^* f \right\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=N+1}^{M} \left\| A_j g \right\|^2 \right)^{1/2}$$
$$= \left(\sum_{j=N+1}^{M} \left\langle B_j B_j^* f, f \right\rangle \right)^{1/2} \left(\sum_{j=N+1}^{M} \left\langle A_j^* A_j g, g \right\rangle \right)^{1/2} ,$$

па ће низ парцијалних сума реда $\sum_{j=1}^{+\infty} A_j \langle \quad, f\rangle gB_j$ бити Кошијев под претпоставком да редови (3) слабо конвергирају.

Али пре тога покажимо пар интерполационих резултата. Познато је да се све унитарно инваријантне норме налазе између униформне (најмање) и нуклеарне (највеће). Ову чињеницу, применићемо у следећој интерполационој теореми, чији доказ преносимо из Јоцићевог рада [6].

Теорема 2.4. *Ако за неку константу K и све $X \in B(\mathfrak{H})$ важи*

$$\left\|\sum_{j=1}^{N} A_j X B_j\right\|_1 \leq K\left\|X\right\|_1, \text{и} \quad \left\|\sum_{j=1}^{N} A_j X B_j\right\| \leq K\left\|X\right\|,$$

онда и за сваку унитарно инваријантну норму, и све $X \in B(\mathfrak{H})$ важи

$$\left\|\left|\sum_{j=1}^{N} A_j X B_j\right|\right\| \leq K\left\|\left|X\right|\right\|. \tag{5}$$

Доказ. Због Ки Фановог доминационог својства, довољно је неједнакост (5) доказати само у случају Ки Фанових норми. Нека је X произвољан компактан оператор и $X = \sum_{j=1}^{+\infty} s_j(X) \langle \quad, e_j\rangle f_j$ његов Шмитов развој. За $k \geq 2$ уведимо операторе Z и V са $Z = \sum_{j=1}^{k-1} (s_j(X) - s_{j+1}(X)) \left(\sum_{i=1}^{j} \langle \quad, e_i\rangle f_i\right)$, $V = s_k(X) \sum_{j=1}^{k} \langle \quad, e_j\rangle f_j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} s_j(X) \langle \quad, e_j\rangle f_j$, и имаћемо

$$\begin{aligned}
Z + V =& \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{j} (s_j(X) - s_{j+1}(X)) \langle \quad, e_i\rangle f_i + s_k(X) \sum_{j=1}^{k} \langle \quad, e_j\rangle f_j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} s_j(X) \langle \quad, e_j\rangle f_j \\
=& \sum_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{j=i}^{k-1} s_j(X) - s_{j+1}(X)\right) \langle \quad, e_i\rangle f_i + s_k(X) \sum_{j=1}^{k} \langle \quad, e_j\rangle f_j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} s_j(X) \langle \quad, e_j\rangle f_j \\
=& \sum_{i=1}^{k-1} (s_i(X) - s_k(X)) \langle \quad, e_i\rangle f_i + s_k(X) \sum_{j=1}^{k} \langle \quad, e_j\rangle f_j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} s_j(X) \langle \quad, e_j\rangle f_j \\
=& \sum_{j=1}^{k} (s_j(X) - s_k(X) + s_k(X)) \langle \quad, e_j\rangle f_j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} s_j(X) \langle \quad, e_j\rangle f_j \\
=& X.
\end{aligned}$$

По дефиницији оператора Z и V је $s_1(V) = s_2(V) = \ldots s_k(V) = s_k(X)$ и $s_j(V) = s_j(X)$ за $j \geq k$ и $s_i(Z) = \sum_{i=j}^{k-1} (s_j(X) - s_{j+1}(X))$, па имамо

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{n=1}^{N} A_n X B_n\right|\right|_{(k)} \leq& \left|\left|\sum_{n=1}^{N} A_n Z B_n\right|\right|_{(k)} + \left|\left|\sum_{n=1}^{N} A_n V B_n\right|\right|_{(k)} \\
\leq& K\,||Z||_{(k)} + k\left|\left|\sum_{n=1}^{N} A_n V B_n\right|\right|_{\infty} \\
\leq& K\,||Z||_1 + kK\,||V||_{\infty} \\
\leq& K\left(\sum_{j=1}^{k-1}(s_j(X)-s_{j+1}(X))\sum_{i=1}^{j}||\langle\quad,e_i\rangle\, f_i||_1 + ks_k(X)\right) \\
\leq& K\left(\sum_{j=1}^{k-1} j\,(s_j(X)-s_{j+1}(X)) + ks_k(X)\right) \\
=& K\sum_{j=1}^{k} s_j(X) = K\,||X||_{(k)}\,,
\end{aligned}
$$

што је и требало доказати. □

Користећи дуалност између $\mathfrak{S}_1$ и $B(\mathfrak{H})$ у ствари можемо све оцене извести из оцене за униформну норму.

Лема 2.4. *Ако за неку константу K и све $X \in B(\mathfrak{H})$ важи*

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{N} A_j X B_j\right|\right|_{\infty} \leq K\,||X||_{\infty}\,,$$

тада за све $X \in B(\mathfrak{H})$, и за исто K важи

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{N} B_j X A_j\right|\right|_{1} \leq K\,||X||_{1}\,.$$

Доказ. Ако $X \notin \mathfrak{S}_1$ немамо шта да доказујемо, па зато претпоставимо $X \in \mathfrak{S}_1$. У том случају је $\sum_{j=1}^{N} B_j X A_j \in \mathfrak{S}_1$. За $Y \in B(\mathfrak{H})$ означимо са φ_Y одговарајући функционал из $\mathfrak{S}_1^*$, и биће

$$
\begin{aligned}
\left|\varphi_Y\left(\sum_{j=1}^{N} B_j X A_j\right)\right| &= \left|\mathrm{tr}\left(\sum_{j=1}^{N} B_j X A_j Y^*\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{N}\mathrm{tr}(B_j X A_j Y^*)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{N}\mathrm{tr}(X A_j Y^* B_j)\right| = \left|\mathrm{tr}\left(X\sum_{j=1}^{N} A_j Y^* B_j\right)\right| \\
&\leq ||X||_1\left|\left|\sum_{j=1}^{N} A_j Y^* B_j\right|\right|_{\infty} \leq ||X||_1\,K\,||Y^*|| \\
&= ||X||_1\,K\,||\varphi_Y||\,.
\end{aligned}
$$

Узмимо сада у горњој неједнакости супремум по свим $\varphi_Y \in \mathfrak{S}_1^*$ чија је норма мања или једнака од један и добијамо тврђење леме. □

Користећи познати резултат за униформну норму, сада смо у могућности да докажемо следећу оцену за било коју унитарно инваријантну норму.

Теорема 2.5. *Претпоставимо да редови*

$$A = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} A_j^* A_j\right)^{1/2}; \quad A_* = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} A_j A_j^*\right)^{1/2};$$

$$B = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} B_j^* B_j\right)^{1/2}; \quad B_* = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} B_j B_j^*\right)^{1/2} \tag{6}$$

слабо конвергирају. Тада $X \in \mathfrak{J}$ повлачи $\sum_{j=1}^{+\infty} A_j X B_j \in \mathfrak{J}$, и важи неједнакост

$$\left|\!\left|\!\left| \sum_{j=1}^{+\infty} A_j X B_j \right|\!\right|\!\right| \le \max\{||A_*||\, ||B||\,, ||A||\, ||B_*||\}\, |||X|||\,. \tag{7}$$

Доказ. Ставимо $M = \max\{||A_*||\, ||B||\,, ||A||\, ||B_*||\}$. Ако у Последици 2.2. узмемо да је $\Phi = \max$, функција која генерише униформну норму, добијамо неједнакост

$$\left|\left| \sum_{j=1}^{N} A_j X B_j \right|\right| \le \left|\left| \left(\sum_{j=1}^{N} A_j A_j^*\right)^{1/2} \right|\right| \left|\left| \left(\sum_{j=1}^{N} B_j^* B_j\right)^{1/2} \right|\right| ||X|| \le ||A_*||\, ||B||\, ||X|| \le M\, ||X||\,,$$

