ОДАБРАНА ПОГЛАВЉА ФУНКЦИОНАЛНЕ АНАЛИЗЕ
радна верзија

Драгољуб Ј. Кечкић

Садржај

1. ПРЕГЛЕД НЕОПХОДНИХ ПРЕДЗНАЊА

ПРОСТОР $C(K)$

1.1. Мотивација. Почев од друге године, у току основних студија добро је проучен простор $C[a,b]$ непрекидних функција на сегменту $[a,b]$. Између осталог доказано је да је реч о комплетном простору, дакле Банаховом, затим репрезентација дуалног простора

$$C[a,b]^* \cong NBV[a,b],$$

при чему функционалу $\Lambda \in C[a,b]$ одговара нормализована функција ограничене варијације g и важи репрезентација помоћу Стилтјесовог интеграла

$$\Lambda(f) = \int_a^b f \,\mathrm{d}g. \tag{1}$$

Најзад показано је да је скуп полинома свуда густ у $C[a,b]$ - Вајерштрасова теорема.

Сва наведена својства могу се пренети на општије просторе $C(K)$, где је K неки компактан Хаусдорфов тополошки простор. Комплетност простора $C(K)$ захтева само механичку прераду доказа комплетности $C[a,b]$ те се изоставља.

1.2. Техничка лема. Топологија која је једновремено компактна и Хаусдорфова не може се значајно променити. Додавање нових отворених скупова могуће је само на рачун губитка компактности, а изостављање на рачун губитка T_2 аксиоме сепарације. Прецизније важи тврдња:

Нека су на скупу K задате две топологије, компактна $\varkappa$ и Хаусдорфова χ, такве да је $\varkappa \supseteq \chi$. Тада је $\varkappa = \chi$.

Доказ. Доказ ове тврдње ослања се на две једноставне чињенице - да је у компактном простору сваки затворен скуп уједно и компактан, док у Хаусдорфовом важи обратно, сваки компактан скуп је затворен. Доказ се може наћи у [Рудин функционална, одељак 3.8.] □

Примедба. Обратна инклузија је могућа како показује пример индискретне (која је компактна) и дискретне (која је Хаусдорфова) топологије.

1.3. Рисова теорема о репрезентацији. Важи изоморфизам

$$C(K)^* \cong \mathcal{M}(K),$$

где је $\mathcal{M}(K)$ простор свих комлексних Борелових мера на K са уобичајеним операцијама и нормом $||\mu|| = |\mu|(K)$ ($|\mu|$ је ознака за пуну варијацију мере μ). При томе, ако функционалу Λ одговара мера

μ онда важи репрезентација

$$\Lambda(f) = \int_K f \,\mathrm{d}\mu.$$

Доказ. Доказ се може наћи у [Рудин реална и комлексна, Теорема 6.19.] $\square$

Примедба. Рисова теорема је уопштење формуле (1), јер постоји бијекција између функција из $NBV[a,b]$ и комлексних Борелових мера на $[a,b]$.

Примедба2. Иста репрезентација важи и на простору $C_0(\Omega)$, где је Ω локално компактан, а $C_0(\Omega)$ скуп свих непрекидних функција које се анулирају у бесконачности, тј. свих непрекидних $f : \Omega \to \mathbf{C}$ таквих да за све $\varepsilon > 0$ постоји компакт $K \subseteq \Omega$ такав да за $x \notin K$ важи $|f(x)| < \varepsilon$.

1.4. Теорема [Стон-Вајерштрас]. а) (реални случај) Нека је $\mathcal{A} \subseteq C_{\mathbf{R}}(K)$ - простор реалновредносних непрекидних функција над пољем $\mathbf{R}$. Ако су испуњени следећи услови:

(i) $\mathcal{A}$ је алгебра, то јест $f, g \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ повлачи $f+g$, αf, $fg \in \mathcal{A}$;

(ii) $\mathcal{A}$ садржи бар једну константну функцију;

(iii) $\mathcal{A}$ раздваја тачке, то јест за све $x, y \in K$ постоји $h \in \mathcal{A}$ такво да је $h(x) \neq h(y)$,

тада је $\mathcal{A}$ густа у $C_{\mathbf{R}}(K)$.

б) (комплексни случај) Нека је $\mathcal{A} \subseteq C(K)$. Ако су испуњени следећи услови:

(i) $\mathcal{A}$ је алгебра, то јест $f, g \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbf{C}$ повлачи $f+g$, αf, $fg \in \mathcal{A}$;

(ii) $\mathcal{A}$ садржи бар једну константну функцију;

(iii) $\mathcal{A}$ раздваја тачке, то јест за све $x, y \in K$ постоји $h \in \mathcal{A}$ такво да је $h(x) \neq h(y)$;

(iv) $\mathcal{A}$ је затворена за комплексно конјуговање, то јест $f \in \mathcal{A}$ повлачи $\overline{f} \in \mathcal{A}$,

тада је $\mathcal{A}$ густа у $C(K)$.

Доказ. а) Биће изведен у неколико корака.

1° Ако је $0 \leq f \in \mathcal{A}$, онда $\sqrt{f} \in \overline{\mathcal{A}}$. Не губи се на општости, ако се претпостави да је $f < 1$. Уочимо функцију $g = 1 - f \geq 0$ која такође припада $\mathcal{A}$ и искористимо Маклоренов ред $\sum a_n t^n$ функције $t \mapsto \sqrt{1-t}$ који конвергира равномерно по $t \in [0,1]$. Тада заменом $t = g(x)$ налазимо $\sqrt{f} = \sqrt{1-g} = \sum a_n g^n$ и конвергенција је равномерна, то јест по норми простора $C(K)$, а сабирци припадају $\mathcal{A}$ јер је реч о алгебри.

2° Ако f, $g \in \mathcal{A}$, онда $\min\{f,g\}$, $\max\{f,g\} \in \overline{\mathcal{A}}$. Приметимо, пре свега да (због 1°) $h \in \mathcal{A}$ повлачи $|h| \in \overline{\mathcal{A}}$, јер је $|h| = \sqrt{h \cdot h}$. Даље

$$\min\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|), \qquad \max\{f,g\} = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|),$$

и приметимо да је $\overline{\mathcal{A}}$ такође алгебра јер су операције непрекидне у $\max$ норми (множење због ограничености функција).

Индукцијом и за $\min$ и $\max$ коначно много функција.

3° За сваке две $x, y \in K$ и све $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ постоји $h \in \mathcal{A}$ са својством $h(x) = \lambda$ и $h(y) = \mu$. Заиста, постоји $h_0 \in \mathcal{A}$ са својством $h_0(x) \neq h_0(y)$, а за h узмемо $\alpha + \beta h_0$, где се α и β добијају решавањем 2×2 система линеарних једначина чија је детерминанта $h_0(y) - h_0(x) \neq 0$.

4° За дато $f \in C_{\mathbf{R}}(K)$, дато $y \in K$ и све $\varepsilon > 0$ постоји $h_y \in \overline{\mathcal{A}}$ таква да је $h_y(x) < f(x) + \varepsilon$ за све $x \in K$ и $h_y(y) = f(y)$. Заиста, нека су $x, y \in K$ дати. Постоји (због 3°) $h_{x,y} \in \overline{\mathcal{A}}$ тдј. $h_{x,y}(x) = f(x)$ и $h_{x,y}(y) = f(y)$. Фиксирамо y и за све $x \in K$ уочимо отворене околине $U_{x,y}$ такве да је за све $z \in U_{x,y}$ $h_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon$. (Такве околине постоје јер су све наведене функције непрекидне.) Околине $U_{x,y}$, $x \in K$ покривају компакт K, па постоји њих коначно много које такође покривају K, рецимо $U_{x_j,y}$, $1 \leq j \leq m$. Узмемо $h_y = \min_j h_{x_j,y}$.

5° За дато $f \in C_{\mathbf{R}}(K)$ и све $\varepsilon > 0$ постоји $h \in \overline{\mathcal{A}}$ таква да је $f(x) - \varepsilon < h(x) < f(x) + \varepsilon$ за све $x \in K$. Због 4° за све y постоји $h_y \in \overline{\mathcal{A}}$ тдј. $h_y(y) = f(y)$ и $h_y(x) < f(x) + \varepsilon$. Одаберемо околине V_y у којима важи $h_y > f - \varepsilon$. Оне покривају K па постоји њих коначно много које такође покривају K, рецимо V_{y_j}, $1 \leq j \leq m$. Узмемо $h = \max h_{y_j}$.

Тако је $\overline{\mathcal{A}}$ густа у $C_{\mathbf{R}}(K)$, а тиме и $\mathcal{A}$.

б) Посматрајмо скуп $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}$ који се састоји од реалновредносних функција из $\mathcal{A}$. Тај скуп је очито алгебра и садржи константне функције. Да бисмо показали да раздваја тачке, приметимо да из $f \in \mathcal{A}$ следи из четвртог услова $\bar{f} \in \mathcal{A}$, и отуда $\operatorname{Re} f = (f + \bar{f})/2$ и $\operatorname{Im} f = (f - \bar{f})/2 \in \mathcal{A}_{\mathbf{R}}$. За било које две $x, y \in K$ постоји $f \in \mathcal{A}$ тдј. $f(x) \neq f(y)$. Тада је $\operatorname{Re} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y)$ или $\operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Im} f(y)$. Према претходном делу $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}$ је густа у $C_{\mathbf{R}}(K)$. Лако приводимо доказ крају, јер за $f \in C(K)$, функције $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ припадају $C_{\mathbf{R}}(K)$ и могу се апрокисмирати функцијама из $\mathcal{A}_{\mathbf{R}}$, рецимо g и h. Међутим, $g + ih \in \mathcal{A}$ и готово. □

1.5. Последице. Алгебра полинома раздваја тачке на сегменту $[a, b]$, алгебра полинома по n променљивих раздваја тачке на компактном подскупу простора $\mathbf{R}^n$ и алгебра тригонометријских полинома раздваја тачке на $[a, b]$ одакле следе различите класичне варијанте теорема о апроксимацији.

Примедба. Ако се поступак описан у претходном доказу примени на алгебру полинома у $C[a, b]$ онда се непрекидна функција најпре апроксимира изломљеном линијом, а ова полиномима. То се види јер се за $h_{s,t}$ могу узети линеарне функције

ТОПОЛОШКИ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОРИ

1.6. Дефиниција. *Тополошки векторски простор* (скраћенио ТВП) је векторски простор X опремљен Хаусдорфовом топологијом тако да су оперецаије сабирања вектора $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ и множења вектора скаларом $\mathbf{C} \times X \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in X$ непрекидне.

Због непрекидности сабирања види се да је таква топологија транслаторно инваријантна, па је за њено познавање довољно задати базне околине једне тачке, јер се остали базни скупови могу добити њиховом транслацијом. Разумљиво, та једна тачка биће по правилу 0.

За тополошки векторски простор X каже се да је *локално конвексан* ако постоји систем базних околина (нуле) који се састоји од конвексних скупова.

Дуални простор тополошког векторског простора X (у ознаци X^*) је скуп свих непрекидних линеарних функционала. Дакле

$$X^* = \{\varphi : X \to \mathbf{C} \mid \varphi \text{ је линерана и непрекидан}\}.$$

Јасно је да је X^* векторски простор. Касније ћемо видети како и на који начин се он може снабдети структуром тополошког векторског простора.

1.7. Системи полунорми. *Полунорма* на векторском простору X је функција $p : X \to \mathbf{R}$ за коју важи

(i) $p(x) \geq 0$;
(ii) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ за $\alpha \in \mathbf{C}$ и $x \in X$;
(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

Дакле, до норме недостаје услов недегенерисаности: $p(x) = 0$ акко $x = 0$.

За фамилију полунорми p_i, $i \in I$ на векторском простору X кажемо да *раздваја тачке* ако за све $0 \neq x \in X$ постоји индекс i тдј. $p_i(x) \neq 0$.

Ако фамилија полунорми $(p_i)_{i \in I}$ раздваја тачке, онда се за базне околине нуле могу узети скупови

$$B_{p_1, p_2, \ldots, p_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} = \{x \in X \mid p_1(x) < \varepsilon_1, \ldots, p_n(x) < \varepsilon_n\}.$$

Базне околине тачке x_0 се добијају заменом x са $x - x_0$ у горњој формули. Без губитка општости, сви епсилони могу бити исти, јер их има коначно много. Уместо базних околина, могу се задати суббазне околине као

$$S_{p,\varepsilon} = \{x \in X \mid p(x) < \varepsilon\},$$

јер је тада очито

$$B_{p_1, \ldots, p_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n} = \bigcap_{j=1}^{n} S_{p_j, \varepsilon_j}.$$

Топологија добијена на описани начин је увек локално конвексна, због услова (iii) у дефиницији полунорме.

1.8. Примери.

(1) Простор пробних функција $\mathcal{D}_K$ чији носач је садржан у компакту K се задаје системом полунорми

$$p_{K,N}(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \max_{x \in K} |\partial^\alpha f(x)|,$$

док се простор пробних функција задаје преко тзв. индуктивног лимеса, о чему овде неће бити речи

(2) Простор дистрибуција се задаје као дуални простор $\mathcal{D}' = \mathcal{D}^*$.

(3) Простор $\mathcal{H}(\Omega)$ холоморфних функција у области Ω са тзв. нормалном конвергенцијом (равномерном на компактима) задаје се системом полунорми

$$p_K(f) = \sup_{z\in K} |f(z)|, \qquad K \Subset \Omega.$$

(4) Нека је E Банахов простор. Нема норме која би описала слабу конвергенцију у E. Међутим постоји топологија задата системом полунорми

$$p_\Lambda(x) = |\Lambda(x)|, \qquad \Lambda \in E^*.$$

(Наравно, не морају се узети сви функционали - може се одабрати неки фундаменталан скуп.)

(5) Претходни примери су сви били локално конвексни. Ево једног који није. Нека је $0 < p < 1$, и (X, μ) простор са мером. Скуп $L^p(X)$ се не може нормирати на стандардан начин, јер не важи неједнакост Минковског, али постоји метрика

$$d_p(f, g) = \int_X |f-g|^p \,\mathrm{d}\mu \qquad \text{(без степеновања са } 1/p!).$$

Та метрика генерише одговарајућу топологију.

1.9. О дуалном простору. Постоји одговарајуће уопштење Хан-Банахове теореме, али оно не важи без претпоставке о локалној конвексности. Тек тада је могуће доказати да постоје нетривијални непрекидни функционали. И више, могуће је доказати да дуални простор X^* има довољно богату структуру да раздваја тачке, односно да за све $x, y \in X$ постоји $\Lambda \in X^*$ такво да је $\Lambda(x) \neq \Lambda(y)$. Без услова локалне конвексности могу се добити необични резултати. На пример, за $0 < p < 1$ важи $L^p(0,1)^* = \{0\}$, односно ту је једини непрекидан функционал тривијалан. Последњи резултат је стриктно везан за интервал $(0,1)$, јер за $0 < p < 1$ за просторе низова важи $(l^p)^* \cong l^\infty$.

Слаба $*$ топологија на дуалном простору X^* је топологија задата помоћу полунорми

$$p_x(\varphi) = |\varphi(x)| \qquad x \in X,$$

односно реч је о полунормама које потичу од израчунавања функционала у тачки. Ове полунорме очито раздвајају тачке. То је природан начин да опремимо дуални простор локално конвексном топологијом.

Међутим, ако је полазни простор X Банахов, то је већ трећа топологија коју упознајемо на њему (при томе и најслабија). Наиме, на X^* већ постоји топологија индукована нормом, као и слаба топологија, која потиче од полунорми

$$p_\Lambda(\varphi) = |\Lambda(\varphi)|, \qquad \Lambda \in X^{**},$$

и која, у случају када X није рефлексиван, може бити стриктно јача од слабе $*$.

Специјалан случај слабе $*$ конвергенције је конвергенција у закону расподеле, позната из вероватноће.

Следи списак тврђења која могу бити од користи.

1.10. Став. Нека је E Банахов простор и $Q \subseteq E$ конвексан скуп. Тада је Q затворен ако и само ако је слабо затворен.

Примедба. Обратна импликација је тривијална, док је она директна последица конвексности. Слична тврдња не важи за отворене скупове.

1.11. Теорема [Банах-Алаоглу]. Нека је V околина у тополошком векторском простору X. Тада је њена полара

$$V^\circ = \{\varphi \in X^* \mid |\varphi(x)| \leq 1 \text{ за све } x \in V\}$$

слабо $*$ компактан скуп.

Примедба. Када је X Банахов простор, тада се најчешће за V узима јединична лопта. Тада је V° јединична лопта у дуалном простору. Отуда у Банаховим просторима важи тврдња да је јединична лопта на дуалном простору слабо $*$ компактан скуп.

Доказ. Може се наћи у [Рудин функционална, Теорема 3.15.] □

1.12. Крајње тачке. Нека је X (обичан) векторски простор, и нека је $Q \subseteq X$ конвексан скуп. Тачка $a \in Q$ назива се *крајња тачка* (скупа Q) ако из $b, c \in Q$, $\theta \in [0, 1]$ и $a = \theta b + (1 - \theta)c$ следи $a = b = c$. Другим речима, крајње тачке конвексног скупа су оне које се не могу представити као конвексна комбинација неких других тачка тог скупа.

1.13. Теорема [Крејн-Милман]. Нека је X ТВП, такав да X^* раздваја тачке, и нека је $K \subseteq X$ компактан конвексан скуп. Тада је $K = \overline{co\, K_0}$, где је K_0 скуп крајњих тачка скупа K и $co\, K_0 = \{\theta x + (1 - \theta)y \mid x, y \in K_0, 0 \leq \theta \leq 1\}$ конвексан омотач скупа K_0.

Доказ. Може се наћи у [Рудин функционална, Теорема 3.21.] □

1.14. Коментари. Према мишљењу аутора пет теорема заслужују епитет „камен темељац“ функционалне анализе. Прве три, Хан-Банахова, Банах-Штајнхаусова и теорема о отвореном пресликавању обрађују се на основним студијама. Четврта и пета су Алаоглуова и Крејн-Милманова.

Посебно, комбинација последње две показује се као моћно оружје при доказивању да неки Банахов простор не може бити дуал неког другог простора. Наиме, ако то јесте, онда је према Алаоглуовој теореми затворена јединична лопта компактан и конвексан скуп у слабој $*$ топологији. Према Крејн-Милмановој теореми она се мора поклопити са затворењем конвексног омотача скупа својих крајњих тачака. Отуда је довољно пронаћи крајње тачке јединичне лопте и ако их нема (као у случају $L^1(0, 1)$) или их има премало (као у случају $C[0, 1]$) долазимо до контрадикције. Посебно је занимљиво што се проблем свео на налажење крајњих тачака које имају чисто алгебарско својство, независно од било какве норме или метрике. Још простије, „облик“ јединичне лопте је неки пут препрека за постојање пред-дуала.

ИНТЕГРАЦИЈА И АНАЛИТИЧНОСТ У БАНАХОВИМ ПРОСТОРИМА

1.15. Појам слабог интеграла. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и $f : X \to E$ функција која га пресликава у неки Банахов простор E. Интеграција такве функције се једноставно може дефинисати по координатама у случају када је E коначне димензије. У општем случају ствари се комликују. Непосредно уопштење интеграције по координатама је појам *слабог интеграла* који дефинишемо овако:

Кажемо да је $f : X \to E$ слабо интеграбилна, ако за све $\Lambda \in E^*$ постоји интеграл $\int_X \Lambda f \, \mathrm{d}\mu$ (чиме смо прећутно претпоставили мерљивост свих функција $\Lambda \circ f$, тј. слабу мерљивост) и ако постоји $x \in E$ са својством

$$\int_X \Lambda f \, \mathrm{d}\mu = \Lambda x, \qquad \text{за све } \Lambda \in E^*.$$

Проблем је у овом „ако постоји“, јер је највећи проблем слабог интеграла питање његове егзистенције, истина у E, јер је пресликавање

$$E^* \ni \Lambda \mapsto \int_X \Lambda f \, \mathrm{d}\mu \in \mathbf{C}$$

очигледно линеарно, а уз мало среће биће и ограничено, те отуда постоји $\varphi \in E^{**}$ такво да је

$$\int_X \Lambda f \, \mathrm{d}\mu = \varphi(\Lambda),$$

али то онда значи да је наш слаби интеграл „побегао“ у други дуал.

1.16. Појам Бохнеровог интеграла. *Бохнеров* или *јаки интеграл* дефинише се поступком који уопштава конструкцију Лебеговог интеграла. Полази се од простих мерљивих функција, облика $\sum_j a_j \chi_{A_j}$, где су $a_j \in E$ елементи Банаховог простора и $A_j \in \mathfrak{M}$ мерљиви скупови, за које кажемо да су интеграбилне, ако постоји збир $\sum_j a_j \mu(A_j) =: \int_X \sum_j a_j \chi_{A_j} \, \mathrm{d}\mu$. Затим за функцију $f : X \to E$ кажемо да је интеграбилна, ако постоји низ простих интеграбилних функција s_j такав да $||f(x) -$

$s_j(x)||_E \to 0$, μ скоро свуда, и њен интеграл дефинишемо као јаки лимес

$$\lim \int s_j \, \mathrm{d}\mu.$$

Показује се да резултат не зависи од избора низа простих функција.

1.17. Услови Бохнер-интеграбилности. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, може бити и комплексном, E Банахов простор и $f : X \to E$. Тада је f интеграбилна у Бохнеровом смислу ако и само ако важе следећа три услова:
(i) $\int_X ||f|| \, \mathrm{d}|\mu| < +\infty$;
(ii) постоји сепарабилан потпростор $E_0 \leq E$, такав да $f(X) \subseteq E_0$;
(iii) функција f је слабо мерљива, тј. за сваки функционал $\Lambda \in E^*$ је функција $\Lambda \circ f$ мерљива.
Услови (ii) и (iii) у конјункцији називају се *јака мерљивост*.

1.18. Својства Бохнеровог интеграла. Важе следећа својства:

(1) $\int_X (\alpha f + \beta g) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_X f \, \mathrm{d}\mu + \beta \int_X g \, \mathrm{d}\mu$, за свака два комплексна броја α, β и интеграбилне $f, g : X \to E$.
(2) Ако је $A = A_1 \sqcup A_2$, онда је $\int_A f \, \mathrm{d}\mu = \int_{A_1} f \, \mathrm{d}\mu + \int_{A_2} f \, \mathrm{d}\mu$.
(3) Ако је $f : X \to E$ интеграбилна, и $T : E \to E'$ ограничен оператор, онда је и Tf интеграбилна и важи

$$\int_X Tf \, \mathrm{d}\mu = T \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

(4) Ако је f интеграбилна у Бохнеровом смислу, онда је f и слабо интеграбилна и интеграли се поклапају.
(5) Ако је $f_n : X \to E$ низ јако мерљивих функција који μ скоро свуда конвергира (по норми простора E) ка некој функцији f, и ако постоји интеграбилна скаларна функција g таква да је за све n и све $x \in X$ испуњено $||f_n(x)|| \leq g(x)$, онда важи

$$\int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \to \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

(6) Ако је $f : X \times Y \to E$ интеграбилна у односу на $\mu \otimes \nu$ онда важи Фубинијева теорема

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

1.19. Аналитичност. Нека је Ω област у $\mathbf{C}$ и E Банахов простор.

а) За функцију $f : \Omega \to \mathbf{C}$ кажемо да је *слабо аналитичка* ако је за сваки функционал $\Lambda \in E^*$ функција $\Lambda \circ f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ аналитичка;

б) За функцију $f : \Omega \to \mathbf{C}$ кажемо да је *јако аналитичка* ако у свакој тачки $z_0 \in \Omega$ постоји лимес

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

по норми простора E. Очигледно је да јака аналитичност повлачи слабу. Међутим може се показати и обратно. Наиме, да слаба аналитичност повлачи јаку, као и да у том случају важе уобичајене Кошијеве формуле

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z = 0, &&\text{ако } \operatorname{int} \Gamma \subseteq \Omega \\ &\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z - a} \, \mathrm{d}z = f(a), &&\text{ако је индекс криве } \Gamma \text{ у тачки } a \text{ једнак } 1, \end{aligned} \tag{2}$$

при чему интеграли у (2) постоје и као Бохнерови и као слаби.

Доказ се може пронаћи у [Рудин функционална, Теорема 3.31.]. Заправо је путања доказа таква, да се из слабе аналитичности прво доказују формуле (2), а одатле јака аналитичност.

ТЕНЗОРСКИ ПРОИЗВОД

1.20. Категоријална дефиниција. Нека су A и B (фиксирани) векторски простори над истим пољем скалара $\mathbf{K}$. Посматрајмо категорију $\mathcal{C}$ чији су објекти уређени парови (C, φ) који се састоје од једног векторског простора C (над $\mathbf{K}$) и билинераног пресликавања $\varphi : A\times B \to C$ (билинерано значи линеарно по свакој од две координате). Морфизми између објеката (C_1, φ_1) и (C_2, φ_2) у категорији $\mathcal{C}$ су линеарна пресликавања $\psi : C_1 \to C_2$ таква да дијаграм

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dd, "\psi"] \\ A\times B \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\ & C_2 \end{tikzcd}$$

комутира.

Тензорски производ векторских простора A и B, у ознаци $A \otimes B$ је универзални полазни објекат у категорији $\mathcal{C}$. Формално, то је уређен пар $(A \otimes B, \varphi_0)$, али неформално тензорским производом називамо само простор, а не и пресликавање. (Универзални полазни објекат у некој категорији је онај објекат за који постоји јединствени морфизам из тог објекта у сваки други.) То значи да за свако билинеарно пресликавање $\varphi : A\times B \to C$ постоји јединствено линеарно пресликавање $\psi : A\otimes B \to C$ такво да дијаграм

(3)
$$\begin{tikzcd} & A\otimes B \arrow[dd, "\psi"] \\ A\times B \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & C \end{tikzcd}$$

комутира, при чему је $\varphi_0 : A \times B \to A \otimes B$ канонско билинерано пресликавање.

Општа разматрања у теорији категорија гарантују да је универзални објекат јединствен (до на изоморфизам) али не и његову егзистенцију. Стога ћемо егзистенцију посебно доказати конструкцијом тензорског производа. Ипак, ова категоријална дефиниција има своје предности, те је стога и наведена.

На пример придруживањем $\varphi \mapsto \psi$ (види дијаграм (3)) остварује се изоморфизам простора свих билинеарних пресликавања из $A \times B$ у C и свих линеарних пресликавања из $A \otimes B$ у C. То јест

$$\Big(L(A; L(B,C)) \cong \Big) L(A,B;C) \cong L(A\otimes B; C).$$

1.21. Конструкција тензорског производа. Нека су A и B векторски простори над истим пољем скалара $\mathbf{K}$. Нека је V слободан векторски простор над скупом $A \times B$, односно скуп свих коначних $\mathbf{K}$-линеарних комбинација уређених парова из $A \times B$, то јест

$$V = \left\{ \sum_{j=1} \lambda_j (a_j, b_j) \mid \lambda_j \in \mathbf{K}, a_j \in A, b_j \in B \right\}$$

и нека је V_0 његов потпростор генерисан векторима облика

$$\lambda_1(a_1, b) + \lambda_2(a_2, b) - (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b),$$

и

$$\lambda_1(a, b_1) + \lambda_2(a, b_2) - (a, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2),$$

где a, a_1, a_2 $\in$ A, b, b_1, b_2 $\in$ B, λ_1, λ_2 $\in$ $\mathbf{K}$. Елементи количничког простора V/V_0 су класе еквиваленције простора V модуло V_0. Класу самог уређеног пара (a, b) (то јест тривијалне линеарне комбинације) означаваћемо са $a \otimes b$ и зваћемо *елементарни тензор*. Дакле:

$$a \otimes b = (a, b) + V_0.$$

Јасно је да се могу извести једнакости

$$
\begin{aligned}
(a_1 + a_2) \otimes b &= a_1 \otimes b + a_2 \otimes b \\
a \otimes (b_1 + b_2) &= a \otimes b_1 + a \otimes b_2 \\
\lambda(a \otimes b) &= (\lambda a) \otimes b \\
\lambda(a \otimes b) &= a \otimes (\lambda b)
\end{aligned} \tag{4}
$$

На пример, прву од њих изводимо на следећи начин

$$(a_1+a_2)\otimes b = (a_1+a_2, b)+V_0 = (a_1+a_2, b)+((a_1, b) + (a_2, b) - (a_1 + a_2, b))+V_0 = a_1\otimes b+a_2\otimes b,$$

јер $(a_1, b) + (a_2, b) - (a_1 + a_2, b) \in V_0$. Слично и остале.

Показаћемо да је количнички простор V_0 једнак $A \otimes B$ заједно са пресликавањем $\varphi_0 : A \times B \to V/V_0$ датим са $\varphi_0(a, b) = a\otimes b$. Заиста, нека је C произвољан векторски простор над $\mathbf{K}$ и $\varphi : A\times B \to C$ билинеарно. Дефинишемо пресликавање $\hat{\psi} : V \to C$ са $\hat{\psi}((a, b)) = \varphi(a, b)$. То пресликавање је задато сликама базних вектора, па постоји и јединствено је. Покажимо да је $\psi : V/V_0 \to C$ коректно задато са $\psi(a \otimes b) = \hat{\psi}((a, b)) = \varphi(a, b)$. У ту сврху довољно је доказати да се $\hat{\psi}$ анулира на потпростору V_0, односно да његове генераторе слика у нулу. Међутим, то је једноставно, јер је због линеарности $\hat{\psi}$ и билинеарности φ:

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}(\lambda_1(a_1, b) + \lambda_2(a_2, b) - (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b)) &= \lambda_1\hat{\psi}((a_1, b)) + \lambda_2\hat{\psi}((a_2, b)) - \hat{\psi}((\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b)) = \\
&= \lambda_1\varphi(a_1, b) + \lambda_2\varphi(a_2, b) - \varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}(\lambda_1(a, b_1) + \lambda_2(a, b_2) - (a, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)) &= \lambda_1\hat{\psi}((a, b_1)) + \lambda_2\hat{\psi}((a, b_2)) - \hat{\psi}((a, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)) = \\
&= \lambda_1\varphi(a_1, b) + \lambda_2\varphi(a_2, b) - \varphi(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, b) = 0.
\end{aligned}
$$

Дакле, пресликавање ψ такво да дијаграм (3) комутира постоји. Његова јединственост следи, јер мора бити $\psi(a \otimes b) = \psi(\varphi_0(a, b)) = \varphi(a, b)$, а елемнтарни тензори $a \otimes b$ генеришу V, а тиме и V/V_0.

Примедба. Уместо гломазне конструкције $A \otimes B = V/V_0$ која почиње од огромног простора V (кардиналност његове базе је кардиналност од $A \times B$), слободније говоримо о тензорском производу $A \otimes B$ чији су елементи коначне линеарне комбинације елементарних тензора:

$$\sum \lambda_j a_j \otimes b_j,$$

са идентификацијама задатим релацијама (4).

Примедба2. Без икаквих суштинских измена у конструкцијама и доказима, дефинише се тнзорски производ модула над неким прстеном R.

1.22. Тензорски производ коначно димензионалних простора. Нека су A и B коначно димензионални простори, са базам $e_1, \ldots, e_n$, односно $f_1, \ldots, f_m$. Тада је $A \otimes B$ такође коначно димензионалан и једну његову базу чине елемнтарни тензори

$$e_i \otimes f_j, \qquad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m. \tag{5}$$

Јасно је да скуп (5) генерише $A \otimes B$. Да бисмо показали његову линеарну независност послужићемо се универзалним својством. Наиме претпоставимо да је

$$\sum \lambda_{ij} e_i \otimes f_j = 0, \tag{6}$$

и уочимо билинеарно пресликавање $\varphi_{i_0 j_0} : A\times B \to \mathbf{K}$ задато на базама (e_i) и (f_j) са $\varphi_{i_0 j_0}(e_{i_0}, f_{j_0}) = 1$ и $\varphi_{i_0 j_0}(e_i, f_j) = 0$, иначе. Такво пресликавање се на јединствен начин разлаже кроз $A \otimes B$ према дијаграму (3). За одговарајуће пресликавање $\psi_{i_0 j_0} : A\otimes B \to \mathbf{K}$ важи $\psi_{i_0 j_0}(e_i\otimes f_j) = \varphi_{i_0 j_0}(e_i, f_j) = 1$ кад је $i = i_0$ и $j = j_0$ а анулира се за остале изборе индекса. Када пресликавањем $\psi_{i_0 j_0}$ нападнемо једнакост (6) добијамо $\lambda_{i_0 j_0} = 0$.