а одавде према Леми 2.4.

$$\left|\left| \sum_{j=1}^{N} A_j X B_j \right|\right|_1 \le \left|\left| \left(\sum_{j=1}^{N} B_j B_j^*\right)^{1/2} \right|\right| \left|\left| \left(\sum_{j=1}^{N} A_j^* A_j\right)^{1/2} \right|\right|_1 ||X||_1 \le ||A||\, ||B_*||\, ||X||_1 \le M\, ||X||_1\,.$$

Према Теореми 2.4. онда и у свакој унитарно инваријантној норми важи неједнакост

$$\left|\!\left|\!\left| \sum_{j=1}^{N} A_j X B_j \right|\!\right|\!\right| \le M\, |||X|||\,. \tag{8}$$

Пређимо сада на бесконачне суме. Слаба конвергенција редова (6) у ствари значи да за све $f \in \mathfrak{H}$ редови $\sum_{j=1}^{+\infty} ||A_j f||^2$; $\sum_{j=1}^{+\infty} \left|\left|A_j^* f\right|\right|^2$; $\sum_{j=1}^{+\infty} ||B_j f||^2$; $\sum_{j=1}^{+\infty} \left|\left|B_j^* f\right|\right|^2$ конвергирају. Низ оператора $E_N : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$, дат са $E_N(X) = \sum_{j=1}^{N} A_j X B_j$ има ограничен низ норми јер је због (8) $||E_N||_{\mathfrak{J}\to\mathfrak{J}} \le M$ за све N. Даље за $X = \langle \quad , f\rangle\, g$ (произвољан оператор ранга један), низ $E_N(X)$ је Кошијев на основу неједнакости (4). Сада можемо према принципу конвергенције закључити да низ E_N јако конвергира ка оператору E (тј. да ред $\sum_{j=1}^{+\infty} A_j X B_j$ конвергира по норми идеала $\mathfrak{J}$), додуше само уколико је скуп оператора коначног ранга свуда густ у $\mathfrak{J}$. Међутим то је довољно, јер су баш такви идеали $\mathfrak{S}_\infty^{(k)}$, компактних оператора снабдевени Ки Фановом нормом. Тако је неједнакост (7) тачна на основу Ки Фановог доминационог својства. $\Box$

Напомена 2.3. Уколико су сви оператори A_j, B_j нормални, у том случају је $A = A_*$, $B = B_*$, па неједнакост (7) поприма једноставнији облик $\left|\!\left|\!\left|\sum_{j=1}^{+\infty} A_j X B_j\right|\!\right|\!\right| \le ||A||\, ||B||\, |||X|||$ за сваку унитарно инваријантну норму. Пожељно би било да побољшамо оцену (7) доказујући неједнакост

$$
\left|\left|\sum_{j=1}^{+\infty} A_j X B_j\right|\right|_{\infty} \leq ||A||\,||B_*||\,||X||\,, \tag{9}
$$

што би онда користећи Лему 2.4. и Теорему 2.4. заменило max са min у оцени (7). Нажалост, тако нешто није могуће, то јест некомутативност оператора A_j, A_j^* односно B_j, B_j^* је есенцијална. Да је заиста тако увериће нас следећи пример.

Пример 2.2. Нека је $e_0, e_1, e_2, \ldots$ произвољан ортонормиран систем у $\mathfrak{H}$, и нека је $A_j = \xi_j \langle \quad, e_j\rangle e_0$, $B_j = \xi_j \langle \quad, e_0\rangle e_j$, $X = I$, $Y = \langle \quad, e_0\rangle e_0$. Низ ξ_j ћемо одабрати тако да број $c = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j^2\right)^{1/2}$ буде коначан.

У том случају је $A_j^* = \xi_j \langle \quad, e_0\rangle e_j$, и $B_j^* = \xi_j \langle \quad, e_j\rangle e_0$, што се лако да проверити, и према томе

$$
A = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} A_j^* A_j\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \langle \quad, e_0\rangle e_j \xi_j \langle \quad, e_j\rangle e_0\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j^2 \langle \quad, e_j\rangle e_j\right)^{1/2} = B_*
$$

$$
B = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} B_j^* B_j\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \langle \quad, e_j\rangle e_0 \xi_j \langle \quad, e_0\rangle e_j\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j^2 \langle \quad, e_0\rangle e_0\right)^{1/2}
$$

$$
= c \langle \quad, e_0\rangle e_0 = A_*
$$

$$
\sum_{j=1}^{+\infty} A_j X B_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \langle \quad, e_j\rangle e_0 \xi_j \langle \quad, e_0\rangle e_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j^2 \langle \quad, e_0\rangle e_0 = c^2 \langle \quad, e_0\rangle e_0.
$$

Тако би неједнакост (9) у овом случају постала $c^2 \leq \xi_1^2$, што је нетачно. Сличним путем можемо добити да је $\left|\left|\sum_{j=1}^{+\infty} B_j Y A_j\right|\right|_1 = \left|\left|\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j^2 \langle \quad, e_i\rangle e_i\right|\right|_1 = c^2$, док је $||B_*||\,||A||\,||Y||_1 = \xi_1^2$. И више од тога, никаква константа већа од јединице не може да "извади ствар" у неједнакости (9), јер однос бројева c^2 и ξ_1^2 може бити произвољно велики.

3. ГЕОМЕТРИЈСКА СВОЈСТВА

Задржаћемо се на два геометријска својства елементарних оператора. Прво је ортогоналност слике и језгра, коју поједини нормално репрезентовани елементарни оператори наслеђују од нормалних оператора. Друго својство је, у ствари, нумеричка карактеристика, такозвани успон оператора E у ознаци $\operatorname{asc} E$. Успон јесте најмањи природан број n такав да је $\ker E^n = \ker E^{n+1}$. Уколико таквог природног броја нема кажемо да је успон оператора E бесконачан. Јасно, ако је $\operatorname{asc} E = 0$, онда је $\ker E = \ker I = \{0\}$, па је такав оператор 1-1. Ако је $\operatorname{asc} E = 1$ онда слика и језгро таквог оператора имају тривијалан пресек. Заиста, из $Y \in \operatorname{ran} E \cap \ker E$ следи $Y = E(X)$, за неко X и $E(Y) = 0$, то јест $E(E(X)) = 0$. Одавде је $X \in \ker E^2 = \ker E$, па је $Y = E(X) = 0$.

Први резултат у овом правцу припада Андерсону (Anderson J.) [1], и односи се на нормалне деривације.

Теорема 3.1. *Ако је оператор T изометрија или нормалан, онда из $TS = ST$ произилази $||TX - XT + S|| \geq ||S||$.*

Доказ ове теореме извешћемо у неколико корака, а биће нам потребна и једна лема.