(И иначе, претходно описани поступак показује, независно од претпоставке о коначно димензионалности, да су вектори $a_i \otimes b_j$ линеарно независни, кад год су такви a_i односно b_j.)

Тако је $\dim(A \otimes B) = \dim A \cdot \dim B$.

1.23. Тензорски производ Банахових и Хилбертових простора. Нека су, сада, A и B Банахови простори. Претходно изведена конструкција снабдева њихов тензорски производ само структуром векторског простора. Тај тензорски производ зваћемо *алгебарски тензорски производ* и означаваћемо са $A \otimes_{alg} B$. Међутим, било би добро да тензорски производ Банахових простора остане у истој категорији, то јест да и он буде Банахов. За почетак, треба на паметан начин увести норму на $A \otimes_{alg} B$. Разуман услов је да захтевамо да важи

$$||a \otimes b|| = ||a|| \, ||b||. \tag{7}$$

Међутим, показује се да, у општем случају, има више различитих норми на $A \otimes_{alg} B$ које задовољавају услов (7), као и да многе међу њима налазе свој смисао и примену. Иницијалне резултате у том правцу постигао је Гротендик педесетих година прошлог века. На овом месту нећем детаљно улазити у ову расправу.

Једном када се зада разумна норма на $A \otimes_{alg} B$ могуће је извршити комплетирање добијеног нормираног простора (јер по правилу неће бити комплетан), и тако добијено комплетирање називамо тензорски производ Банахових простора A и B и означавамо са $A \otimes B$, стављајући ознаку за одабрану норму у индекс, јер се у зависности од норме, комплетирања простора $A \otimes_{alg} B$ могу разликовати и као скупови.

Међутим, када је реч о Хилбертовим просторима, онда норма потиче од скаларног производа, за који захтевамо да не елементарним тензорима узима вредност

$$\langle a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle \langle b_1, b_2 \rangle \,, \tag{8}$$

при чему се на десној страни налазе постојећи скаларни производи у A, односно B. Није тешко проверити да је (8) коректно задат услов, односно да је сагласан са релацијама (4). Тај услов чини да је скаларни производ на $A \otimes_{alg} B$ јединствено задат. Комплетирање простора $A \otimes_{alg} B$ у односу на норму која проистиче из (8) називамо тензорски производ Хилбертових простора A и B и означавамо са $A \otimes B$

Задаци

1. Показати да важе следећи изоморфизми
а) $H \oplus H \cong H \otimes \mathbf{C}^2$, где је H Хилбертов простор над пољем $\mathbf{C}$;
б) $H^{\oplus n} := \underbrace{H \oplus H \oplus \cdots \oplus H}_{n} \cong H \otimes \mathbf{C}^n$;
в) $H^{\oplus\infty} \cong H \otimes H_0$, где је $H^{\oplus\infty}$ скуп свих низова (a_j), $j = 1, 2, \ldots$, $a_j \in H$ таквих да $\sum ||a_j||^2 < +\infty$ са скаларним производом $\langle (a_j), (b_j) \rangle = \sum \langle a_j, b_j \rangle$, док је H_0 произвољан сепарабилан Хилбертов простор.

2. Нека је K компактан Хаусдорфов простор. Доказати да је

$$C(K) \otimes_{alg} C(K) \cong W = \{\sum_{j=1}^{n} f_j(x) g_j(y) \mid f_j, g_j \in C(K)\} \subseteq C(K \times K).$$

Показати да је скуп W густ у простору $C(K \times K)$ са стандардном нормом.

3. Доказати да је $L^2(X,\mu) \otimes L^2(Y,\nu) \cong L^2(X \times Y, \mu \otimes \nu)$, ако је на десној страни реч о Хилбертовом тензорском производу.

4. Доказати да отворена јединична кугла у бесконачно димензионалном Хилбертовом простору није слабо отворен скуп.

5. Нека је X компактан тополошки простор и μ комплексна Борелова мера (или коначна позитивна), E Банахов простор и нека је $f : X \to E$ непрекидна функција. Доказати да је f Бохнер интеграбилна.

6. Наћи све крајње тачке јединичне кугле у просторима $L^1(0,1)$, $C[0,1]$ и H - произвољан Хилбертов простор.

7. Доказати да отворена јединична кугла у простору l^1 није слабо отворен скуп, без обзира на чињеницу да је у том простору јака конвергенција низа еквивалентна слабој.

8. Доказати да важи изоморфизам $H \otimes_{alg} H \cong \mathcal{K}_0(H)$, где је $\mathcal{K}_0(H)$ ознака за операторе коначног ранга на H.

[*Упозорење:* Обратити пажњу на то да пресликавање $H \ni y \mapsto \Lambda_y \in H$, $\Lambda_y(x) = \langle x, y\rangle$ није линеарно него антилинеарно (важи $\Lambda_{\alpha x+\beta y} = \bar{\alpha}\Lambda_x + \bar{\beta}\Lambda y$), па за изоморфизам $H^* \cong H$ треба насловљеном пресликавању прикомпоновати неку антилинеарну изометрију, на пример $\sum a_\alpha e_\alpha \mapsto \sum \bar{a}_\alpha e_\alpha$, где је e_α нека ортонормирана база. Без тога могуће је само доказати $H^* \cong H^{op}$, где је H^{op} Хилбертов простор који се поклапа са H као скуп и као Абелова група, али се множење скаларом дефинише са $(\alpha, x) \mapsto \bar{\alpha}x$, а скаларни производ са $(x, y) \mapsto \langle y, x\rangle$. Слична ситуација, појавиће се и у овом задатку.]

[*Примедба.* Норма на $\mathcal{K}_0(H)$ која потиче од скаларног производа (8) назива се *Хилберт-Шмитова* или *Фробениусова* норма. Тачке добијене комплетирањем простора $\mathcal{K}_0(H)$ у тој норми могу се идентификовати са неким (не свим) компактним операторима и они се називају *Хилберт-Шмитови* оператори.]

9. Нека је A векторски простор над пољем $\mathbf{F}$, димензије n, са базом $e_1, \dots, e_n$ и нека је $\mathbf{K}$ раширење поља $\mathbf{F}$. Доказати да се на скупу $A \otimes \mathbf{K}$ може задати множење скаларом из $\mathbf{K}$ помоћу

$$\mathbf{K} \times (A \otimes \mathbf{K}) \ni (\lambda, a \otimes \alpha) \mapsto a \otimes (\lambda\alpha) \in A \otimes \mathbf{K}.$$

(То значи да треба доказати да је дефиниција коректна.) Доказати и да је са таквим множењем $A \otimes \mathbf{K}$ векторски простор над $\mathbf{K}$ чију једну базу чине вектори $e_j \otimes 1_{\mathbf{K}}$ ($1_{\mathbf{K}}$ је јединица поља $\mathbf{K}$), $1 \le j \le n$.

[*Примедба.* Ово је уобичајени поступак замене (ширења) поља скалара, при томе невезан за коначно димензионалност. Када је $\mathbf{F} = \mathbf{R}$, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ реч је о тзв. *комплексификацији*. На пример, $C_{\mathbf{R}}(K) \otimes \mathbf{C} \cong C(K)$.]

2. БАНАХОВЕ АЛГЕБРЕ

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

2.1. Дефиниција. Банахова алгебра је Банахов простор A (над пољем $\mathbf{C}$ или $\mathbf{R}$) са додатном операцијом множења $A \times A \to A$ која задовољава следеће:

(1) $a(b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac + bc$, $\lambda(ab) = (\lambda a)b$, $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;

(2) $||ab|| \le ||a||\ ||b||$.

Ако у Банаховој алгебри постоји јединични елемент (означаваћемо га са 1), онда је зовемо унитална. Ако је A Банахова алгебра, онда је $A_1 = A \times \mathbf{C}$ са дефинисаним операцијама:

$$(a,\lambda) + (b,\mu) = (a+b, \lambda+\mu), \quad \mu(a,\lambda) = (\mu a, \lambda\mu), \quad (a,\lambda)(b,\mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$

и нормом

$$||(a,\lambda)|| = ||a|| + |\lambda|$$

такође Банахова алгебра, и то унитална. Јединични елемент је $(0,1)$. Такву алгебру зовемо унитализација алгебре A, и означавамо је са A_1.

Примедба. A_1 се може конструисати и када је A већ унитална. Норма на A_1 се може задати на више начина. Наведен је један од могућих.

Уколико множење у Банаховој алгебри A задовољава закон комутативности, онда ту алгебру зовемо комутативна.

2.2. Примери.

(1) Простор непрекидних функција $C(K)$ на неком компактном Хаусдорфовом простору K, са множењем дефинсаним тачка по тачка, је комутативна Банахова лагебра са јединицом. Јединица је функција свуда једнака 1. Простор $C_0(\Omega)$ непрекидних функција које се анулирају у бесконачности, на неком локално компактном Хаусдорфовом простору Ω је комутативна Банахова алгебра без јединице. Њена унитализација је изоморфна алгебри $C(\hat{\Omega})$, где $\hat{\Omega}$ означава Александровљеву компактификацију (или компактификацију тачком) простора Ω.

(2) Простор аналитичких функција $A(D)$ на затвореном јединичном диску D (у ствари аналитичких у унутрашњости и непрекидних на рубу) са $\sup$ нормом је комутативна Банахова алгебра са јединицом. То је подалгебра алгебре $C(D)$.

(3) Простор есенцијално ограничених функција $L^\infty(\Omega)$ на неком простору са мером (Ω,μ) је комутативна Банахова алгебра са јединицом, ако се множење уведе као тачка по тачка.

(4) Ако је X Банахов простор, онда је скуп $B(X)$ свих ограничених оператора на њему Банахова алгебра са јединицом, ако се множење уведе као слагање пресликавања. У својству јединице узимамо јединични оператор I.

(5) Скуп $L^1(\mathbf{R}^n)$ је једна Банахова алгебра, ако се множење уведе помоћу конволуције

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ова Банахова алгебра је комутативна и нема јединицу. Она се мже видети и као подалгебра Банахове алгебре свих комплексних Борелових мера на $\mathbf{R}^n$, где је множење такође уведено помоћу конволуције.

$$(\lambda * \mu)(E) = \int_{\mathbf{R}^n}\int_{\mathbf{R}^n} \chi_E(x+y)\,\mathrm{d}\lambda(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$$

Последња алгебра је комутативна и има јединицу - Диракову меру.

2.3. Став. Свака Банахова алгебра је изометрички изоморфна некој подалгебри алгебре $B(X)$ за неки Банахов простор X.

Доказ. Елементу $a \in A$ доделимо оператор левог множења L_a на њеној унитализацији A_1, дат са $L_a(x) = ax$. Очигледно важи

$$L_{\lambda a+\mu b} = \lambda L_a + \mu L_b, \quad L_{\lambda a} = \lambda L_a, \quad L_{ab} = L_a L_b,$$

па је пресликавање $A \ni a \mapsto L_a \in B(A_1)$ (алгебарски) хомоморфизам. Докажимо и да је изометрично. Из $||L_a(x)|| = ||ax|| \leq ||a||\,||x||$ следи $||L_a|| \leq ||a||$. Обратну неједнакост добијамо стављајући $x = 1$, јер је $||L_a|| \geq ||L_a(1)||/||1|| = ||a||$. Отуда је наше пресликавање изометрично, а тиме и $1-1$. ☐

2.4. Целе функције. Ако је $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ цела функција задата степеним редом $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$, онда ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n a^n$ апсолутно конвергира у алгебри A, за сваки елемент $a \in A$. Суму тог реда означаваћемо са $f(a)$.

Једноставном манипулацијом са редовима налазимо да је

$$(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a), \quad (f \cdot g)(a) = f(a)g(a) = g(a)f(a).$$

Посебно, скуп

$$\{f(a) \mid f \text{ цела функција}\}$$

је комутативна подалгебра Банахове алгебре A, садржи све полиноме од a, а садржана је у Банаховој алгебри генерисаној елементом a.

Иначе, Банахова алгебра генерисана елементом a је минималана подалгебра алгебре A која садржи a. Она се може добити или као пресек свих подалгебри алгебре A које садрже a, или као затворење у норми скупа свих полинома од a. Она је увек комутативна.

Посебно, користићемо експоненцијалну функцију

$$e^a = \exp a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}.$$

2.5. Лема. Следећи услови су еквивалентни:

1) постоји природан број $n \in \mathbf{N}$, такав да је $||a^n|| < 1$;

2) Ред $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$ конвергира у норми алгебре A.

У том случају је $1-a$ инвертибилан елемент и још је $(1-a)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n$.

Доказ. 1) $\Rightarrow$ 2) Ако је $k \in \mathbf{N}$ онда постоје његов целобројни количник p при дељењу са n и остатак q, па је

$$||a^k|| = ||a^{pn+q}|| \leq ||a^q|| \cdot ||a^n||^p \leq \sup_{0 \leq q \leq n-1} ||a^q|| \cdot ||a^n||^p.$$

2) $\Rightarrow$ 1) Ако ред конвергира у норми, онда му општи члан у норми тежи ка нули.

Најзад, непосредном провером, ако означимо $s_N = \sum_0^N a^n$, налазимо $as_N = s_N a = 1 - a^{N+1}$, одакле граничним прелазом добијамо тражено.

2.6. Група инвертибилних елемената. Нека је A Банахова алгебра и $a \in A$. Кажемо да је a *лево инвертибилан* ако постоји $b \in A$, зовемо га *леви инверз*, такво да је $ba = 1$, а *десно инвертибилан* ако постоји $b \in A$, *десни инверз* са особином $ab = 1$. Елемент a је *инвертибилан* ако је и лево и десно инвертибилан. Леви и десни инверз инвертибилног елемента се поклапају. Заиста, ако је y' леви, а y'' десни инверз инвертибилног елемента x, онда је

$$y' = y'1 = y'xy'' = 1y'' = y''.$$

Скуп свих инвертибилних елемената алгебре A означаваћемо са $G(A)$ или само G ако је јасно о којој алгебри се ради. Очито је G група у односу на множење, јер је инерзни елемент елементу xy^{-1} дат са yx^{-1}.

Даље $G(A)$ садржи све елементе облика $\exp a$, $a \in A$, јер последњи има за инверзни елемент $\exp(-a)$.

Мање очигледно је да је скуп $G(A)$ отворен подскуп у A. Наиме, ако $x \in G(A)$, и $\varepsilon = 1/||x^{-1}||$ онда је кугла $K(a;\varepsilon)$ садржана у $G(A)$. Заиста, ако је $||x-y|| < \varepsilon$, онда је $||-(y-x)x^{-1}|| \le \varepsilon||x^{-1}|| < 1$, (и слично $||-x^{-1}(y-x)|| < 1$, па су према Леми 2.5 елементи $1+(y-x)x^{-1} = yx^{-1}$ и $1+x^{-1}(y-x) = x^{-1}y$ инвертибилни. С друге стране непосредном провером налазимо да је $x^{-1}(yx^{-1})^{-1}$ десни инверз за y, а $(x^{-1}y)^{-1}x^{-1}$ леви.

Подгрупа E групе $G(A)$ генерисана елементима облика $\exp a$, $a \in A$ је њена нормална подгрупа. Заиста, ако су $a, z \in A$, онда је

$$z^{-1}(\exp a)z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{-1}a^n z}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z^{-1}az)^n}{n!} = \exp(z^{-1}az),$$

што је довољно јер је сваки елемент подгрупе E облика $y = \exp a_1 \dots \exp a_k$, и очито важи

$$z^{-1}yz = \exp(z^{-1}a_1z)\dots\exp(z^{-1}a_kz) \in E.$$

2.7. Спектар. Спектар елемента a је скуп

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid a - \lambda 1 \notin G(A)\},$$

док је његов резолвентни скуп

$$\rho(a) = \mathbf{C} \setminus \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid a - \lambda 1 \in G(A)\}.$$

Резолвента елемента $a \in A$ је функција $R_a : \rho(a) \to A$, дата са

$$R_a(\lambda) = (\lambda 1 - a)^{-1}.$$

2.8. Став. Спектар елемента a је непразан компактан подскуп скупа $\mathbf{C}$. Резолвента је аналитичка функција.

Доказ. 1° Резолвентни скуп је отворен. Заиста, ако $\lambda \in \rho(a)$, онда $\lambda 1 - a \in G(A)$, па ако је $|\mu| < \varepsilon$, онда $||\mu 1|| < \varepsilon$, и (због отворености скупа G) $(\lambda+\mu)1 - a \in G$. Одатле је $\sigma(a)$ затворен скуп.

2° Ако је $|\lambda| > ||a||$, онда $\lambda \in \rho(a)$. Заиста, у том случају је норма елемента $\frac{1}{\lambda}a$ мања од 1, па је према Леми 2.5 елемент $1 - \frac{1}{\lambda}a$ инвертибилан, а са њим и $\lambda 1 - a$. Отуда је $\sigma(a) \subseteq K[0, ||a||]$, па је спектар ограничен, а како је затворен онда је и компактан.

3° Резолвента је аналитичка функција. Заиста, за довољно мало μ имамо

$$R_a(\lambda+\mu) = (\lambda 1 + \mu 1 - a)^{-1} = -(1 - R_a(\lambda)\mu)^{-1}R_a(\lambda) = -\sum_{n=0}^{+\infty} R_a(\lambda)^{n+1}\mu^n.$$

4° Спектар је непразан. Заиста, претпоставимо супротно. Тада је резолвента цела функција. Шта више, за λ довољно велико, имамо

$$||(\lambda 1 - a)^{-1}|| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{||a||}{|\lambda|}\right)^n = \frac{1}{|\lambda| - ||a||} \to 0, \tag{1}$$

кад $|\lambda| \to \infty$. Отуда је, за сваки функционал $\Lambda \in A^*$, пресликавање $\mathbf{C} \ni \lambda \mapsto \Lambda((\lambda 1 - a)^{-1})$ цела ограничена функција, па мора бити константна (Лјувилова теорема). И више, због (1), та функција тежи ка нули у обесконачности, па за све $\Lambda \in A^*$ и све $\lambda \in C$ имамо $\Lambda((\lambda 1 - a)^{-1}) = 0$, па према Хан-Банаховој теореми, важи $(\lambda 1 - a)^{-1} = 0$, што чини контрадикцију.

2.9. Последица [Гељфанд-Мазур]. Ако је A Банахова алгебра у којој је сваки елемент различит од нуле инвертибилан, онда је A изометрички изоморфна пољу $\mathbf{C}$.

Доказ. Нека је $a \in A$. Како је спектар непразан, постоји $\lambda \in \mathbf{C}$, такво да $\lambda 1 - a \notin G = A \setminus \{0\}$, тј. $a = \lambda 1$. Такво λ је, разумљиво, јединствено. Отуда је $A = \{\lambda 1 \mid \lambda \in \mathbf{C}\}$. □

2.10. Став. За свака два елемента $x, y \in A$ важи $\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$.

Доказ. Претпоставимо да је елемент $1 - xy$ инвертибилан. Једноставном провером установљавамо да је $1 + y(1-xy)^{-1}x$ инверзни елемент за $1 - yx$. Заиста,

$$(1-yx)(1+y(1-xy)^{-1}x) = 1-yx+y(1-xy)^{-1}x-yxy(1-xy)^{-1}x = 1-yx+y(1-xy)(1-xy)^{-1}x = 1,$$

и слично за обратан производ.

Доказ је завршен ако претходно расуђивање применимо на $\lambda^{-1}x$ и y. □

2.11. Аналитички функционални рачун. Нека је $a \in A$, и нека $\mathcal{H}(\sigma(a))$ означава скуп свих функција холоморфних у некој околини спектра $\sigma(a)$. Дефинишемо пресликавање

$$\Psi_a : \mathcal{H}(\sigma(a)) \to A, \qquad \Psi_a(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda 1 - a)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda, \tag{2}$$

где је Γ произвољна контура која обухвата спектар $\sigma(a)$, а садржана је у домену функције f. Пре свега треба доказати да дефиниција не зависи од избора контуре Γ, а за то је довољно показати да је интеграл у (2) једнак нули, ако је $\operatorname{int}\Gamma$ садржано у $\rho(a)$. Међутим, то је очигледно, јер је онда подинтегрална функција (слабо) аналитичка у унутрашњости контуре Γ.

Саīласносӣ ӣресликавања Ψ_a са алīебарским оӣерацијама. Пресликавање Ψ_a је очигледно линеарно. Докажимо и да је мултипликативно. У доказу ћемо користити такозвани Хилбертов идентитет

$$R_a(\lambda)R_a(\mu) = -\frac{R_a(\lambda) - R_a(\mu)}{\lambda - \mu}, \tag{3}$$

који се једноставно изводи на следећи начин:

$$R_a(\lambda)R_a(\mu) = \frac{1}{\lambda-\mu}R_a(\lambda)((\lambda 1 - a) - (\mu 1 - a))R_a(\mu) = \frac{1}{\lambda - \mu}(R_a(\mu) - R_a(\lambda)).$$

Вратимо се доказу мултипликативности. Уочимо две контуре Γ_1 и Γ_2 тако да прва припада унутрашњости друге. Имамо, на основу Фубинијеве теореме

$$\begin{aligned}\Psi_a(f)\Psi_a(g) =& \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)R_a(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \int_{\Gamma_2} g(\mu)R_a(\mu)\,\mathrm{d}\mu = \\ =& -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\lambda)g(\mu)}{\lambda-\mu}[R_a(\lambda) - R_a(\mu)]\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\mu = \\ =& -\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)\left(\int_{\Gamma_2}\frac{g(\mu)}{\lambda-\mu}\,\mathrm{d}\mu\right)R_a(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + \\ & + \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma_2} g(\mu)\left(\int_{\Gamma_1}\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu}\,\mathrm{d}\lambda\right)R_a(\mu)\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Међутим, за фиксирано $\lambda \in \Gamma_1$, функција $\mu \mapsto g(\mu)/(\lambda-\mu)$ има прост пол у тачки $\lambda \in \operatorname{int}\Gamma_2$, па је $\int_{\Gamma_2} g(\mu)/(\lambda-\mu)\,\mathrm{d}\mu = -2\pi i g(\lambda)$, док је за фиксирано $\mu \in \Gamma_2$ функција $\lambda \mapsto f(\lambda)/(\lambda-\mu)$ аналитичка у унутрашњости контуре Γ_1, па је $\int_{\Gamma_1} f(\lambda)/(\lambda-\mu)\,\mathrm{d}\lambda = 0$. Тако је

$$\Psi_a(f)\Psi_a(g) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)g(\lambda)R_a(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \Psi_a(fg).$$

Неӣрекидносӣ ӣресликавања Ψ_a. Ако су f_n, f холоморфне функције у области $U \supseteq \sigma(a)$, и ако f_n равномерно тежи ка f на компактима садржаним у U тада $\Psi_a(f_n)$ тежи ка $\Psi_a(f)$ у норми алгебре A.

Заиста, нека је Γ нека ректифицијабилна контура садржана у U која обухвата $\sigma(a)$, нека је l њена дужина, и нека је M максимум $||R_a(\lambda)||$ кад $\lambda \in \Gamma$. Тада је

$$||\Psi_a(f_n) - \Psi_a(f)|| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |f_n(\lambda) - f(\lambda)|\,||R_\alpha(\lambda)||\,|\mathrm{d}\lambda| \leq \frac{1}{2\pi}lM\sup_{\lambda\in\Gamma}|f_n(\lambda) - f(\lambda)| \to 0.$$

Примедба: Овде није прецизно говорити о нормираној алгебри $\mathcal{H}(\sigma(a))$, са нормом $||f|| = \max_{\lambda\in\sigma(a)}|f(\lambda)|$, јер $\sigma(a)$ може бити коначан, чак једночлан скуп, па се различите аналитичке функције у околини спектра могу на њему поклапати. Такође, није добро ни претпоставити само да $f_n \rightrightarrows f$ на $\sigma(a)$, јер се може догодити да домени функција f_n у пресеку имају само $\sigma(a)$, као и да граница скупа $\sigma(a)$ не буде ректифицијабилна контура, чак да уопште не буде крива.

Саīласносӣ са одељком 2.4. У наведеном одељку деифнисали смо целу функцију од елемента a. Како је свака цела функција аналитичка у околини $\sigma(a)$, фер је да се покаже да за целу f, пресликавање $\Psi_a(f)$ за резултат управо има $f(a)$ (у смислу одељка 2.4).

Функције $f_0(\lambda)\equiv 1$ и $f_1(\lambda)=\lambda$ су целе, па се за контуру Γ може узети круг C_R полупречника $R>||a||$. На контури C_R важи развој

$$R_a(\lambda)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{\lambda^{n+1}},$$

чијом интеграцијом члан по члан налазимо:

$$\Psi_a(f_0)=1,\qquad \Psi_a(f_1)=a.$$

Због линеарности и мултипликативности, онда је и за сваки полином p, $\Psi_a(p)=p(a)$, а због непрекидности пресликавања Ψ_a и за сваку целу функцију f важи исто: $\Psi_a(f)=f(a)$ у смислу дефиниције одељка 2.4. Тако за $f\in\mathcal{H}(\sigma(a))$ дефинишемо:

$$f(a)=\Psi_a(f).$$

2.12. Теорема о пресликавању спектра. Нека је $f\in\mathcal{H}(\sigma(a))$. Тада је

$$\sigma(f(a))=f(\sigma(a)).$$

Доказ. Пре свега, приметимо да је скуп $f(\sigma(a))$ компактан. Ако $\mu\notin f(\sigma(a))$, онда функција $h(\lambda)=1/(f(\lambda)-\mu)$ припада $\mathcal{H}(\sigma(a))$, и важи $h(\lambda)(f(\lambda)-\mu)=1$, у околини $\sigma(a)$. Због мултипликативности функционалног рачуна, имамо

$$h(a)(f(a)-\mu)=1,$$

одакле је $h(a)$ инверз за $f(a)-\mu$, па $\mu\notin\sigma(f(a))$. Посебно, ако f нема нула на $\sigma(a)$, онда је $f(a)$ инвертибилан.

Тако је $\sigma(f(a))\subseteq f(\sigma(a))$. Докажимо и обратну инклузију.

Нека $\mu\in f(\sigma(a))$. То значи да функција $\lambda\mapsto f(\lambda)-\mu$, има нулу у скупу $\sigma(a)$. Због комапктности скупа $\sigma(a)$ њих може бити само коначно много (у противном би због теореме о јединости било $f(\lambda)-\mu\equiv 0$). Нека су то, рецимо, $\lambda_1,\dots,\lambda_k$, и нека су њихове вишеструкости редом $n_1,\dots,n_k$. Тада постоји функција $g(\lambda)$ која нема нула у $\sigma(a)$ таква да је

$$f(\lambda)-\mu=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\dots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}g(\lambda).$$

Због мултипликативности функционалног рачуна, онда важи

$$f(a)-\mu 1=(a-\lambda_1 1)^{n_1}\dots(a-\lambda_k 1)^{n_k}g(a),$$

при чему знамо да $g(a)$ има инверз (према већ доказаном). Ако претпоставимо да $\mu\notin\sigma(f(a))$, онда је и $f(a)-\mu 1$ инвертибилан, па је такав и $(a-\lambda_1 1)^{n_1}\dots(a-\lambda_k 1)^{n_k}$. Међутим, последње је немогуће, јер је реч о производу међусобно комутативних неинвертибилних елмената. (Заиста, ако је $xy=yx$ и xy има инверз z, онда је yz десни, а zy леви инверз за x.) Отуда $\mu\in\sigma(f(a))$. □

2.13. Спектрални радијус. *Сӣекӣрални радијус* дефинишемо као

$$r(a)=\sup\{|\lambda|\mid\lambda\in\sigma(a)\}.$$

Због Става 2.8 важи $r(a)\le||a||$. Међутим, може се добити и прецизније. Наиме важи

$$r(a)=\inf_{n\ge1}||a^n||^{1/n}=\lim_{n\to+\infty}||a^n||^{1/n}. \tag{4}$$

Доказ. Посматрајмо низ $\alpha_n=||a^n||^{1/n}$. Нека су $k,\,n\in\mathbf{N}$, и нека је p количник, а q остатак при целобројном дељењу n са k, тј. $n=pk+q$. Тада, ако означимо $C_k=\max\limits_{0\le q\le k-1}||a^q||$ имамо

$$||a^n||=||a^{pk+q}||\le||a^k||^p||a^q||\le C_k||a^k||^p,$$

одакле је
$$||a^n||^{1/n} \le C_k^{1/n} ||a^k||^{p/(pk+q)} = C_k^{1/n} ||a^k||^{(n-q)/kn},$$
па када прођемо горњим лимесом кад $n \to +\infty$ налазимо
$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} ||a^n||^{1/n} \le ||a^k||^{1/k}.$$
Када се последња неједнакост нападне инфимумом по свим k добијамо другу једнакост у (4).

Даље, нека је $|\lambda| > ||a^n||^{1/n}$ за неко $n \in \mathbf{N}$. Тада је $||(a/\lambda)^n|| < 1$, па је према Леми 2.5, елемент $1 - a/\lambda$ инвертибилан, а са њим и $\lambda 1 - a$, па $\lambda \notin \sigma(a)$. Тако је $r(a) \le \inf_{n\ge1} ||a^n||^{1/n}$.

Најзад, нека је $R > r(a)$. Тада круг C_R полупречника R са центром у координатном почетку обухвата $\sigma(a)$, па је према одељку 2.11,
$$a^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \lambda^n (\lambda 1 - a)^{-1} \, \mathrm{d}\lambda,$$
одакле добијамо
$$||a^n|| \le \frac{1}{2\pi} R^n \max_{\lambda\in C_R} ||(\lambda 1 - a)^{-1}|| 2\pi R = R^{n+1} M_R,$$
ако је M_R ознака за $\max\limits_{\lambda\in C_R} ||(\lambda 1 - a)^{-1}||$. Узимајући лимес кад $n \to +\infty$ налазимо да важи
$$\lim_{n\to+\infty} ||a^n||^{1/n} \le R,$$
што је довољно, јер R може бити произвољно блиско $r(a)$. $\square$

2.14. Хомоморфизми и идеали. Хомоморфизам Банахових алгебри A и B је ограничено линеарно пресликавање $\varphi : A \to B$, које је још и мултипликативно, тј. важи $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$ за све $a_1, a_2 \in A$.

Банахов потпростор J алгебре A назива се *леви идеал* ако је $JA \subseteq J$, то јест из $x \in J$, $y \in A$ следи $xy \in J$, а *десни идеал* ако је $AJ \subseteq J$, односно ако из $x \in J$, $y \in A$ следи $yx \in A$. Ако је једновремено и леви и десни идеал онда га називамо *двострани идеал*, или краће само *идеал*.

Ако је $\varphi : A \to B$ хомоморфизам, онда је његово језгро $\ker\varphi = \{x \in A \mid \varphi(x) = 0\}$ идеал у алгебри A. Заиста, $\ker\varphi$ је очигледно линеаран потпростор и затворен је, јер је φ ограничен. Најзад, ако $x \in \ker\varphi$ и $y \in A$, онда је $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 0\varphi(y) = 0$, и слично $\varphi(yx) = 0$, па оба xy, $yx \in \ker\varphi$.

Обратно, ако је J идеал у A, онда је он језгро неког хомоморфизма. Да бисмо се у то уверили прво ћемо конструисати количничку алгебру A/J. Одмах се види да је реч о Банаховом простору, јер је J затворен линеаран потпростор. Треба још показати да је у J множење коректно дефинисано, као и одговарајућу неједнакост норми.