Лема 3.1. *Нека су $P_1, P_2, \ldots, P_n$ међусобно ортогонални ортопројектори (у ствари битно је једино да важи $P_iP_j = \mathrm{d}_{ij}P_i$), и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ n-торке различитих, не нула, комплексних бројева, $Q_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$ и $Q_2 = \sum_{i=1}^n \mu_i P_i$. Тада се слике пресликавања $\Delta_{Q_1}(X) = Q_1X - XQ_1$ и $\Delta_{Q_2}(X) = Q_2X - XQ_2$ поклапају.*

Доказ. Ставимо $P_0 = I - \sum_{j=1}^n P_j$. Лако проверавамо да важи $P_0^2 = P_0$, и $P_0P_j = P_jP_0 = 0$ за $j > 0$. Ако узмемо $\lambda_0 = \mu_0 = 0$, тада имамо $Q_1 = \sum_{j=0}^n \lambda_j P_j$ и $Q_2 = \sum_{j=0}^n \mu_j P_j$ и онда важи

$$\begin{aligned}\Delta_{Q_1}(X) = Q_1XI - IXQ_1 &= \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i P_i\right) X \left(\sum_{j=0}^n P_j\right) - \left(\sum_{i=0}^n P_i\right) X \left(\sum_{j=0}^n \lambda_j P_j\right)\\ &= \sum_{i,j=0}^n (\lambda_i - \lambda_j) P_i X P_j,\end{aligned}$$

и слично

$$\Delta_{Q_2}(X) = \sum_{i,j=0}^n (\mu_i - \mu_j) P_i X P_j$$

Одавде следи тврђење, јер је $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, $\mu_i - \mu_j \neq 0$ за $i \neq j$. $\square$

Доказ Теореме 3.1. Нека је најпре T изометрија. Ако је $ST = TS$ лако се проверава да важи

$$-nT^{n-1}S = T^nX - XT^n - \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-1-i}(TX - XT + S)T^i.$$

Ако узмемо норму леве и десне стране добијамо

$$\begin{aligned} n\,||S|| = n\,\left|\left|T^{n-1}S\right|\right| =& \left|\left|T^nX - XT^n - \sum_{i=0}^{n-1} T^{n-1-i}(TX - XT + S)T^i\right|\right| \\ \leq& \,||T^nX|| + ||XT^n|| + \sum_{i=0}^{n-1} \left|\left|T^{n-1}(TX - XT + S)T^i\right|\right| \\ \leq& 2\,||X|| + n\,||TX - XT + S||\,, \end{aligned}$$

то јест

$$||S|| \leq \frac{2}{n}\,||X|| + ||TX - XT + S||\,.$$

Преласком на лимес када n тежи ка бесконачно, добијамо тражену неједнакост.

Нека је сада T самоадјунгован оператор и $U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$ његова Кејлијева трансформација. Познато је ([12] страна 101) да је U унитаран оператор, чији спектар не садржи тачку 1 (и према томе изометричан), и да је $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$, као и да оператори T и U комутирају. Рачунамо:

$$\begin{aligned} \Delta_T(X) =&(T - iI)X - X(T - iI) = U(T + iI)X - X(T + iI)U \\ =&U(T + iI)X - (T + iI)XU + (T + iI)XU - X(T + iI)U \\ =&\Delta_U((T + iI)X) + \Delta_T(XU), \end{aligned}$$

то јест

$$\Delta_T(X(I - U)) = \Delta_U((T + iI)X).$$

Како су оба оператора $I - U$, и $T + iI$ инвертибилна, закључујемо да оператори Δ_T и Δ_U имају исту слику. Међутим имају и исто језгро, јер како се могу написати један као функција од другог, то из $TS = ST$ следи $US = SU$ и обрнуто. Сада резултат следи на основу претходног случаја.

Нека је сада T нормалан оператор. Према спектралној теореми T се може представити као униформни лимес оператора облика $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(\mathrm{d}_i)$, где су сви λ_i различити и d_i дисјунктни подскупови спектра оператора T. Због тога је довољно доказати неједнакост

$$\left|\left|\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(\mathrm{d}_i)\right)X - X\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(\mathrm{d}_i)\right) + S\right|\right| \geq ||S||\,.$$

Међутим због Леме 3.1. скаларе λ_i могуће је заменити неким различитим реалним бројевима μ_i, а $ST = TS$ повлачи да S комутира са свим спектралним пројекторима, то јест са свим $E(\mathrm{d}_i)$. Резултат сада следи јер је оператор $\sum_{i=1}^{n} \mu_i E(\mathrm{d}_i)$ самоадјунгован. $\square$

Претходна теорема Андерсона означава да је слика оператора $\Delta_T : B(\mathfrak{H}) \to B(\mathfrak{H})$ датог са $\Delta_T(X) = TX - XT$, ортогонална на његово језгро, у смислу дефиниције дате у уводу. Ову теорему је уопштио Китанех [8] (Kittaneh F.), посматрајући операторе $\Delta_T : \mathfrak{J} \to \mathfrak{J}$. Другим речима Китанех је униформну норму у теореми Андерсона заменио произвољном унитарно инваријантном нормом.

Теорема 3.2. *Нека је T нормалан оператор и $TS = ST$. Тада $TX - XT + S \in \mathfrak{J}$ повлачи $\|TX - XT + S\| \geq \|S\|$ у свакој унитарно инваријантној норми. Другим речима,* $\operatorname{ran}\Delta_T$ *је ортогонални на* $\ker \Delta_T$ *у сваком симетричном нормирајућем идеалу* $\mathfrak{J}$.

Доказ. Размотримо најпре случај, када се спектар оператора T састоји само од сопствених вредности. Сопствени подпростори нормалног оператора су међусобно ортогонални и разапињу читав простор, па је према томе $\mathfrak{H} = \oplus_{i=1}^{+\infty} \ker(T - \lambda_i I)$. У таквој декомпозицији представимо операторе T, S и X матрицама:

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 I & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 I & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots \\ S_{21} & S_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots \\ X_{21} & X_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Из претпоставке да је $TS = ST$ произилази да сопствени подпростори оператора T разлажу S, а то ће рећи да је $S_{ij} = 0$ за $i \neq j$. Даље простим рачуном добијамо

$$TX - XT + S = \begin{bmatrix} S_{11} & & * \\ & S_{22} & \\ * & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Сада користећи Теорему III4.2. из [4] о "пинчинг" оператору имамо:

$$\|TX - XT + S\| = \left\| \begin{bmatrix} S_{11} & & * \\ & S_{22} & \\ * & & \ddots \end{bmatrix} \right\| \geq \left\| \begin{bmatrix} S_{11} & & 0 \\ & S_{22} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} \right\| = \|S\|.$$

Размотримо сада општи случај. Нека је $\mathfrak{H}_1 = \oplus_{j=1}^{+\infty} \ker(T - \lambda_j I)$, где су λ_j различите сопствене вредности оператора T и $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$. У односу на разлагање $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, представимо операторе T, S и X операторним два пута два матрицама:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}.$$

С обзиром да је $TS = ST$, потпростор $\mathfrak{H}_1$ је инваријантан за S, а по теореми Фаглида-Патнема је и $TS^* = S^*T$, па је $\mathfrak{H}_1$ инваријантан и за S^*, то јест $\mathfrak{H}_1$ разлаже S. Тако је $S_{12} = 0$ и $S_{21} = 0$. Доказаћемо да је S_{22} такође једнако нули. У ту сврху послужиће нам резултат који каже да је свака C^*-алгебра изоморфна некој подалгебри алгебре ограничених линеарних оператора на неком Хилбертовом простору.

Из претпоставке да је $\Delta_T(X) + S \in \mathfrak{S}_\infty$ произилази да је у ствари $\Delta_T(X) + S = 0$ у познатој Калкиновој C^*-алгебри $B(\mathfrak{H})/\mathfrak{S}_\infty$. Када применимо Теорему 3.1. на $B(\mathfrak{H})/\mathfrak{S}_\infty$, као подалгебру од $B(\hat{\mathfrak{H}})$ добијамо $S = 0$ у $B(\mathfrak{H})/\mathfrak{S}_\infty$, то јест $S \in \mathfrak{S}_\infty$, па је тиме и $S_{22} = P_{\mathfrak{H}_2} S P_{\mathfrak{H}_2} \in \mathfrak{S}_\infty$. Како је $T_2 S_{22}^* S_{22} = S_{22}^* S_{22} T_2$ и T_2 нема не нула сопствених вредности, нема их ни $S_{22}^* S_{22}$. Значи $S_{22}^* S_{22}$ је компактан самоадјунгован оператор који нема не нула сопствених вредности, а једини такав је 0. Дакле $S_{22}^* S_{22} = 0$, то јест $S_{22} = 0$.

Сада се доказ једноставно завршава, јер користећи доказан специјалан случај имамо:

$$\|TX - XT + S\| = \left\| \begin{bmatrix} T_1 X_{11} - X_{11} T_1 + S_{11} & * \\ * & * \end{bmatrix} \right\| \geq \|T_1 X_{11} - X_{11} T_1 + S_{11}\| \geq \|S_{11}\| = \|S\|,$$

чиме је теорема у потпуности доказана. $\square$

Ова теорема, дакле, уопштава теорему Андерсона, тако што проширује класу норми. Следећих неколико теорема (Кечкић [7]) проширује класу оператора.