Дакле, ако је $x \sim x_1$ и $y \sim y_1$, онда $x - x_1, y - y_1 \in J$, па је $xy - x_1 y_1 = x(y - y_1) + (x - x_1)y_1 \in J$, јер је J обострани идеал, па је $xy \sim x_1 y_1$, чиме смо доказали да је множење коректно дефинисано. Докажимо неједнакост $||xy + J|| \le ||x + J|| \, ||y + J||$. Постоје z_1 и $z_2 \in J$ такви да је $||x + J|| + \varepsilon \ge ||x + z_1||$ и $||y + J|| + \varepsilon \ge ||y + z_2||$. Елемент $z_1 y + x z_2 + z_1 z_2$ припада J, па је
$$||xy + J|| \le ||xy + z_1 y + x z_2 + z_1 z_2|| = ||(x + z_1)(y + z_2)|| \le (||x + J|| + \varepsilon)(||y + J|| + \varepsilon),$$
одакле следи тражена неједнакост, јер ε може бити произвољно мало.

Алгебру A/J називамо *количничка алгебра*.

Ако је J идеал у A, онда је J језгро количничког хомоморфизма $\pi : A \to A/J$ датог са $\pi(x) = x + J$. Очигледно је реч о хомоморфизму, као и да је $||\pi|| \le 1$. С друге стране, ако је $\pi(x) = 0$, онда очито $x \in J$.

ГЕЉФАНДОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА

Током читавог даљег материјала претпостављаћемо да је A унитална комутативна Банахова алгебра

2.15. Дефиниција. Нетривијално, линеарно и мултипликативно пресликавање алгебре A у поље $\mathbf{C}$ назива се *карактер*.

Карактери имају следећа својства која се једноставно доказују:

Прво, $\varphi(1) = 1$. Заиста, због мултипликативности је $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = \varphi(x)\varphi(1)$. Како је φ нетривијалан, постоји x за које је $\varphi(x) \neq 0$, па можемо да га скратимо.

Друго, за инвертибилне x је $\varphi(x) \neq 0$. Заиста, тада је $1 = \varphi(1) = \varphi(x)\varphi(x^{-1})$.

Треће, $||\varphi|| = 1$. Заиста, нека је $||x|| < 1$, и $|\lambda| \geq 1$. Тада је елемент $1 - x/\lambda$ инвертибилан, па је $0 \neq \varphi(1 - x/\lambda) = 1 - \varphi(x)/\lambda$, тј. $\varphi(x) \neq \lambda$. Дакле, $\varphi(x)$ не може бити по модулу веће или једнако од 1. Тако је $||\varphi|| \leq 1$, а једнака је, јер је $\varphi(1) = 1$.

Дакле, сваки карактер је нужно ограничено пресликавање, односно он је с једне стране хомоморфизам алгебри, а са друге стране елемент дуалног простора A^*.

Идеал J алгебре A назива се *својствен* или *прави* ако је различит од $\{0\}$ и A. Прави идеал се назива *максималан* ако није садржан ни у једном другом правом идеалу. Егзистенција максималног идеала следује из Цорнове леме.

Идеал је прави ако и само ако не садржи ниједан инвертибилан елемент. Заиста тада би морао да садржи и елемент 1, а тиме и све елементе алгебре A. Обратно је тривијално.

Ако је J идеал (само у алгебраском смислу) онда је и његово затворење $\overline{J}$ такође идеал - тривијално.

Сваки максималан идеал је затворен. Заиста, ако је J максималан идеал, онда је и $\overline{J}$ такође идеал. Међутим $J \cap G(A) = \emptyset$, јер је J својствен, а како је $G(A)$ отворен скуп, то је и $\overline{J} \cap G(A) = \emptyset$, односно и $\overline{J}$ је својствен. Одатле следи да је $J = \overline{J}$.

2.16. Став. Идеал J у A је максималан ако и само ако је језгро неког карактера.

Доказ. Нека је J максималан, и нека $x \in A \setminus J$. Скуп $\{a + bx \mid a \in J, b \in A\}$ је идеал - лако се види - и строго је већи од J, па мора бити једнак целој A. Отуда постоје $a \in J$, $b \in A$ такви да је $a + bx = 1$. Међутим, тада је $(x + J)(b + J) = xb + J = 1 - a + J = 1 + J$, па је $x + J$ инвертибилан у количничкој алгебри A/J. Према Гељфанд-Мазуровој теореми $A/J \equiv \mathbf{C}$, па је количничко пресликавање $\pi : A \to A/J$ карактер, а J је његово језгро.

Нека је J језгро карактера φ. У одељку 2.14 видели смо да је J идеал, а максималан је јер му је кодимензија једнака 1. $\square$

2.17. Простор максималних идела. Како је сваки функционал потпуно одређен својим језгром, према прећашњем ставу, постоји узајамно једнозначна коресподенција између скупа свих максималних идеала и скупа свих карактера. Тај скуп означаваћемо са Δ или $\Delta(A)$ уколико постоји потреба да се нагласи о којој је алгебри реч, и зваћемо га *простор максималних идеала*. Δ није само аморфан скуп, већ се може на природан начин снабдети топологијом. Наиме, $\Delta \subseteq A^*$, и на Δ ћемо увести слабу-* топологију наслеђену са A^*.

Радикал алгебре A у ознаци $\operatorname{rad} A$ је пресек свих максималних идеала, односно $\operatorname{rad} A = \bigcap_{J \in \Delta} J$.

2.18. Став. Простор максималних идеала Δ је компактан и Хаусдорфов у односу на слабу-* топологију.

Доказ. Δ је подскуп јединичне лопте K у простору A^* која је, према Банах-Алаоглуовој теореми, компактна (и Хаусдорфова) у слабој-* топологији. Према томе, довољно је доказати да је Δ затворен подскуп јединичне сфере у A^*, односно да је свака атхерентна тачка скупа Δ (у S) мултипликативан функционал норме 1.

Нека је $\varphi \in K$ атхерентна тачка скупа Δ. То значи да за сваку базну (у слабој-* топологији) околину B нуле, скуп $\varphi + B$ садржи неку тачку из Δ. Нека су x, $y \in A$ произвољни, и нека је $\varepsilon > 0$ било какво. Скуп $B_{x,y,\varepsilon} = \{\Lambda \in A^* \mid |\Lambda(x)|, |\Lambda(y)|, |\Lambda(xy)| < \varepsilon\}$ је једна базна околина нуле, па постоји $\psi \in \Delta$такво да $\varphi - \psi \in B_{x,y,\varepsilon}$, одакле је

$$|\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)| \leq |\varphi(xy) - \psi(xy)| + |\psi(x)\psi(y) - \varphi(x)\varphi(y)| \leq$$
$$\leq \varepsilon + ||\psi(x)||\varepsilon + \varepsilon||\varphi(y)|| \leq \varepsilon(1 + ||x|| + ||y||),$$

што може бити произвољно мало, па је $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

И скуп $C_\varepsilon = \{\Lambda \in A^* \mid |\Lambda(1)| < \varepsilon\}$ је једна базна околина нуле, па постоји $\psi \in \Delta$ са ососбином $\varphi - \psi \in C_\varepsilon$, одакле је

$$|\varphi(1) - 1| = |\varphi(1) - \psi(1)| \leq \varepsilon,$$

одакле је $\varphi(1) = 1$, па φ има норму 1. $\square$

2.19. Дефиниција. *Гељфандова трансформација* је пресликавање $\hat{}: A \to C(\Delta)$, дато са

$$\hat{x}(\varphi) = \varphi(x).$$

Треба наравно доказати да је дефиниција коректна, односно да је $\hat{x}$ заиста непрекидна функција. Међутим, то је јасно, јер ако $\varphi_\alpha \to \varphi$ у слабој-* топологији, онда за свако $x \in A$, $\varphi_\alpha(x) \to \varphi(x)$, односно $\hat{x}(\varphi_\alpha) \to \hat{x}(\varphi)$. Више од тога, приметимо да је слаба-$*$ топологијас у ствари најслабија топологија која чини све функције $\hat{x}$, $x \in A$ непрекидним. У будуће ћемо ту топологију називати *Гељфандовска*.

Гељфандова трансформација је хомоморфизам алгебри A и $C(\Delta)$ са нормом једнаком један.

Заиста, према дефиницији је

$$\widehat{\lambda x + \mu y}(\varphi) = \varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) = (\lambda\hat{x} + \mu\hat{y})(\varphi),$$

јер је φ линеаран, па је $\hat{}$ линеарно прсликвање. Такође из мултипликативности φ следи мултипликативност Гељфандове трансформације, јер

$$\widehat{xy}(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \hat{x}(\varphi)\hat{y}(\varphi).$$

Најзад, како су сви карактери норме 1, налазимо

$$|\hat{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq ||\varphi||\,||x||,$$

одакле је $||\hat{x}|| \leq ||x||$, што је и требало показати.

2.20. Став. Гељфандова трансформација има следећа својства:

а) $\hat{1} = 1$, то јест јединични елемент се Гељфандовом трансформацијом преликава у функцију идентички једнаку један.

б) $x \in G(A)$ ако и само ако функција $\hat{x}$ не узима вредност нула;

в) $\sigma(x) = \hat{x}(\Delta)$, то јест спектар елемента x је скуп вредности његове Гељфандове трансформације. Посебно $||\hat{x}||_{C(\Delta)} = r(x)$;

г) $\ker\hat{} = \operatorname{rad} A = \{a \in A \mid r(a) = 0\}$, односно језгро Гељфандове трансформације је радикал алгебре A, и он се састоји од елемената спектралног радијуса нула.

Доказ. а) $\hat{1}(\varphi) = \varphi(1) = 1$;

б) Нека је x инвертибилан. Тада x не припада нити једном максималном идеалу, односно језгру карактера. Тако је $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x) \neq 0$ за сваки карактер $\varphi \in \Delta$. Обратно, нека x није инвертибилан. Тада је скуп $\{ax \mid a \in A\}$ идеал који не садржи јединични елемент, што значи да је својствен. Он је садржан у неком максималном идеалу, тј. постоји карактер φ_0 такав да је $\varphi_0(ax) = 0$ за све $a \in A$, па и за $a = 1$. Тако је $\hat{x}(\varphi_0) = \varphi_0(x) = 0$;

в) Следи из претходног узимајући $x - \lambda 1$ уместо x;

г) Следи из претходног. $\square$

2.21. Став. Нека је $\hat{A} = \{\hat{x} \mid x \in A\} \subseteq C(\Delta)$.

а) Алгебра A је полупроста и $\hat{A}$ је затворена подалгебра алгебре $C(\Delta)$ ако и само ако постоји константа K таква да је за све $x \in A$

$$||x^2|| \geq K||x||^2; \tag{5}$$

б) A је изометрички изоморфна са $\hat{A}$ ако и само ако је за све $x \in A$ $||x^2|| = ||x||^2$.

Доказ. Нека је $\alpha = \inf_{x\in A} ||x^2||/||x||^2$ и $\beta = \inf_{x\in A} ||\hat{x}||/||x||$. Приметимо да у алгебри $C(\Delta)$ важи $||f^2|| = ||f||^2$. Отуда је за све $x \in A$

$$\beta^2||x||^2 \leq ||\hat{x}||^2 = ||\widehat{x^2}|| \leq ||x^2||,$$

одакле је $\beta^2 \leq \alpha$. С друге стране $\alpha||x||^2 \leq ||x^2||$, одакле индукцијом добијамо $\alpha^{2^n-1}||x||^{2^n} \leq ||x^{2^n}||$, што после степеновања са $1/2^n$ и узимања лимеса постаје

$$\alpha||x|| \leq r(x) = ||\hat{x}||,$$

одакле је $\alpha \leq \beta$.

а) Нека је A полупроста и $\hat{A}$ затворена. Тада је Гељфандова трансформација инјективно пресликавање, па има непрекидно инверзно према теореми о отвореном пресликавању. То значи да је $\beta > 0$, а тиме и $\alpha > 0$. Обратно, нека је испуњен услов (5). То значи да је $\alpha > 0$ одакле одмах излази да је $\hat{}$ инјективно и ограничемо одоздо, што значи да је A полупроста и да је $\hat{A}$ затворена подалгебра;

б) Следи непосредно јер је $\alpha = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$.

2.22. Примери.

(1) Нека је $A = C(K)$, за неки компактан Хаусдорфов простор K. За фиксирано $t \in K$ пресликавање $C(K) \ni f \mapsto f(t)$ је очигледно карактер, означимо га са h_t. Покажимо да других карактера нема. Претпоставимо супротно, односно да постоји неки други карактер ψ, и његово језгро означимо са M. За било које $t \in K$, постоји функција $f \in M$, таква да је $f(t) \neq 0$. (Заиста, у супротном би M био подскуп језгра функционала h_t датог са $h_t(f) = f(t)$, па или M не би био максималан, или би било $\psi = h_t$.) Због компактности скупа K постоји коначно много $f_1, \ldots, f_n \in M$, таквих да се у свакој тачки бар једна од њих разликује од нуле. Уочимо функцију

$$g = \sum_{j=1}^{n} f_j \overline{f_j} \in M.$$

Она је свуда позитивна и нигде није нула, што значи да је инвертибилна, а како припада M то доводи до тога да је $M = C(K)$ па је $\psi \equiv 0$ - контрадикција.

Дакле, K и Δ се поклапају као скупови идентификацијом $t \leftrightarrow h_t$. Даље

$$\hat{f}(h_t) = h_t(f) = f(t),$$

што узимајући у обзир да смо поистоветили t и h_t значи да је $\hat{f} = f$. Најзад, K и Δ се поклапају и као тополошки простори. Наиме, Гељфандовска топологија на Δ је најслабија која чини све функције из $C(K)$ непрекидним, па је слабија од полазне. Она је и Хаусдорфова, а полазна је компактна, па се стога поклапају.

(2) Нека је A унитализација алегебре $L^1(\mathbf{R}^n)$ са конволуционим множењем, односно $A = L^1(\mathbf{R}^n) + \mathbf{C}\delta$, где је δ Диракова мера. Како је δ јединица те алгебре, мора бити $h(f + \alpha\delta) = h(f) + \alpha$, где је h мултипликативан на $L^1(\mathbf{R}^n)$. Према томе, треба описати све мултипликативне функционале на $L^1(\mathbf{R}^n)$, с тим што овде морамо узети у обзир и тривијалан, али њега не морамо посебно да описујемо.

Због репрезентације дуалног простора $L^1(\mathbf{R}^n)^* \equiv L^\infty(\mathbf{R}^n)$, постоји функција $g \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ таква да је

$$h(f) = \int_{\mathbf{R}^n} f(t) g(t) \,\mathrm{d}t.$$

Услов $h(f_1 * f_2) = h(f_1)h(f_2)$, своди се после краћег рачуна на $g(s+t) = g(s)g(t)$ скоро свуда у односу на производ Лебегових мера. Отуда је

$$g(t) = g(t_1, t_2, \ldots, t_n) = g(t_1, 0, \ldots, 0) g(0, t_2, \ldots, 0) g(0, 0, \ldots, t_n),$$

дакле производ функција од по једне променљиве које све задовољавају Кошијеву функционалну једначину и мерљиве су. Дакле, мора бити

$$g(t) = e^{C_1 t_1 + \cdots + C_n t_n}$$

за неке константе $C_j \in \mathbf{C}$. Да би функција остала есенцијално ограничена, све константе C_j морају бити чисто имагинарне, одосно $g(t) = e^{ix \cdot t}$ за неко $x \in \mathbf{R}^n$.

Дакле, скуп свих карактера на A, осим оног који потиче од тривијалног мултипликативног функционала на $L^1(\mathbf{R}^n)$, у скуповном смислу се поклапа са $\mathbf{R}^n$. Гељфандова трансформација се своди на

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(t) e^{ix \cdot t} \,\mathrm{d}t,$$

односно на Фуријеову трансформацију. Лебегова теорема о доминантној конвергенцији ће нас уверити да су све $\hat{f}$ непрекидне у односну на стандардну топологију на $\mathbf{R}^n$ па је она јача од Гељфандовске. Додавањем оног функционала скуп свих карактера постаје Александровљева компактификација простора $\mathbf{R}^n$. Онда је стандардна топологија компактна, а Гељфандовска Хаусдорфова па се поклапају.

Задаци

1. Наћи пример елемената x и y неке Банахове алгебре A за које је $\sigma(xy) \neq \sigma(yx)$.