Теорема 3.3. *Нека су A и B комутирајући нормални оператори, такви да је $A^*A + B^*B > 0$ (то јест $\ker A \cap \ker B = \{0\}$). Тада уколико је $ASB = BSA$, онда је*

$$\|AXB - BXA + S\| \geq \|S\|,$$

у свакој унитарно инваријантној норми. Другим речима слика оператора $E(X) = AXB - BXA$ ортогонална је на његово језгро.

Доказ. Доказ ћемо спровести у три корака.

(i) Нека је прво B инвертибилан, то јест $B \in B(\mathfrak{H})$. Тада $ASB = BSA$ и $AB = BA$ повлаче $AB^{-1}S = SAB^{-1}$, и имамо према Теореми 3.2., примењеној на операторе AB^{-1}, S, BXB

$$\|AXB - BXA + S\| = \left\|AB^{-1}(BXB) - (BXB)AB^{-1} + S\right\| \geq \|S\|.$$

(ii) Нека је сада B "$1-1$" оператор. Нека је $\Delta_n = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| \leq 1/n\}$ и $P_n = I - E_B(\Delta_n)$, где је $E_B(\Delta_n)$ одговарајући спектрални пројектор. Низ P_n је, јасно, растући низ пројектора, и он јако конвергира ка пројектору на минимални подпростор, који садржи слике свих пројектора P_n, а то ће рећи ка $I - E_B(\{0\})$, што је у ствари I, због тога што је B "$1-1$". Тиме низ оператора P_nSP_n јако (а довољно је и слабо) конвергира ка S. Како A и B комутирају и при томе су нормални, то $P_n\mathfrak{H}$ разлаже A. Тако, у односу на разлагање $\mathfrak{H} = P_n\mathfrak{H} \oplus (I - P_n)\mathfrak{H}$ имамо

$$B = \begin{bmatrix} B_1^{(n)} & 0 \\ 0 & B_2^{(n)} \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} A_1^{(n)} & 0 \\ 0 & A_2^{(n)} \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

при чему је $B_1^{(n)}$ инвертибилан, што се лако види, јер му спектар не садржи диск Δ_n. Сада је према претходном случају

$$\|AXB - BXA + S\| \geq \|P_n(AXB - BXA + S)P_n\| = \\ \left\|A_1^{(n)}X_{11}B_1^{(n)} - B_1^{(n)}X_{11}A_1^{(n)} + S_{11}\right\| \geq \|S_{11}\| = \|P_nSP_n\|.$$

Узимајући супремум имамо $\sup_n \|P_nSP_n\| < +\infty$, и $P_nSP_n \to S$, слабо, па се према Леми III5.1. из [4] закључује да $S \in \mathfrak{J}$, и $\|S\| \leq \sup_n \|P_nSP_n\| \leq \|AXB - BXA + S\|$.

(iii) Најзад, нека је $\ker B \cap \ker A = \{0\}$. Разложимо простор $\mathfrak{H}$ на ортогоналну суму $\ker B \oplus (\ker B)^{\perp}$. Нормалност оператора A и B и $AB = BA$ обезбеђују да они имају следеће блок-матрице у односу на ово разлагање

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}; \qquad A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix},$$

при чему су оператори B_1 и A_0 $1-1$, а са обзиром на нормалност и слике су им густе. Ако ставимо

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}; \qquad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

онда рачун показује да је

$$AXB - BXA = \begin{bmatrix} 0 & A_0X_{12}B_1 \\ -B_1X_{21}A_0 & A_1X_{22}B_1 - B_1X_{22}A_1 \end{bmatrix},$$

а иста структура важи и за $ASB - BSA$, па ако је $ASB = BSA$, тада је $A_0S_{12}B_1 = 0$, $-B_1S_{21}A_0 = 0$, одакле је $S_{12} = 0$, $S_{21} = 0$, и $A_1S_{22}B_1 = B_1S_{22}A_1$. Сада на основу теореме о "пинчинг" оператору

$$\|AXB - BXA + S\| = \left\|\begin{bmatrix} S_{11} & A_0X_{12}B_1 \\ -B_1X_{21}A_0 & A_1X_{22}B_1 - B_1X_{22}A_1 + S_{22} \end{bmatrix}\right\| \\ \geq \left\|\begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & A_1X_{22}B_1 - B_1X_{22}A_1 \end{bmatrix}\right\|.$$

Да бисмо сада завршили доказ на основу претходног случаја, довољно је доказати да из $\|X\| \leq \|Y\|$ за сваку унитарно инваријантну норму произилази $\|X \oplus Z\| \leq \|Y \oplus Z\|$ за сваку унитарно инваријантну норму, а то је тачно, јер за Ки Фанове норме имамо

$$||X \oplus Z||_{(n)} = ||X||_{(k)} + ||Z||_{(n-k)} \leq ||Y||_{(k)} + ||Z||_{(n-k)} \leq ||Y \oplus Z||_{(n)} .$$

Овиме је доказ завршен. $\square$

Услов $\ker A \cap \ker B = \{0\}$ је од есенцијалног значаја, што показује следећи пример.

Пример 3.1. Нека су α, β, γ реални бројеви, $\alpha > 0$, и оператори A, B, X, S дефинисани на Хилбертовом простору $\mathbf{C}^4$ матрицама

$$B^* = A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & -\gamma \\ 1 & 1 & -\gamma & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Лако се израчунава да је $ASB - BSA = ASA^* - A^*SA = 0$, и да је

$$Q = AXB - BXA + S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \gamma & -\gamma \\ 1 & 1 & -\gamma & \gamma \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix};$$

$$S^*S = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2\gamma^2 + \alpha^2 & -2\gamma^2 \\ -2\gamma^2 & 2\gamma^2 + \alpha^2 \end{bmatrix}; \quad Q^*Q = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 & 2\alpha\beta - 2\gamma^2 \\ 2\alpha\beta - 2\gamma^2 & 2\gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix}.$$

Тако су карактеристичне вредности $\lambda_j(S^*S)$ нуле полинома$((\lambda-2)^2-4)((\lambda-2\gamma^2-\alpha^2)^2-4\gamma^4) = \lambda(\lambda-4)(\lambda-\alpha^2-4\gamma^2)(\lambda-\alpha^2)$, док су карактеристичне вредности $\lambda_j(Q^*Q)$ нуле полинома $((\lambda-2)^2-4)((\lambda-2\gamma^2-\alpha^2-\beta^2)-(2\alpha\beta-2\gamma^2)^2) = \lambda(\lambda-4)(\lambda-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2)(\lambda-4\gamma^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)$. Како за сваки оператор T вреди $s_j(T) = \lambda_j(T^*T)^{1/2}$ то закључујемо да се низ $s_j(S)$ састоји од бројева 0, 2, α, $\sqrt{\alpha^2+4\gamma^2}$, а низ $s_j(AXB - BXA + S)$ од бројева 0, 2, $|\alpha+\beta|$, $\sqrt{4\gamma^2+(\alpha-\beta)^2}$.

Сада за $\beta = 1/2\,\alpha$, $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha \geq 4/3$ налазимо

$$\frac{||AXB - BXA + S||}{||S||} = \frac{3\alpha/2}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1,$$

а за $\beta = -\alpha$, $\gamma = \alpha\sqrt{2}$

$$\frac{||AXB - BXA + S||_1}{||S||_1} = \frac{2 + \alpha 2\sqrt{3}}{2 + 4\alpha} \to \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 \quad (\text{кад } \alpha \to \infty).$$

Дакле, неједнакост $||AXB - BXA + S|| \geq ||S||$ у општем случају, не може се постићи, ни у униформној, ни у нуклеарној норми.

Међутим, могуће је добити сличну, али нешто слабију неједнакост, која такође може да се искористи.

Теорема 3.4. *Нека су A и B нормални оператори, такви да је $AB = BA$, и $S \in B(\mathfrak{H})$ такав да је $ASB = BSA$. Тада је*

(i) $\|AXB - BXA + S\| \geq (1/3)\,\|S\|$ *у свакој унитарно инваријантној норми;*

(ii) $||AXB - BXA + S||_p \geq 2^{-|1-2/p|}\,||S||_p$*;*

(iii) У Хилберт-Шмитовој норми је $||AXB - BXA + S||_2^2 = ||AXB - BXA||_2^2 + ||S||_2^2$.

За доказ ове теореме биће нам потребне две једноставне леме. Друга од њих је преузета из рада [9].

Лема 3.2.
а) Ако за потпросторе X, Y неког Банаховог простора важи $||x+y|| \geq ||y||$, за све $x \in X$, $y \in Y$, онда за све $x \in X$, $y \in Y$ важи $||x+y|| \geq (1/2)\,||x||$;
б) Ако за потпросторе X, Y неког Банаховог простора важи $||x+y|| \geq (1/2)\,||x||$, за све $x \in X$, $y \in Y$, онда за све $x \in X$, $y \in Y$ важи $||x+y|| \geq (1/3)\,||y||$.

Доказ. Имамо $||x|| = ||x+y-y|| \leq ||x+y|| + ||y|| \leq 2\,||x+y||$, и исто тако $||y|| = ||y+x-x|| \leq ||y+x|| + ||x|| \leq 3\,||y+x||$. $\square$

Лема 3.3. *Ако неки компактан оператор има матрично представљање $T = [T_{ij}]_{i,j=1}^{2}$ у односу на неко ортогонално разлагање Хилбертовог простора $\mathfrak{H}$, онда важе неједнакости:*
а) $2^{p-2}\sum_{i,j=1}^{2} ||T_{i,j}||_p^p \leq ||T||_p^p \leq \sum_{i,j=1}^{2} ||T_{i,j}||_p^p$, за $1 \leq p \leq 2$;
б) $\sum_{i,j=1}^{2} ||T_{i,j}||_p^p \leq ||T||_p^p \leq 2^{p-2}\sum_{i,j=1}^{2} ||T_{i,j}||_p^p$, за $2 \leq p$.

Доказ. Познате Кларксон-МекКартијеве неједнакости гласе

$$2^{p-1}(||R||_p^p + ||S||_p^p) \leq ||R+S||_p^p + ||R-S||_p^p \leq ||R||_p^p + ||S||_p^p, \quad \text{за } 1 \leq p \leq 2,$$

односно

$$||R||_p^p + ||S||_p^p \leq ||R+S||_p^p + ||R-S||_p^p \leq 2^{p-1}(||R||_p^p + ||S||_p^p), \quad \text{за } 2 \leq p.$$

Нека је сада унитаран оператор U задат са $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$. У том случају је $UTU^* = \begin{bmatrix} T_{11} & -T_{12} \\ -T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$, па се лако проверава да је $||T||_p^p = ||UTU^*||_p^p$, $||T+UTU^*||_p^p = 2^p(||T_{11}||_p^p + ||T_{22}||_p^p)$, $||T-UTU^*||_p^p = 2^p(||T_{12}||_p^p + ||T_{21}||_p^p)$, и сада резултат лако следи, ако у Кларксон-МекКартијеве неједнакости ставимо $R = T$, $S = UTU^*$. $\square$

Доказ Теореме 3.4. Нека је $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$; $\mathfrak{H}_1 = \ker A \cap \ker B$; $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1^{\perp}$, и нека су

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

одговарајуће матричне репрезентације. У простору $\mathfrak{H}_2$ је $\ker A_2 \cap \ker B_2 = \{0\}$. Примењујући Лему 3.2. и Теорему 3.3. имамо

$$\begin{aligned} |||AXB - BXA + S||| = &\left|\left|\left| \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22} \end{bmatrix} \right|\right|\right| \geq \\ \geq &\,|||A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22}||| \geq \\ \geq &(1/2)\,|||A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2||| = (1/2)\,|||AXB - BXA|||\,. \end{aligned}$$

Још једна примена Леме 3.2. доказује тачку (i).

Да бисмо доказали тачку (ii) почињемо истим низом неједнакости и примењујемо Лему 3.3. два пута и Теорему 3.3. За $1 \leq p \leq 2$ је:

$$\begin{aligned} ||AXB - BXA + S||_p^p = &\left|\left| \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22} \end{bmatrix} \right|\right|_p^p \geq \\ \geq &2^{p-2}\left(||S_{11}||_p^p + ||S_{12}||_p^p + ||S_{21}||_p^p + ||A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22}||_p^p \right) \geq \\ \geq &2^{p-2}\left(||S_{11}||_p^p + ||S_{12}||_p^p + ||S_{21}||_p^p + ||S_{22}||_p^p \right) \geq 2^{p-2}\,||S||_p^p\,, \end{aligned}$$

а за $2 \leq p < +\infty$ је

$$||AXB - BXA + S||_p^p = \left|\left|\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22}\end{bmatrix}\right|\right|_p^p \geq$$
$$\geq ||S_{11}||_p^p + ||S_{12}||_p^p + ||S_{21}||_p^p + ||A_2X_{22}B_2 - B_2X_{22}A_2 + S_{22}||_p^p \geq$$
$$\geq ||S_{11}||_p^p + ||S_{12}||_p^p + ||S_{21}||_p^p + ||S_{22}||_p^p \geq 2^{2-p}\, ||S||_p^p.$$

Према томе $||AXB - BXA + S||_p^p \geq 2^{-|2-p|}\, ||S||_p^p$, што је еквивалентно са (ii). Ако је $p = 2$, онда (ii) постаје $||E(X) + S||_2 \geq ||S||_2$, што повлачи (iii) (видети коментар после Дефиниције 0.1.) □

Теорема која следи, и која је лака последица претходне две, уопштава теорему Андерсона на нормално репрезентоване елементарне операторе дужине два, то јест на пресликавања облика $E(X) = AXB + CXD$, где су A, B, C, D нормални оператори такви да је $AC = CA$ и $BD = DB$. Даље уопштење оваквих теорема на операторе веће дужине, како ће се видети касније, није могуће.

Теорема 3.5. *Ако су A, B, C, D нормални оператори такви да је $AC = CA$, $BD = DB$, $E(X) = AXB + CXD$, и $E(S) = 0$, тада је*
(a) $|||E(X) + S||| \geq (1/3)\, |||S|||$
(b) $||E(X) + S||_p \geq 2^{-|1-2/p|}\, ||S||_p$
(c) $||E(X) + S||_2^2 = ||E(X)||_2^2 + ||S||_2^2$
(d) *Неједнакост $|||E(X) + S||| \geq |||S|||$ важи под додатном претпоставком да је $A^*A + C^*C > 0$ и $B^*B + D^*D > 0$, то јест* $\ker A \cap \ker C = \ker B \cap \ker D = \{0\}$

Доказ. Посматрајмо операторе

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D\end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} -C & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}; \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} 0 & S \\ 0 & 0\end{bmatrix}; \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

на Хилбертовом простору $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$. Лако видимо да је

$$\tilde{A}\tilde{X}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{X}\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & AXB + CXD \\ 0 & 0\end{bmatrix}; \quad \tilde{A}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{A} = \begin{bmatrix} CA - AC & 0 \\ 0 & DB - BD\end{bmatrix},$$

па услови $AC = CA$, $BD = DB$ повлаче $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$, а $E(S) = 0$ повлачи $\tilde{A}\tilde{S}\tilde{B} - \tilde{B}\tilde{S}\tilde{A} = 0$. Сада је довољно применити Теорему 3.4. да би добили тврђења (a), (b) и (c), и Теорему 3.3. да бисмо добили тврђење (d). □

Са претходних пет теорема показали смо да у одређеном смислу нормално репрезентовани елементарни оператори дужине два, задржавају особину нормалних оператора да је слика ортогонална на језгро. Друга особина нормалних оператора, која употпуњује претходну јесте чињеница да слика и језгро увек разапињу читав простор. Поставља се питање да ли се и та особина може пренети на нормално репрезентоване елементарне операторе. Међутим, испоставља се, како је показао Андерсон [1], да већ у најједноставнијем случају, то јест у случају нормалне деривације, тако нешто важи само под веома специјалним околностима, тачније ако је спектар оператора T коначан.