2. Нека је A Банахова алгебра. $a \in A$ и $e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$. Ако је

$$a = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

доказати да је:

а) $e^a = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}$; б) $f(a) = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(3) \end{bmatrix}$, где је f нека цела функција; в) уопштити претходне тврдње.

3. Нека је A комутативна Банахова алгебра.

а) Доказати да за произвољне $a, b \in A$ важи $\sigma(a+b) \subseteq \sigma(a)+\sigma(b)$ и $\sigma(ab) \subseteq \sigma(a)\sigma(b)$. Примером показати да у некомутативном случају то не мора да буде тачно;

б) Ако A садржи *идемпотент* e (тј. $e^2 = e$), различит од 0 и 1, тада је простор максималних идеала $\Delta(A)$ неповезан. Доказати;

в) Нека елементи $a_1, \dots, a_n$ генеришу A као Банахову алгебру (тј. скуп полинома од $a_1, \dots, a_n$ је густ у A). Доказати да је пресликавање $\Phi : \Delta(A) \to \mathbf{C}^n$ дато са $\Phi(\varphi) = (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n))$ инјективно, као и да остварује хомеоморфизам између Δ и $\Phi(\Delta)$.

4. Нека је $\Delta : A \to A$, $\Delta(x) = ax - xa$. Израчунати $(e^{\Delta})(x)$.

5. Нека је $T(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ оператор на l^2. Доказати да T нема квадратни корен.

6. Нека је A Банахова алгебра. Доказати да је функција $r : A \to \mathbf{R}$ ($r(a)$ - спектрални радијус елемента a) полунепрекидна одозго.

7. Нека је $A = C^1[0,1]$ алгебра непрекидно диференцијабилних функција са нормом $||f|| = \max|f(t)| + \max|f'(t)|$. Показати да је реч о Банаховој алгебри. Доказати да је пресликавње $H : [0,1] \to \Delta(A)$, $H(t) = h_t$, (где је $h_t(f) = f(t)$) хомеоморфизам. Извести одатле, да за све $f \in A$ важи $r(f) = ||f||_{\max}$. Показати да Гељфандова трансформација у овом случају није сурјективна.

8. Линеарно пресликавање $d : A \to A$, које задовољава Лајбницово правило $d(ab) = ad(b) + d(a)b$ називамо *диференцирање*. Доказати да важи

$$d^n(ab) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} d^r(a) d^{n-r}(b) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

9. Нека је d ограничено диференцирање на униталној Банаховој алгебри A и $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ такво да важи $da = \lambda a$. Показати (користећи ограниченост $\sigma(d)$) да је елемент a нилпотентан (то јест $a^n = 0$ за неко природно n).

10. а) Нека је d ограничено диференцирање на униталној Банаховој алгебри A и елемент $a \in A$ са својством $d^2 a = 0$. Показати да је елемент da квазинилпотентан, то јест да је $r(da) = 0$.

[Упутство: Проверити $d^{n+1}(a^n) = 0$, а затим и $d^n(a^n) = n!(da)^n$.]

б) За $a \in A$ пресликавање $b \mapsto [a, b] = ab - ba$ је ограничено диференцирање на A. Извести одатле теорему Клајнеке-Широкова: ако је $[a, [a, b]] = 0$, тада је елемент $[a, b]$ квазинилпотентан.

11. Елемент $x \in A$ назива се *тополошки делитељ нуле*, ако постоји низ $y_n \in A$, таква да је $||y_n|| = 1$ и

$$\lim_{n \to +\infty} x y_n = 0 = \lim_{n \to +\infty} y_n x.$$

а) Доказати да је свака рубна тачка скупа свих инвертибилних елемената алгебре A тополошки делитељ нуле;

[Упутство: Ставити $y_n = x_n^{-1}/||x_n^{-1}||$, где $x_n \to x$]

б) Које Банахове алгебре немају тополошких делитеља, различитих од елемента 0?

12. Нека је A Банахова алгебра, a, b, a_j, $b_j \in A$ и $a_i a_j = a_j a_i$, $b_i b_j = b_j b_i$ за $i \neq j$.

а) Ако су L_a, $R_b : A \to A$ дати са $L_a(x) = ax$, $R_b(x) = xb$ доказати да је $\sigma(L_a) = \sigma(a)$ и $\sigma(R_b) = \sigma(b)$;

б) Доказати да ако $0 \notin \{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j \mid \lambda_j \in \sigma(a_j), \mu_j \in \sigma(b_j)\}$ онда једначина $\sum_{j=1}^{n} a_j x b_j = y$ има јединствено решење за свако $y \in A$;

в) Ако $\sigma(a) \cap \sigma(b) = \emptyset$, онда једначина $ax - xb = y$ има јединствено решење за свако $y \in A$.

13. Нека је $\mathfrak{S}_\infty$ скуп свих компактних оператора на неком Хилбертовом простору. Проверити да је реч о Банаховој алгебри. Доказати да у $\mathfrak{S}_\infty$ нема нетривијалних затворених идеала.

3. C*-АЛГЕБРЕ (први део)

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

3.1. Дефиниција. Нека је A Банахова алгебра. *Инволуција* на A је пресликавање $*: A \to A$, са следећим својствима:

1) $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$;

2) $(ab)^* = b^* a^*$;

3) $a^{**} = a$.

Другим речима, то је (анти)аутоморфизам степена 2.

Ако је A комутативна полупроста алгебра, онда је свака инволуција непрекидна. Наиме, ако је $h \in \Delta(A)$, тада је $\overline{h(a^*)}$ мултипликативан функционал, па је непрекидан, односно има норму једнаку један. Тада, ако $a_n \to a$, и $a_n^* \to b$, онда имамо

$$\overline{h(a^*)} = \lim_n \overline{h(a_n^*)} = \overline{h(b)},$$

одакле је $a^* = b$, па је инволуција непрекидна према теореми о затвореном графику.

Алгебра са инволуцијом се назива C^*-*алгебра* ако важи и услов:

4) $||a^* a|| = ||a||^2$.

Заправо, довољно је претпоставити да у 4) важи $\geq$. Заиста, тада је $||a||^2 \leq ||a^* a|| \leq ||a^*||\,||a||$, одакле је $||a|| \leq ||a^*||$. Обратну неједнакост добијамо заменом улога a и a^*. (Случај $a = 0$ је тривијалан, јер се, због антилинеарности, добија и $a^* = 0$.) Дакле, важи

$$||a^*|| = ||a||. \tag{1}$$

Сада се лако изводи $||a^* a|| \leq ||a^*||\ ||a|| = ||a||^2$. Дакле, и у свакој C^*-алгебри инволуција је непрекидна, штавише важи (1).

Међу C^*-алгебрама, морфизме чине такозвани $*$-*хомоморфизми*. То су ограничена мултипликативна линеарна прсликавања, која чувају инволуцију. Две C^*-алгебре сматрамо изоморфним, ако међу њима постоји бијективан и изометричан $*$-хомоморфизам, који зовемо $*$-*изоморфизам*.

Видећемо касније да је свако бијективни $*$-хомоморфизам изометричан.

3.2. Примери. Алгебре $C(K)$, $C_0(\Omega)$ и $L^\infty(\Omega)$ су C^*-алгебре са инволуцијом $f \mapsto \bar{f}$, узимањем комплексно конјугованог броја тачка по тачка. Прва и трећа су униталне, а друга није. Алгебра $L^1(\mathbf{R}^n)$ није C^*-алгебра у којој важи 4), мада ипак вачжи слабији услов (1). Последњи пример је довољно важан да се издвоји посебна класа *инволутивних Банахових алгебри* - оних Банахових алгебри у којима важе 1), 2), 3) и (1). Такве алгебре су богатија структура од обичних Банахових алгебри, а сиромашнија од C^*-алгебри. Инволутивним Банаховим алгебрама се нећемо бавити.

Алгебра $B(H)$ свих ограничених оператора на Хилбертовом простору је C^*-алгебра са инволуцијом $A \mapsto A^*$, где је A^* ознака за адјунгован оператор.

Ако C^*-алгебра није унитална, онда се она може унитализовати додавањем јединице, како је то описано у одељку 1 главе Банахове алгебре, али остаје неизвесно да ли таква унитализација испуњава C^* услов 4). Стога ћемо морати да се позабавимо друкчијим приступом.

3.3. Множитељи. За $x \in A$ дефинишемо $L_x(a) = xa$ - оператор левог множења; односно $R_x(a) = ax$ - оператор десног множења. Овакве операторе смо већ посматрали на општим Банаховим алгебрама и установили да је

$$||L_x|| = ||R_x|| = ||x|| \tag{2}$$

ако је алгебра унитална. У случају C^*-алгебри (2) важи без обзира да ли у њој постоји јединица или не.

Заиста, имамо $||L_x(a)|| = ||xa|| \leq ||x||\ ||a||$, одакле је $||L_x|| \leq ||x||$. Да бисмо се уверили у супротну нејднакост, узмимо $a = x^*$; имамо $||L_x|| \geq ||L_x(a)||/||a|| = ||x^*x||/||x^*|| = ||x||^2/||x|| = ||x||$. Тако је $||L_x|| = ||x||$. Слично се добија и $||R_x|| = ||x||$.

Подстакнути овим примером уводимо следећу дефиницију. *Множитељем* на C^*-алгебри A називамо уређен пар ограничених линеарних оператора (L, R) на A таквих да важи:

$$aL(b) = R(a)b \tag{3}$$

Множење у тој алгебри уводимо са $(L_1, R_1)(L_2, R_2) = (L_1L_2, R_2R_1)$, линеарне комбинације са $\lambda(L_1, R_1) + \mu(L_2, R_2) = (\lambda L_1 + \mu L_2, \lambda R_1 + \mu R_2)$, а инволуцију са $(L, R)^* = (R^*, L^*)$, где је $L^*(x) = L(x^*)^*$ и $R^*(x) = R(x^*)^*$. Једноставно се проверава да су резултати алгебарских операција над множитељима поново множитељи. Тако скуп свих множитеља чини једну алгебру са инволуцијом.

Пар (L_x, R_x) је посебан случај множитеља на A, јер су обе стране у (3) једнаке axb. Ако је A унитална тада су сви множитељи тог облика. Наиме, због (3) (за $a = b = 1$) важи $L(1) = R(1)$ и тај елемент означимо са x. Даље, стављајући $a = 1$ у (3) добијамо $L(b) = xb$, а стављајући $b = 1$, $R(a) = ax$. Међутим, ако A није унитална има и других множитеља што ћемо управо видети.

Мотивисани примером левог, односно десног множења, покажимо да за било који пар множитеља (L, R) важи $||L|| = ||R||$. Имамо, на основу (2)

$$||L(b)|| = \sup_{||a|| \leq 1} ||aL(b)|| = \sup_{||a|| \leq 1} ||R(a)b|| \leq \sup_{||a|| \leq 1} ||R(a)||\ ||b|| = ||R||\ ||b||,$$

одакле је $||L|| \leq ||R||$. Аналогно се добија и друга неједнакост.

Норму на алгебри множитеља уводимо са $||(L, R)|| = ||L|| = ||R||$.

3.4. Став. Алгебра множитеља је једна C^*-алгебра са јединицом, а A се може изометрички утопити у њу.

Доказ. Докажимо, прво, да је реч о C^*-норми. Довољно је доказати да је $||L||^2 \leq ||RL^*||$, јер је

$$(L, R)^*(L, R) = (R^*, L^*)(L, R) = (R^*L, RL^*).$$

Постоји $a \in A$, $||a|| = 1$, такво да је $||L||^2 - \varepsilon \leq ||L(a^*)||^2$. Даље рачунамо

$$||L||^2 - \varepsilon \leq ||L(a^*)||^2 = ||(L(a^*))^*L(a^*)|| = ||L^*(a)L(a^*)|| = ||RL^*(a)a^*|| \leq ||RL^*(a)||,$$

одакле лако добијамо тражено.

Треба још доказати комплетност. Међутим то следи из комплетности простора $L(A)$ свих линеарних ограничених оператора на A. Јединица је пар (I, I), где је $I = \mathrm{id}_A$. Најзад пресликавање $A \ni x \mapsto (L_x, R_x)$ је изометричко утапање. $\square$

Алгебру множитеља означаваћемо са $\mathcal{M}(A)$, а њену подалгебру $\{(L_x, R_x) + \alpha(I, I)\ x \in A, \alpha \in \mathbf{C}\}$ са A_1 и зваћемо је унитализација алгебре A.

Примедба. Непосредан доказ (без употребе множитеља) да се свака C^*-алгебра може унитализовати је изузетно компликован.

3.5. Самоадјунговани елементи. Елемент a C^*-алгебре A је *самоадјунгован* ако је $a^* = a$, а *нормалан*, ако је $aa^* = a^*a$.

Свако $x \in A$ може се на јединствен начин представити као $x = a + ib$, где су a и b самоадјунговани. Заиста, може се узети $a = (x + x^*)/2$ и $b = (x - x^*)/2i$. Лако се проверава да су a и b самоадјунговани, и да је $x = a + ib$. Ако претпоставимо да је $x = a' + ib'$, онда је $a - a' = i(b' - b)$, па како су и $a - a'$, $b' - b$ самоадјунговани, довољно је показати да нема самоадјунгованих елемената x и y, осим нуле, таквих да је $x = iy$. Међутим, то је једноставно, јер $-iy = (iy)^* = x^* = x = iy$.

Елементе a и b у том случају зовемо редом *реални* и *имагинарни* део елемента x.

$x = a + ib$ је нормалан ако и само ако a и b комутирају, тј. $ab = ba$. Ово се једноставно проверава, јер је $xx^* - x^*x = 2i(ba - ab)$.

Елементи облика x^*x и xx^* су самоадјунговани, што се једноставно проверава, употребом, правила 2) и 3).

Јединични елемент је самоадјунгован, јер је $1^* = 1^*1$.

Елемент x је инвертибилан ако и само ако је такав x^*, и тада је $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$, што се једноставно проверава.

3.6. Теорема [прва Гељфанд-Најмаркова]. Нека је A комутативна C^*-алгебра са јединицом. Тада је $A \cong C(\Delta)$, где је Δ простор максималних идеала. Ако је A комутативна C^*-алгебра без јединице, онда је Δ локално компактан, и $A \cong C_0(\Delta)$. Другим речима, Гељфандова трансформација је изоморфизам.

Доказ. Најпре ћемо показати да Гељфандова трансформација чува инволуцију, односно да је $\widehat{a^*} = \overline{\hat{a}}$. Довољно ће бити да докажемо да је Гељфандова трансформација самоадјунгованог елемента реалновредносна функција. Нека је $a = a^* \in A$, и нека је $h \in \Delta$, $h(a) = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$. Доказаћемо да је $\beta = 0$. Уочимо елемент $z = a + ite$. Тада је $h(z) = \alpha + i(\beta + t)$ и $z^*z = a^2 - t^2e$, и отуда

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = |h(z)|^2 \le ||z||^2 = ||z^*z|| \le ||a^2|| + t^2,$$

односно

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \le ||a^2||,$$

што је немогуће ако је $\beta \neq 0$, јер неконстантна линеарна функција не може бити ограничена.

Одатле следи да је за свако $h \in \Delta$, $\hat{a}(h) = h(a) \in \mathbf{R}$, што повлачи да Гељфандова трансформација чува инволуцију. Заиста, ако је $x = a + ib$, $x^* = a - ib$, онда је

$$\overline{\hat{x}(h)} = \overline{h(a) + ih(b)} = h(a) - ih(b) = \widehat{x^*}(h).$$

Даље, Гељфандова трансформација је изометрија. Заиста, ако је a самоадјунгован, онда је $||a||^2 = ||a^*a|| = ||a^2||$, одакле је $||\hat{a}|| = ||a|| = r(a)$. Ако a није самоадјунгован, онда $b = a^*a$ јесте, и $\hat{b} = \overline{\hat{a}}\hat{a}$, и отуда

$$||\hat{a}||^2 = ||\overline{\hat{a}}\hat{a}|| = ||\hat{b}|| = ||b|| = ||a^*a|| = ||a||^2.$$

Најзад, алгебра $\hat{A} \subseteq C(\Delta)$ садржи константне функције, затворена је (према претходном пасусу), и затворена је у односу на комплексно конјуговање. Отуда је $\hat{A} = C(\Delta)$ (Стоун-Вајерштрасова теорема).

Уколико A нема јединицу, онда применимо претходно на њену унитализацију A_1. Једини нови карактер је онај који се анулира на A, па је $\Delta(A_1) = \Delta(A) \cup \{h_\infty\}$. Крај. □

3.7. Гељфанд Најмаркови функтори. Претходна теорема доказује да постоји бијекција између скупа $\mathcal{H}$ свих Хаусдорфових локално компактних тополошких простора и скупа $\mathcal{C}$ свих комутативних C^* алгебри. То пресликавање је $C : \Omega \to C_0(\Omega)$ које простору Ω придружује алгебру непрекидних функција (које се анулирају у бесконачности), а његово инверзно је $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{H}$ које алгебри A додељује њен простор максималних идела. Претходна теорема тврди да је $C_0 \circ \Delta$ идентичко пресликавање. Да је и обратна композиција идентичка видели смо у примеру из главе Банахове алгебре.

Важи и више, јер $\mathcal{H}$ и $\mathcal{C}$ нису само скупови него и категорије, ако се морфизми у $\mathcal{H}$ уведу као непрекидна својствена пресликавања, односно она непрекидна пресликавања за које је инверзна слика компакта компакт, а у другој као $*$-хомоморфизми.

Заиста, нека је $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ непрекидно својствено пресликавање. Тада за сваку $f \in C_0(\Omega_2)$, функција $f \circ \varphi$ припада $C_0(\Omega_1)$ (због услова својствености, а пресликавање $C_0(\Omega_2) \ni f \mapsto f \circ \varphi \in C_0(\Omega_1)$ је очигледно $*$-хоморфизам (сагласно са линеарним кобинацијама, множењем и инволуцијом).

С друге стране, нека је $\Phi : A_1 \to A_2$ неки $*$-хомоморфизам. Тада је за свако $h \in \Delta(A_2)$ пресликавање $h \circ \Phi$ мултипликативан функционал на A_1, а пресликавање $\Delta(A_2) \ni h \mapsto h \circ \Phi \in \Delta(A_1)$ је непрекидно и својствено.

Дакле, C_0 и Δ нису само обична пресликавања, него су функтори, и то један другом инверзни. Стога нема разлике између теорије локално компактних Хаусдорфових простора и теорије комутативних $C*$-алегебри. Појмовима опште топологије одговарају одређени појмови теорије C^*-алгебри: Отвореном подскупу $U \subseteq \Omega$ одговара идеал $C_0(U)$ у алгебри $C_0(\Omega)$. Затвореном подскупу $F \subseteq \Omega$ одговара количничка алгебра $C_0(\Omega)/C_0(F^C)$. Тачки x простора Ω одговара карактер h_x. Компактности одговара присуство јединице. Компактификацији одговара унитализација, и то компактификацији тачком минимална унитализација, а компкатификацији Стоуна-Чеха алгебра множитеља (видети задатак 1). Отворено-затвореном скупу одговара самоадјунгован пројектор, осносно такав елемент p за који важи $p^2 = p^* = p$, повезаним просторима, алгебре које немају нетривијалних (различитих од 0 и 1) пројектора, итд.

Следи примена Гељфанд-Најмаркове теореме у општој топологији, док је примена у теорији мере описана у задатку број 2.

3.8. Теорема [Стон-Чех]. Нека је Ω локално компактан Хаусдорфов простор. Он се може проширити до компакног простора $\beta\Omega$ тако да свака ограничена функција на Ω има непрекидно продужење на $\beta\Omega$.

Примедба. Стон-Чехова компактификација се опире интуитивном схватању. Тешко је замислити компактификацију интервала $(0, 1)$ где на пример функција $\sin(1/x)$ има непрекидно продужење, или на пример компактификацију скупа природних бројева са дискретном топологијом где сваки ограничен низ има непрекидно продужење.

Доказ. Простор $C_b(\Omega)$ свих ограничених непрекидних функција са $\sup$-нормом је једна C^*-алгебра, ако се множење уведе тачка по тачка, а инволуција помоћу комплексног конјуговања у свакој тачки. Ово се лако проверава. Њен простор максималних идеала означимо са Δ. Према првој Гељфанд-Најмарковој теореми Δ је компактан и $C_b(\Omega) \cong C(\Delta)$. За свако $t \in \Omega$, пресликавање $C_b(\Omega) \ni f \to f(t) \in \mathbf{C}$ је карактер. Скуп свих таквих карактера означимо са Δ_0. Јасно је да се Δ_0 и Ω могу поистоветити као скупови. Докажимо и да се топологије на њима поклапају. Нека је τ Гељфандова топологија на Δ, τ_0 њено сужење на Δ_0, и χ полазна топологија на Δ_0. Топологија χ је минимална у односу на коју су све функције из $C_0(\Delta_0)$ непрекидне, а τ минимална у односу на коју су све функције из $C(\Delta)$ непрекидне, како се све функције из $C_0(\Delta_0)$ тривијално продужују нулом до функције из $C(\Delta)$, то је $\tau_0 \supseteq \chi$. Отуда је Δ_0 отворен подскуп од Δ у τ. Количнички простор Δ/Δ_0^C добијен колапсирањем скупа Δ_0^C у тачку је онда компактан, а компактификација $\Delta_0 \cup \{\infty\}$ простора Δ_0 у односу на χ је Хаусдорфов, па је $\tau_0 = \chi$. □

3.9. C^*-подалгебре. Прва Гељфанд-Најмаркова теорема у потпуности описује све комутативне C^*-алгебре. И више, она пружа могућности да се помоћу ње боље изуче и некомутативне C^*-алгебре. Нека су $a_1, \ldots, a_n \in A$. Ознаком $C^*(a_1, \ldots, a_n)$ означаваћемо *C^*-подалгебру алгебре A генерисану елементима $a_1, \ldots, a_n$*. То је минимална C^*-подалгебра C^*-алгебре A коај садржи поменуте елементе. Није тешко установити да је реч о затворењу (у норми) свих полинома од $a_1, a_1^*, \ldots, a_n, a_n^*$. У општем случају та подалгебра није комутативна, али у неким посебним случајевима јесте. На пример ако су сви a_j самоадјунговани и два по два комутирају, тада је и $C^*(a_1, \ldots, a_n)$ комутативна. Ако је a нормалан елемент, онда је $C^*(a)$ комутативна. Ако су сви $a_1, \ldots, a_n$ нормални и међусобно комутирају, биће и тада алгебра $C^*(a_1, \ldots, a_n)$ комутативна, али то ћемо доказати тек након Фаглид-Патнемове теореме, јер без ње не можемо тврдити да је $a_i a_j^* = a_j^* a_i$.

Уколико је алгебра A унитална, онда ћемо уместо $C^*(a, 1)$ краће писати $C^*(a)$ и сл, односно подразумевамо да је и подалгебра генерисана наведеним елементима унитална.

Техника одабира одговарајуће комутативне C^*-алгебре омогућава да се и у некомутативном случају докажу нека важна тврђења. Треба међутим, пазити како се приликом преласка на подалгебру мења спектар, а он се, у случају општих (без C^*-услова) Банахових алгебри, наиме, може увећати. Заиста, ако елемент $\lambda 1 - a$ нема инверз у подалгебри B, он може да га има у већој алгебри A, док је обратно, разуме се, немогуће. Тако је $\sigma_B(a) \supseteq \sigma_A(a)$. Међутим, спектрални радијус се не мења, јер он зависи само од метричке структуре. Покажимо сада да се у случају C^*-алгебри спектар не мења при преласку на подалгебру.

3.10. Став. Нека је B нека C^*-подалгебра униталне C^*-алгебре A. Тада је $\sigma_B(a) = \sigma_A(a)$ за свако $a \in B$.

Доказ. Доказаћемо прво, да ако је $a = a^* \in B$ инвертибилан у A, да онда $a^{-1} \in B$. У ту сврху ћемо приказати a^{-1} као лимес (у норми) полинома од a.

Посматрајмо $C^*(a, a^{-1})$ - комутативну подалгебру у A. Према првој Гељфанд-Најмарковој теореми, она је изоморфна са $C(\Delta)$, где је Δ простор максималних идеала. Гељфандова трансформација $\hat{a}$ се нигде не анулира (у противном $0 \in \sigma_{C^*(a,a^{-1})}(a)$ па a није инвертибилан), што значи да у свакој тачки важи неједнакост

$$0 \leq \hat{1} - |\hat{a}|^2/||\hat{a}||^2 < 1.$$

Одатле следи да је елемент $|\hat{a}|^2/||\hat{a}||^2$ инвертибилан и да се његов инверз може добити као сума реда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\hat{a}|^{2n}}{||\hat{a}||^{2n}},$$

а како је $1/\hat{a} = \hat{a}/|\hat{a}|^2$, то се користећи чињеницу да је Гељфандова трансформација изоморфизам добија

$$a^{-1} = a \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2n}}{||a||^{2n}}.$$

Тако $a^{-1} \in C^*(a) \subseteq B$. Нека је сада $a \in B$ било какав инвертибилан (у A) елемент. Тада су и a^* и a^*a инвертибилни, па како је a^*a самоадјунгован, то $(a^*a)^{-1} \in B$. Међутим, $a^{-1} = (a^*a)^{-1}a^*$, па и $a^{-1} \in B$.

Најзад, једнакост спектара закључујемо примењујући претходно на елементе облика $\lambda 1 - a$. $\square$

3.11. Последица. Ако је $a \in A$ нормалан елемент тада је $||a|| = r(a)$, односно норма је једнака спектралном радијусу. Ако је $a = a^*$ самоадјнгован елемент, онда је $\sigma(a) \subseteq \mathbf{R}$. Ако је a унитаран, то јест $aa^* = a^*a = 1$, онда је $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda = 1\}$, и $||a|| = 1$.

Доказ. Нека је $B = C^*(a)$ и a нормалан. Тада је $\sigma(a) = \sigma_B(a)$, и још $||a|| = ||\hat{a}|| = r(a)$. Нека је, сада $a = a^*$. Тада се $\sigma(a) = \sigma_B(a)$ поклапа са скупом вредности Гељфандове трансформације $\hat{a}$, али $\overline{\hat{a}} = \widehat{a^*} = \hat{a}$. Тврдња за унитарне следује из $\overline{\hat{a}}\hat{a} = \widehat{a^*a} = \hat{1} = 1$. $\square$

3.12. Непрекидни функционални рачун. Нека је $a \in A$ (A унитална) нормалан елемент.

а) Функција $\hat{a}$ је хомеоморфизам простора максималних идела Δ подалгебре $C^*(a)$ на $\sigma(a)$;

б) Пресликавање $C(\sigma(a)) \ni f \mapsto (f \circ \hat{a})\check{} \in C^*(a)$ је $*$-изоморфизам, и то такав да сваки полином $P(z, \bar{z})$ пресликава у $P(a, a^*)$. (Дијакритички знак $\check{}$ означава инверзну Гељфандову трансформацију.)

Слику последњег пресликавања означаваћемо са $f(a)$.

Доказ. а) Како је $C^*(a)$ унитална комутативна C^*-алгебра, треба још доказати да је њен простор максималних идеала $\Delta = \Delta(C^*(a))$ хомеоморфан са $\sigma(a)$. Нека је $\hat{a}$ Гељфандова трансформација елемента a. Знамо да је слика пресликавања $\hat{a} : \Delta \to \mathbf{C}$ једнака $\sigma(a)$. Докажимо да је $\hat{a}$ инјективно. Нека су h_1 и h_2 карактери на $C^*(a)$, и претпоставимо да је $\hat{a}(h_1) = \hat{a}(h_2)$, односно $h_1(a) = h_2(a)$. Због мултипликативности је онда и за све $n \geq 0$, $h_1(a^n) = h_2(a^n)$. Како Гељфандова трансформација преводи $*$ у комплексно конјуговање закључујемо да важи и $h_1((a^*)^n) = h_2((a^*)^n)$, а како су полиноми по a и a^* густи у $C^*(a)$, то следи да је $h_1 \equiv h_2$. Дакле, $\hat{a}$ је инјективно.

Докажимо и да је $\hat{a}$ хомеоморфизам. Уочимо инверзне слике свих отворених скупова у $\sigma(a)$ функцијом $\hat{a}$. Како је $\hat{a}$ бијекција, они чине неку топологију. Како је $\hat{a}$ непрекидна, та топологија је слабија од Гељфандовске. Најзад, како је $\hat{a}$ инјективна та топологија раздваја тачке, јер за $h_1 \neq h_2 \in \Delta$ и $\hat{a}(h_1) \neq \hat{a}(h_2)$, па постоје отворени дисјунктни $\sigma(a) \supseteq U_j \ni \hat{a}(h_j)$. Тада су скупови $\hat{a}^{-1}(U_j) \ni h_j$ отворени и дисјунктни. Дакле, то је Хаусдорфова топологија слабија од компактне - Гељфандовске. Стога се она поклапа са Гељфандовском, што значи да нема других отворених скупова у Δ осим инверзних слика отворених функцијом $\hat{a}$. Одатле је $\hat{a}$ хомеоморфизам.

б) Јасно је да је реч о $*$-изоморфизму, јер су таква и Гељфандова трансформација и пресликавање $f \mapsto f \circ \hat{a}$. Идентичка функција $\sigma(a) \ni z \mapsto z = f_1(a)$, се слика у елемент чија је Гељфандова трансформација једнака $f_1 \circ \hat{a} = \hat{a}$, дакле у a. Одатле следи остало. $\square$

3.13. Лема. Нека је $a \in A$ самоадјунгован неке C^* алгебре. Тада је елемент $u = \exp(ia)$ унитаран и његов инверз је $u^{-1} = u^* = \exp(-ia)$. Посебно, $||u|| = 1$.

Доказ. Како је инволуција непрекидна, и $a = a^*$, имамо

$$u^* = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ia)^n}{n!}\right)^* = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-ia)^n}{n!} = \exp(-ia).$$

Како елементи ia и $-ia$ очигледно комутирају, то је и $uu^* = \exp(ia)\exp(-ia) = \exp(ia - ia) = 1$. □

3.14. Теорема [Фаглид-Патнем]. Нека су a и b нормални елементи C^*-алгебре A. Тада $ax = xb$ повлачи $a^*x = xb^*$.

Доказ. Из $ax = xb$, лако индукцијом налазимо $a^n x = xb^n$, па када то помножимо са $(i\bar{\lambda})^n/n!$ и просумирамо, добијамо $e^{i\bar{\lambda}a}x = xe^{i\bar{\lambda}b}$, односно

$$x = e^{-i\bar{\lambda}a}xe^{i\bar{\lambda}b}.$$

Нека је $a = a' + ia''$ и $b = b' + ib''$. Посматрајмо аналитичку функцију $\lambda \mapsto \Phi(\lambda) = e^{-i\lambda a^*}xe^{i\lambda b^*}$. Имамо

$$\Phi(\lambda) = e^{-i(\lambda a^* - \bar{\lambda}a)}e^{-i\bar{\lambda}a}xe^{i\bar{\lambda}b}e^{i(\lambda b^* - \bar{\lambda}b)} = e^{-i(\lambda a^* - \bar{\lambda}a)}xe^{i(\lambda b^* - \bar{\lambda}b)}.$$

Како су елементи $\lambda a^* - \bar{\lambda}a$ и $\lambda b^* - \bar{\lambda}b$ самоадјунговани, то је према претходној леми $||\Phi(\lambda)|| \le ||x||$, што значи да је Φ цела ограничена функција, па мора бити константна, тј. $\Phi(\lambda) = \Phi(0) = x$. То значи да је

$$e^{i\lambda a^*}x = xe^{i\lambda b^*}.$$

Упоређивањем коефицијента уз λ^1 у развоју у степени ред претходне формуле, налазимо $a^*x = xb^*$. □

Посебно, ако су x и y комутирајући нормални елементи, онда је $xy^* = y^*x$ и $x^*y = yx^*$. Општије, ако су $a_1, \dots, a_n$ међусобно комутирајући елементи C^*-алгебре A, онда је њена подалгебра $C^*(a_1, \dots, a_n)$ комутативна.

3.15. Непрекидни функционални рачун више промењљивих. Нека су $a_1, \dots, a_n \in A$ нормални елементи који међусобно комутирају.