Теорема 3.6. *Нека је T нормалан оператор и $\Delta_T(X) = TX - XT$. Важи $B(\mathfrak{H}) = \overline{\operatorname{ran}\Delta_T} \oplus \ker \Delta_T$ ако и само ако T има коначан спектар.*

Доказ. Нека је најпре T ортопројектор, то јест $T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ у односу на неку ортогоналну декомпозицију простора $\mathfrak{H}$. Тада је

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X & 0 \\ Z & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & Y \\ -Z & 0\end{bmatrix},$$

и јасно $\ker \Delta_T = \{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} | X \in B(\mathfrak{H}_1), W \in B(\mathfrak{H}_2) \}$, па је јасно да је $B(\mathfrak{H}) = \overline{\operatorname{ran} \Delta_T} \oplus \ker \Delta_T$.

Ако је T нормалан оператор, чији је спектар коначан тада је $T = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$, где су P_i узајамно ортогонални ортопројектори. У том случају је у односу на разлагање $\mathfrak{H} = \oplus_{i=1}^n (P_i \mathfrak{H}) \oplus \mathfrak{H}_0$ ($\mathfrak{H}_0 = (\oplus_{i=1}^n P_i \mathfrak{H})^\perp$)

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_n & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Даљи ток доказа се одвија исто као и малопре, уз незнатно сложенији рачун.

Докажимо други део тврђења, то јест претпоставимо да T има бесконачан спектар. Конструисаћемо изометричан оператор V који ће бити ортогоналан и на слику и на језгро оператора Δ_T. У том циљу разликујемо два случаја.

1. T има само коначно много сопствених вредности. Нека је P_0 ортопројектор на затварање линеарног омотача свих сопствених вектора, и нека је $T' = (I - P_0)T(I - P_0)$. Спектар $\sigma(T')$ је, како лако видимо, бесконачан и не садржи сопствене вредности, па можемо одабрати Кошијев низ $\lambda_n \in \sigma(T') \backslash \sigma_p(T)$ различитих бројева. Нека је даље $r_n = \inf_{n \neq m} |\lambda_n - \lambda_m| > 0$, и $\delta_n = D(\lambda_n; r_n/3)$. Дискови δ_n су међусобно дисјунктни, па су према томе одговарајући спектрални пројектори $E_n = E_T(\delta_n)$ међусобно ортогонални. Јасно $\dim E_n \mathfrak{H} = +\infty$. Нека је $U_n : E_n \mathfrak{H} \to E_{n+1} \mathfrak{H}$ неки унитаран оператор ($\mathfrak{H}$ је сепарабилан). Дефинишемо сада изометрију V на следећи начин. За $x \in E_n \mathfrak{H}$ ставимо $Vx = U_n x$, и продужимо по линеарности на $\oplus_n E_n \mathfrak{H}$, а за $x \in (\oplus_n E_n \mathfrak{H})^\perp$ ставимо $Vx = x$.

2. Нека T има бесконачно много сопствених вредности. Низ свих сопствених вредности је наравно ограничен и има конвергентан подниз, означимо га са λ_n, а са x_n означимо низ одговарајућих јединичних сопствених вектора, то јест вектора таквих да је $Tx_n = \lambda_n x_n$. Нека је $\mathfrak{H}_n = \operatorname{span} x_n$, $E_n = P_{\mathfrak{H}_n}$, $\mathfrak{H}_0 = (\oplus \mathfrak{H}_n)^\perp$. Дефинишемо изометрију V са $Vx_n = x_{n+1}$, и $Vx = x$ за $x \in \mathfrak{H}_0$. Бројеви r_n задржавају исто значење као и у претходном случају.

Када смо конструисали изометрију V прелазимо на рачун, који је у оба случаја исти. Узмимо $\alpha = ||V - \Delta_T(X) - S||$, где S комутира са T, а самим тим и са свим спектралним пројекторима. Специјално $E_{n+1} S E_n = S E_{n+1} E_n = 0$, одакле имамо

$$\alpha = ||E_{n+1}|| \, ||V - \Delta_T(X) - S|| \, ||E_n|| \geq ||E_{n+1} V E_n - E_{n+1} \Delta_T(X) E_n|| ,$$

то јест

$$\begin{aligned} 1 - \alpha \leq 1 - ||TE_{n+1}XE_n - E_{n+1}XE_nT - E_{n+1}VE_n|| \leq \\ \leq 1 - |1 - ||TE_{n+1}XE_n - E_{n+1}XE_nT|| \, | = \\ = ||TE_{n+1}XE_n - E_{n+1}XE_nT|| \leq \\ \leq ||TE_{n+1}XE_n - \lambda_{n+1}E_{n+1}XE_n|| + \\ ||\lambda_{n+1}E_{n+1}XE_n - \lambda_n E_{n+1}XE_n|| + ||\lambda_n E_{n+1}XE_n - E_{n+1}XE_nT|| \leq \\ \leq \frac{r_{n+1}}{3} ||E_{n+1}XE_n|| + |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \, ||E_{n+1}XE_n|| + \frac{r_n}{3} ||E_{n+1}XE_n|| \leq \\ \left(\frac{r_{n+1} + r_n}{3} + |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \right) ||X|| \to 0 \text{ кад } n \to \infty \end{aligned}$$

па је $\alpha \geq 1$, то јест $||V - \Delta_T(X) - S|| \geq 1 = ||V||$. Тако је за било које S и X, оператор $\Delta_T(X) + S$ ортогоналан на V. Ово је крај доказа. $\square$

Напомена 3.1. Било би занимљиво проверити да ли се може добити резултат $\overline{\operatorname{ran} \Delta_T \cap \mathfrak{S}_\infty} \oplus (\ker \Delta_T \cap \mathfrak{S}_\infty) = \mathfrak{S}_\infty$, то јест да ли оператор Δ_T посматран на простору $\mathfrak{S}_\infty$ има наведену особину да се домен $\mathfrak{S}_\infty$ може разложити на ортогоналну суму језгра и слике. Такође би било интересантно видети и да ли је $\mathfrak{J} = \overline{\operatorname{ran}\Delta_T \cap \mathfrak{J}} \oplus (\ker \Delta_T \cap \mathfrak{J})$, где је $\mathfrak{J}$ *сепарабилан* симетрично нормиран идеал, и где је затворење узето у смислу норме у $\mathfrak{J}$, то јест уколико је $\mathfrak{J}$ такав да је скуп оператора коначног ранга свуда густ у $\mathfrak{J}$. Ако тако нешто важи онда би било добро испитати да ли наведене особине има и оператор $E(X) = AXB + CXD$.

Теореме о ортогоналности слике и језгра, лако се примењују на израчунавање успона оператора E.

Последица 3.1. *Нека је $E(X) = AXB + CXD$ нормално репрезентован оператор, то јест $AC = CA$, $BD = DB$, и A, B, C, D су нормални. Тада је* $\operatorname{asc} E \leq 1$.

Доказ. Нека је $E^2(X) = 0$. Тада је $-E(X) \in \ker E$ па због Теореме 3.5. a) важи неједнакост $\|E(X) - E(X)\| \geq (1/3)\,\|E(X)\|$, то јест $E(X) = 0$. Тако је $\ker E^2 = \ker E$.

Следећи општији резултат, који наводимо без доказа припада Шуљману [14], [15]. (Шульман В.С.)

Теорема 3.7. *Ако је $E(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j$ нормално репрезентован елементаран оператор, тада је* $\operatorname{asc} E \leq n-1$, *а за $n \geq 3$ постоји пример нормално репрезентованог оператора таквог да је* $\operatorname{asc} E > 1$.

Напомена 3.2. Ако је $\operatorname{asc} E > 1$, онда слика и језгро имају нетривијалан пресек (контрапозиција Последице 3.1.), и према томе не могу бити ортогонални. Тако Теорема 3.7. јасно говори да се Теорема 3.5. не може даље уопштавати на елементарне операторе веће дужине. Ипак, може се догодити да за елементаран оператор $E(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j$ важи да је $\operatorname{ran} E^{n-1}$ ортогоналан на $\ker E$, што је још један занимљив отворен проблем.

4. ТЕОРЕМЕ ТИПА ФАГЛИДА-ПАТНЕМА

Како је $\mathfrak{S}_2$ Хилбертов простор, у могућности смо да за елементаран оператор $E : \mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{S}_2$, одредимо његов адјунгован оператор.

Теорема 4.1. *Ако је $E : \mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{S}_2$, елементаран оператор $E(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j$ тада је $E^*(X) = \sum_{j=1}^{n} A_j^* X B_j^*$.*

Доказ. За X, $Y \in \mathfrak{S}_2$ имамо

$$\begin{aligned}\langle E(X), Y\rangle &= \operatorname{tr}(E(X)Y^*) = \operatorname{tr}\left(\sum_{j=1}^{n} A_j X B_j Y^*\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \operatorname{tr}(A_j X B_j Y^*) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{tr}(X B_j Y^* A_j) = \\ &= \operatorname{tr}\left(X\left(\sum_{j=1}^{n} A_j^* Y B_j^*\right)^*\right). \quad \square\end{aligned}$$

Дакле, испоставило се да се у случају елементарног оператора, чији је домен $\mathfrak{S}_2$ његов уопштени адјунговани оператор поклапа са уобичајеном дефиницијом адјунгованог оператора. Чак и када је домен оператора E читав $B(\mathfrak{H})$ ми ћемо и тада, ради краткоће у изражавању, оператор E^* звати његовим адјунгованим. Лако се проверава да је услов да је E нормално репрезентован довољан да важи $EE^* = E^*E$. Неизвесно је да ли је тај услов и потребан.

Први интересантан резултат (Шуљман [13]) наводимо без доказа.

Теорема 4.2. *Коренски потпростор нормално репрезентованог елементарног оператора E који одговара сопственој вредности λ једнак је коренском потпростору оператора E^* који одговара сопственој вредности $\overline{\lambda}$. Другим речима, ако за неко k и X важи $(E - \lambda I)^k X = 0$, онда за неко l и за исто X важи $(E^* - \overline{\lambda} I)^l X = 0$.*

Следећа последица је прво уопштење Теореме Фаглида-Патнема

Последица 4.1. *Нека је $E(X) = AXB + CXD$ нормално репрезентован оператор. Тада $E(X) = 0$ повлачи $E^*(X) = 0$.*

Доказ. На основу Теореме 4.2. узимајући $\lambda = 0$ имамо да ако за неко k важи $E^k(X) = 0$ тада за неко l важи $E^{*l}(X) = 0$. Међутим и E и E^* су нормално репрезентовани елементарни оператори дужине два, па је према Последици 3.1. $\operatorname{asc} E \le 1$, $\operatorname{asc} E^* \le 1$, а то значи да је $E^k(X) = 0$ еквивалентно са $E(X) = 0$, и $E^{*l}(X) = 0$ еквивалентно са $E^*(X) = 0$. Овиме је последица доказана. □

Напомена 4.1. У ствари теорема Шуљмана омогућује да се теорема Фаглида-Патнема уопшти за класу нормално репрезентованих елементарних оператора, чији је успон мањи или једнак од један. Зато је било од посебне важности испитати под којим је условима $\operatorname{asc} E \le 1$. Ипак у овом раду се нећемо даље тиме бавити.

Напомена 4.2. Овде изложени доказ Последице 4.1. је када се узму у обзир претходни резултати, вероватно дужи од доказа изложеног у [11], али је, како нам се чини, много природнији. У ствари сви претходни докази овог тврђења су се, по правилу, или ослањали на теорију комплексних функција, или су имали неугодне техничке детаље, као онај у [11].

Испоставља се да у општем случају не важи теорема Фаглида-Патнема за нормално репрезентоване елементарне операторе произвољне дужине. Ипак, под неким додатним условима могуће је доказати такво тврђење. Најједноставнији такав додатни услов је да $X \in \mathfrak{S}_2$. Наиме у том случају је нормално репрезентован оператор нормалан (у смислу Хилбертовог простора $\mathfrak{S}_2$), и онда лако видимо да је $\left|\left|\sum_{j=1}^n A_j X B_j\right|\right|_2 = \left|\left|\sum_{j=1}^n A_j^* X B_j^*\right|\right|_2$, одакле лако следи импликација $\sum_{j=1}^n A_j X B_j = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^n A_j^* X B_j^* = 0$. Уопштење оваквог тврђења дао је Вајс (Weiss G.) [11].

Теорема 4.3. *Нека је $E(X) = \sum_{j=1}^n A_j X B_j$ нормално репрезентован елементаран оператор. Ако су $E(X)$ и $E^*(X)$ Хилберт-Шмитови, тада је $||E(X)||_2 = ||E^*(X)||_2$.*

Доказ. Доказ ћемо извршити у случају да је $A_j = B_j = M_{\varphi_j}$, оператор множења есенцијално ограниченом функцијом $\varphi_j(x)$ на простору $L^2(Y;\mu)$, где је Y компактан Хаусдорфов тополошки простор, а μ регуларна Борелова, вероватносна мера. Да је могуће узети без губитка на општости $A_j = B_j$, увериће нас, већ уобичајени 2×2 матрични трик

$$\tilde{A}_j = \begin{bmatrix} A_j & 0 \\ 0 & B_j \end{bmatrix}; \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Наиме, лако се види да су нормалност оператора A_j, B_j, као и одговарајући услови комутативности еквивалентни са $\tilde{A}_i \tilde{A}_j^* = \tilde{A}_j^* \tilde{A}_i$. Даље, користећи спектралну теорему за комутирајућу фамилију нормалних оператора, операторе A_j представимо на описани начин.

Претпоставимо најпре да оператори M_{φ_j} имају особину да су линеарно независни на сваком подпростору $L^2(E) < L^2(Y)$ таквом да је $\mu E > 0$. (Наравно $L^2(E)$ разлаже све операторе M_{φ_j}). То у ствари значи да је за све n-торке комплексних бројева $(c_1, c_2, \dots, c_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$

$$\mu\{x \in Y | c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)\} = 0. \tag{1}$$

Нека су $E(X)$, $E^*(X) \in \mathfrak{S}_2$. Тада, са обзиром да је $\mathfrak{S}_2 \cong L^2(Y \times Y)$ постоје функције $G(x, y)$ и $H(x, y) \in L^2(Y \times Y)$ такве да се оператори $E(X)$ и $E^*(X)$ репрезентују на следећи начин

$$(E(X)\varphi)(s) = \int_Y G(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\mu(t),$$

$$(E^*(X)\varphi)(s) = \int_Y H(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

При томе је наравно $||E||_2 = ||G||_{L^2(Y\times Y)}$ и $||E^*||_2 = ||H||_{L^2(Y\times Y)}$

Ако са $\Delta(x,y)$ означимо суму $\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\varphi_j(y)$ тада је функција $\overline{\Delta(x,y)}G(x,y)$ језгро оператора $\sum_{j=1}^{n}A_j^*E(X)A_j^*$. Међутим

$$\sum_{j=1}^{n}A_j^*E(X)A_j^* = \sum_{j=1}^{n}\sum_{I=1}^{n}A_j^*A_iXA_iA_j^* = \sum_{i=1}^{n}A_i\left(\sum_{j=1}^{n}A_j^*XA_j^*\right)A_i = \sum_{i=1}^{n}A_iE^*(X)A_i,$$

а језгро овог последњег оператора је $\Delta(x,y)H(x,y)$. Под горњом претпоставком (о линеарној независности) је онда $\Delta(x,y)\neq 0$ $\mu\times\mu$-скоро свуда. Заиста из теореме Тонелија би у супротном следило да је за бар једно $x\in Y$ мера скупа $\{y\in Y|\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x)\varphi_j(y)\}$ строго већа од нуле. Тако је $|G(x,y)|=|H(x,y)|$ $\mu\times\mu$-скоро свуда, па је $||G||_{L^2(Y\times Y)}=||H||_{L^2(Y\times Y)}$, чиме је доказ завршен у овом случају.

У општем случају доказ ћемо извршити индукцијом по n. За $n=1$ ствар се лако пребацује са $L^2(Y;\mu)$ на $L^2(\operatorname{supp}\varphi_1;\mu)$, а на $\operatorname{supp}\varphi_1$ важи услов (1), што чини базу индукције. Нека је сада $n\in\mathbf{N}$. Формирамо низ бројева α_k и низ скупова E_k индуктивно. Нека је

$$\alpha_1 = \sup_{(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\mathbf{C}^n}\mu\{x\in Y|c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)=0\}\leq\mu Y<+\infty,$$

и нека је E_1 произвољан подскуп скупа Y такав да важи $\mu E_1\geq\alpha_1/2$, и да постоје $c_1,c_2,\dots,c_n$ такви да је $\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(x)=0$ на E_1. Даље, за дате α_k, E_k ставимо да је

$$\alpha_{k+1} = \sup_{(c_1,c_2,\dots,c_n)\in\mathbf{C}^n}\mu\{x\in Y\setminus\left(\cup_{i=1}^{k}E_i\right)|c_1\varphi_1(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)=0\},$$

и да је E_{k+1} неки подскуп скупа $Y\setminus\left(\cup_{i=1}^{k}E_i\right)$ такав да је $\mu E_{k+1}\geq\alpha_{k+1}/2$, и да постоје $c_1,c_2,\dots,c_n$ такви да је $\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(x)=0$ на E_{k+1}. Јасно је да су E_k дисјунктни скупови па важи $\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_k\leq 2\sum_{k=1}^{+\infty}\mu E_k\leq 2\mu Y<+\infty$, одакле посебно $\alpha_k\to 0$ када $k\to\infty$.

Установићемо да на скупу $E_0=Y\setminus\left(\cup_{k=1}^{+\infty}E_k\right)$ функције φ_j имају особину да су линеарно независне на сваком подскупу скупа E_0 строго позитивне мере. Заиста, у супротном из $\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(x)=0$ на скупу $F\subset E_0$, који је строго позитивне мере, произилази да постоји $\alpha_k<\mu F$, што је у супротности са дефиницијом скупова E_k.

Нека је P_k ортопројектор са простора $L^2(Y)$ на његов подпростор $L^2(E_k)$ за $0\leq k<+\infty$. Тада је $\sum_{k=0}^{+\infty}P_k=I$, P_k су међусобно ортогонални, и $P_kA_j=A_jP_k$. Према томе јасно је да важи

$$||E(X)||_2^2=\sum_{k,l=0}^{+\infty}||P_kE(X)P_l||_2^2;\quad ||E^*(X)||_2^2=\sum_{k,l=0}^{+\infty}||P_kE^*(X)P_l||_2^2.$$

На простору $L^2(E_k)$ (за $k>0$) оператори A_j су линеарно зависни, па се један од њих може изразити као линеарна комбинација осталих, рецимо A_n. Тада је $P_kA_n=\sum_{i=1}^{n-1}b_iP_kA_i$, па је

$$\begin{aligned}P_kE(X)P_l = P_k\sum_{j=1}^{n}A_jXA_jP_l = \sum_{j=1}^{n-1}P_kA_jXA_jP_l + P_k\sum_{j=1}^{n-1}b_jA_jXA_nP_l \\ = P_k\left[\sum_{j=1}^{n-1}A_jX(A_j+b_jA_n)\right]P_l,\end{aligned}$$

и слично

$$P_kE^*(X)P_l = P_k\left[\sum_{j=1}^{n-1}A_J^*X(A_J^*+\bar{b}_jA_n^*)\right]P_l,$$

па за $k \neq 0$ једнакост $||P_k E(X) P_l||_2^2 = ||P_k E^*(X) P_l||_2^2$ важи према индукцијској претпоставци. Сличну процедуру можемо да поновимо и за $l > 0$. Тако, да бисмо завршили доказ треба још показати да је $||P_0 E(X) P_0||_2^2 = ||P_0 E^*(X) P_0||_2^2$. Међутим ово последње је тачно јер је то управо претходни специјални случај. $\square$

Напомена 4.3. Вајс је у истом раду, уз доста сложену технику доказао да ако оператор E има особину да из $E(X) = 0$ произилази $E^*(X) = 0$, да тада $E(X) \in \mathfrak{S}_2$ повлачи $E^{*2}(X) \in \mathfrak{S}_2$ и $\left|\left|E^2(X)\right|\right|_2 = \left|\left|E^{*2}(X)\right|\right|_2$. Међутим овиме није доказано да из $E(X) \in \mathfrak{S}_2$ излази $E^*(X) \in \mathfrak{S}_2$. Наиме у том би случају $E(X) = 0$ повлачило $E^*(X) = 0$. Тако нешто није могуће добити, и то је показао Шуљман у раду [15], где је конструисао пример нормално репрезентованог оператора E, где је $E(X) = 0$, и $E^*(X) \neq 0$, и самим тим $E^*(X) \notin \mathfrak{S}_2$.

Напомена 4.4. Исти контрапример може послужити и за тврђење да није увек $\operatorname{asc} E \leq 1$, и да није увек $\operatorname{ran} E$ ортогоналан на $\ker E$. Наиме према Последици 3.1. из $\operatorname{ran} E \perp \ker E$ следи $\operatorname{asc} E \leq 1$, а из $\operatorname{asc} E \leq 1$ према Напомени 4.1. произилази $E(X) = 0 \Longrightarrow E^*(X) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson J. *On normal derivations,* Proc. Amer. Math. Soc. **38-1**(1973) 135-140
2. Bhatia R. *Matrix analysis* Springer New York 1997
3. Fialkow L. Loebl R. *Elementary mappings into ideals of operators,* Illinois J Math. **28-4**(1984) 555-578
4. Gohberg I.C. Krein M.G. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators,* Transl. Math. Monographs, vol. **18**, Amer. Math. Soc. Providence R.I. 1969
5. Jocić D. *Cauchy-Schwartz norm inequality for elementary operators into Schatten ideals,* J London Math. Soc. у штампи
6. Jocić D. *Cauchy-Schwartz and means inequalities for elementary operators into norm ideals,* Proc. Amer. Math. Soc. у штампи
7. Kečkić D. *Orthogonality of the range and the kernel of some elementary operators,* у припреми
8. Kittaneh F. *Normal derivations in norm ideals,* Proc. Amer. Math. Soc. **123-6**(1995) 1779-1785
9. Kittaneh F. *On the continuity of the absolute value map in the Schatten classes,* Linear Algebra Appl. **118**(1989) 61-68
10. Lumer G. Rosenblum M. *Linear operator equations,* Proc. Amer. Math. Soc. **10**(1959) 32-41
11. Weis G. *An extension of the Fuglede comutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class to operators of the form* $\sum M_n X N_n$, Trans. Amer. Math. Soc. **278-1**(1983) 1-20
12. Бирман М.Ш. Соломяк М.З. *Спектральная теория самосопраженных операторов в Гильбертовом пространстве* Изд-во ЛГУ Ленинград 1980
13. Шульман В.С. *Операторы умножения в* C^**-алгебрах и задача о рефлексивности алгебр, содержащих m.a.s.a.,* Функциональный анализ и его приложения **8-1**(1974) 92-93
14. Шульман В.С. *Сплетения и линейные операторные уравнения,* ДАН СССР **301-1**(1988) 57-61
15. Шульман В.С. *Операторы умножения и спектральный синтез,* ДАН СССР **313-5**(1990) 1047-1051