а) Функција $\hat{a} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n)$ је хомеоморфизам простора максималних идеала Δ подалгебре $C^*(a_1, \dots, a_n)$ на неки подскуп скупа $\mathbf{C}^n$. Тај скуп означаваћемо са $\sigma(a_1, \dots, a_n)$ и зваћемо *заједнички спектар* елемената $a_1, \dots, a_n$;

б) Пресликавање $C(\sigma(a_1, \dots, a_n)) \ni f \mapsto (f \circ \hat{a})\check{} \in C^*(a)$ је $*$-изоморфизам, и то такав да сваки полином $P(z_1, \bar{z}_1, \dots, z_n, \bar{z}_n)$ пресликава у $P(a_1, a_1^*, \dots, a_n, a_n^*)$.

Слику функције f наведеним изоморфизмом означавамо са $f(a_1, \dots, a_n)$.

Доказ. Доказ је исти као у одељку 3.12.

ПОЗИТИВНИ ЕЛЕМЕНТИ И ПОРЕДАК

3.16. Дефиниција. Нека је A произвољна C^*-алгебра (може бити и без јединице).

Елемент $a \in A$ називамо *позитивним* ако је $a = a^*$ и $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Ако је још и $\sigma(a) \subseteq (0, +\infty)$ онда га зовемо *строго позитивним*. Ако је A унитална, онда је a строго позитиван ако је позитиван и инвертибилан. Скуп свих позитивних елемената означавамо са A^+.

На скупу свих самоадјунгованих елемената A_{sa} уводимо релацију $\le$ помоћу $a \le b$ ако и само ако је $b - a$ позитиван.

3.17. Став. а) Скуп A^+ је реалан конус, односно $a, b \in A^+$ и $\lambda > 0$ повлачи $a + b \in A^+$, и $\lambda a \in A^+$, као и $A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$. A^+ је затворен скуп;

б) релација $\le$ је релација (делимичног) поретка на A_{sa};

Доказ. а) Да $\lambda a \in A^+$ следи из теореме о пресликавању спектра. Нека су a и $-a$ једновремено позитивни. Због теореме о пресликавању спектра следи да је $\sigma(a) = \{0\}$. То значи да Гељфандова трансформација елемента a (у алгебри $C^*(a)$) узима само вредност нула, односно да је $a = 0$.

Нека $a, b \in A^+$, и нека је $\alpha = ||a||$, $\beta = ||b||$. Тада је $\sigma(\alpha 1 - a) \subseteq [0, \alpha]$ и $\sigma(\beta 1 - b) \subseteq [0, \beta]$, а то повлачи $||\alpha 1 - a|| \leq \alpha$ и $||\beta 1 - b|| \leq \beta$, одакле је

$$||(\alpha + \beta)1 - (a + b)|| \leq \alpha + \beta.$$

Како је $(\alpha + \beta)1 - (a + b) \in A_{sa}$ то повлачи да је $\sigma((\alpha + \beta)1 - (a + b)) \subseteq [-\alpha - \beta, \alpha + \beta]$. Према теореми о пресликавању спектра је онда $\sigma(a + b) \subseteq [0, 2(\alpha + \beta)]$, па $a + b \in A^+$.

Нека $A^+ \ni a_n \to a$. Због непрекидности инволуције, a је самоадјунгован. Нека је $\alpha_n = ||a_n||$ и $\alpha = ||a||$. Имамо, $\alpha_n 1 - a_n \geq 0$, па је $||\alpha_n 1 - a_n|| \leq \alpha_n$, одакле је $||\alpha 1 - a|| \leq \alpha$, одакле следи $a \geq 0$.

б) Рефлексивност је очигледна. Антисиметричност следи из релације $A^+ \cap (-A^+) = \{0\}$. Транзитивност следи из $a, b \in A^+$ повлачи $a + b \in A^+$. □

3.18. Став [карактеризација позитивних елемената]. Следећи услови су еквивалентни:

(1) $a \in A^+$;

(2) $a = b^2$ за неки самоадјунгован b;

(3) $a = b^* b$ за неки $b \in A$.

Доказ. (2) $\Rightarrow$ (3) је очигледно. (1) $\Rightarrow$ (2): Нека је $a \in A^+$. Функција $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ је коректно дефинисана на $\sigma(a)$, па можемо узети $b = \sqrt{a}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) је најтежи смер. Прво докажимо да $b^* b$ не може бити негативан (осим у тривијалној ситуацији $b = 0$). Претпоставимо супротно, $b^* b \leq 0$. Како се $\sigma(xy)$ и $\sigma(yx)$ поклапају до на нулу, то је и $bb^* \leq 0$. Ставимо $b = b_1 + i b_2$, где су b_1 и b_2 самоадјунговани. Како је збир два позитивна елемента позитиван, имамо

$$0 \geq b^* b + bb^* = 2b_1^2 + 2b_2^2 \geq 0,$$

јер су b_1^2 и b_2^2 позитивни према теореми о пресликавању спектра. Како је $A^+ \cap (-A^+)$ тривијалан, то је $b = 0$.

Сада доказујемо да $a = b^* b$ мора бити позитиван. Тај елемент је самоадјунгован, и може се приказати као $a = a_+ - a_-$, где су a_+ и a_- позитивни елементи такви да је $a_+ a_- = a_- a_+$. (Довољно је узети $a_+ = g(a)$ и $a_- = h(a)$, где су $g(\lambda) = \max\{\lambda, 0\}$, $h(\lambda) = \max\{-\lambda, 0\}$ позитивни и негативни део броја λ.) Тада је

$$0 \geq -a_-^3 = a_-(a_+ - a_-)a_- = a_- a a_- = a_- b^* b a_- = (ba_-)^* b a_-,$$

одакле, према већ доказаном имамо $ba_- = 0$, а тиме и $a_- = 0$. Тако је $a = a_+ \geq 0$. □

3.19. Последице. 1. Ако је $a \leq b$, онда је за свако c, $c^* a c \leq c^* b c$;

2. Пресликавање $x \mapsto x^{-1}$ је опадајуће на скупу $A^+ \cap G(A)$ свих строго позитивних елемената.

Доказ. 1. Елемент $b - a$ је позитиван, па је према претходном ставу облика $d^* d$ за неко d. Отуда је и елемент $c^* b c - c^* a c = (dc)^* dc$ позитиван;

2. Ако је $0 < x \leq y$, онда је, имајући у виду да је $y^{-1/2}$ коректно дефинисан и самоадјунгован, $0 < y^{-1/2} x y^{-1/2} \leq 1$. Како се спектри елемената ab и ba поклапају, то је и $x^{1/2} y^{-1/2} y^{-1/2} x^{1/2} = x^{1/2} y^{-1} x^{1/2}$ позитиван и мањи од 1, одатле је узимајући за $c = x^{-1/2}$, $y^{-1} \leq x^{-1}$. □

3.20. Дефиниција [апроксимативна јединица]. Иако се свака C^*-алгебра може унитализовати, понекад се мора радити без ње. На пример, ниједан прави идеал у C^*-алгебри не може садржати јединицу. Као замену за јединични елемент дефинишемо *апроксимативну јединицу* као скуп позитивних елемената $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ индексиран усмереним скупом Λ (односно уређеним скупом чији сваки двочлани подскуп има горње ограничење), такав да $\lambda \leq \mu$ повлачи $e_\lambda \leq e_\mu$ и такав да је

$$\lim_{\lambda \in \Lambda} x e_\lambda = \lim_{\lambda \in \Lambda} e_\lambda x = x, \tag{4}$$

у норми алгебре A.

При томе, гранична вредност се узима у односу на филтер генерисан интервалима облика $[\lambda_0, +\infty)$, односно гранична вредност у (4) значи да за све $\varepsilon > 0$ постоји $\lambda_0 \in \Lambda$ такво да за све $\lambda \geq \lambda_0$ важи

$$||xe_\lambda - x||, \; ||e_\lambda x - x|| < \varepsilon.$$

3.21. Став. Скуп $\Lambda = \{a \in A \mid 0 \le a < 1\}$ је усмерен скуп. Тај скуп (индексиран самим собом) називамо *канонска апроксимативна јединица*.

Примедба. Став се односи на алгебре без јединице. Тада неједнакост $0 \le a < 1$ означава да је $a = a^*$ и $\sigma(a) \subseteq [0, 1)$.

Доказ. Треба доказати да за $0 \le a, b < 1$ постоји c са особином $a, b \le c < 1$. Искористићемо чињеницу да је пресликавање $a \mapsto a(1+a)^{-1}$ растућа функција. Истина, елемент $(1+a)^{-1}$ може да постоји само у унитализацији алгебре A, али како је алгебра A увек идеал у својој унитализацији (заиста $b \in A$ и $c + \lambda 1 \in A_1$ повлачи $b(c + \lambda 1) = bc + \lambda b \in A$), то $a(1+a)^{-1} \in A$.

Докажимо да је наведено пресликавање заиста растуће. Из $a \le b$ одмах налазимо $1 + a \le 1 + b$, а према последици 3.19.2 одатле и $(1+a)^{-1} \ge (1+b)^{-1}$, односно $a(1+a)^{-1} = 1 - (1+a)^{-1} \le 1 - (1+b)^{-1} = b(1+b)^{-1}$.

За дате $a, b \in \Lambda$ посматрајмо елементе $a' = a(1-a)^{-1}$ и $b' = b(1-b)^{-1}$. Елемент $c' = a' + b'$ је такође позитиван, па постоји $c = c'(1+c')^{-1}$ за које је (по теореми о пресликавању спектра $\sigma(c) \subseteq [0, 1)$. Како је $a' \le c'$, то је због монотоности функције $x \mapsto x(1+x)^{-1}$, и $a = a'(1+a')^{-1} \le c'(1+c')^{-1} = c$. Слично је и $b \le c$.

Докажимо да је скуп Λ заиста апроксимативна јединица. Доказаћемо прво да важи (4) за позитивне a. Због непрекидности $a \mapsto a^*$ довољно је доказати само једну једнакост, а множењем погодном константом можемо претпоставити да је $a < 1$. Ако је $e_\lambda > a^{1/n}$ тада је $1 - e_\lambda < 1 - a^{1/n}$, и тиме $a(1 - e_\lambda)a < a(1 - a^{1/n})a = a^2(1 - a^{1/n})$, па имамо

$$||e_\lambda a - a||^2 = ||a(1 - e_\lambda)a|| \le ||f_n(a)||,$$

где је $f_n(\lambda) = \lambda^2(1 - \sqrt[n]{\lambda})$. Међутим, последња функција достиже максимум (у интервалу $[0, 1]$) у тачки $(2n/(2n+1))^n$, па је $|f_n(\lambda)| \le (2n/(2n+1))^{2n}(1/(2n+1)) < 1/(2n+1)$, па је и

$$||e_\lambda a - a||^2 \le \frac{1}{2n+1}.$$

Нека је сада a произвољно. Тада је $||ae_\lambda - a||^2 = ||(1-e_\lambda)a^* a(1-e_\lambda)|| \le ||(1-e_\lambda)a^* a||$, па применимо претходни случај на $a^* a$, и најзад $||e_\lambda a - a|| = ||a^* e_\lambda - a^*||$, па применимо претходно на a^*. $\square$

ИДЕАЛИ И ХОМОМОРФИЗМИ

3.22. Став. Нека је J (затворени) двострани идеал у C^*-алгебри A. Тада је $J = J^*$.

Доказ. Скуп $J \cap J^*$ је C^*-подалгебра у A, и у њој постоји нека апроксимативна јединица, на пример e_λ. Нека $a \in J$. Имамо

$$||a^* e_\lambda - a^*||^2 = ||e_\lambda a a^* e_\lambda - e_\lambda a a^* - a a^* e_\lambda + a a^*|| \le ||e_\lambda a a^* - a a^*|| + ||a a^* - e_\lambda a a^*||.$$

Међутим, последњи израз тежи ка нули, јер aa^* припада и J и J^*, па припада $J \cap J^*$. Како $a^* e_\lambda \in J \cap J^* \subseteq J$, то се a^* може апроксимирати елементима из J, па $a^* \in J$. $\square$

3.23. Став. Нека је J затворени двострани идеал у A. Количник A/J је C^*-алгебра са стандардно дефинисаним операцијама, и количничком нормом $||a + J|| = \inf_{b \in J} ||a - b||$. За количничку норму важи

$$||a + J|| = \lim_\lambda ||a - ae_\lambda||, \tag{5}$$

где је e_λ произвољна апроксимативна јединица у J.

Доказ. Да је количник A/J Банахова алгебра већ знамо. Покажимо да за количничку норму важи (5). Како $ae_\lambda \in J$ то важи $||a + J|| \le ||a - ae_\lambda||$, и отуда

$$||a + J|| \le \liminf_\lambda ||a - ae_\lambda||. \tag{6}$$

С друге стране, за било које $b \in J$ имамо (алгебру A унитализујемо у случају потребе)

$$||a - ae_\lambda|| = ||(a - b)(1 - e_\lambda) + b - be_\lambda|| \le ||a - b||\, ||1 - e_\lambda|| + ||b - be_\lambda||.$$

Други суманд тежи ка нули, јер $b \in J$, а први је ограничен са $||a - b||$, па је

$$\limsup_\lambda ||a - ae_\lambda|| \le ||a - b||.$$

Када ту прођемо инфимумом по свим $b \in J$ и узмемо у обзир (6) добијамо (5).

Инволуција $a+J \mapsto a^*+J$ је очито коректно дефинисана, и сагласна са осталим операцијама, па остаје још да се провери да важи C^*-услов. Међутим, то следи из (5), јер

$$||a+J||^2 = \lim_{\lambda} ||a - ae_\lambda||^2 = \lim_{\lambda} ||(1-e_\lambda)a^*a(1-e_\lambda)|| \leq \lim_{\lambda} ||a^*a - a^*ae_\lambda|| = ||a^*a+J||.$$

□

3.24. Став. Нека су A и B две C^*-алгебре, и $\varphi : A \to B$ (алгебарски) $*$-хомоморфизам. Тада је
а) $||\varphi(a)|| \leq ||a||$, и посебно, φ је ограничен;
б) $\ker\varphi = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ је затворен двострани идеал у A;
в) Ако је, још, φ инјективно, онда је φ изометрија, и посебно, $\varphi(A)$ је затворена подалгебра у B;
г) Слика хомоморфизма φ је затворена, односно $\varphi(A)$ је C^*-подалгебра алгебре B.

Доказ. а) По потреби можемо алгебре A и B унитализовати. Јасно је да је $\varphi(1_A)$ јединица у подалгебри $B' = \overline{\varphi(A)} \leq B$. Ако је $\lambda \in \rho(a)$, тада је $a - \lambda 1$ инвертибилан у A, па је $\varphi(a - \lambda 1) = \varphi(a) - \lambda 1$ инвертибилан у B'. Отуда је $\rho(a) \subseteq \rho(\varphi(a))$, односно

$$\sigma(\varphi(a)) \subseteq \sigma(a). \tag{7}$$

Тако за нормалне елементе a, важи $||\varphi(a)|| = r(\varphi(a)) \leq r(a) = ||a||$ (подсетимо се да је спектрални радијус $r(a)$ једнак $||a||$ за нормалне). У општем случају из C^*-услова имамо $||\varphi(a)||^2 = ||\varphi(a^*a)|| \leq ||a^*a|| = ||a||^2$;

б) Следи из а)

в) Због C^*-услова довољно је доказати да $||\varphi(a)|| = ||a||$ важи за сваки позитиван елемент a. Претпоставимо супротно, $||\varphi(a)|| < ||a||$. Тада је $\sigma(f(a))$ садржано у диску полупречника $||\varphi(a)||$, док спектар позитивног елемента a садржи реалан број $||a||$. Стога постоји нетривијална функција $f \in C(\sigma(a))$ која се анулира на $\sigma(\varphi(a))$. За њу важи

$$\varphi(f(a)) = f(\varphi(a)). \tag{8}$$

Заиста, како је φ мултипликативно пресликавање, то за сваки полином P важи $\varphi(P(a)) = P(\varphi(a))$, а f се може приказати као равномерни лимес полинома. Међутим, према конструкцији је $f \circ \varphi = 0$, па је десна страна у (8) једнака нули, а како је $f(a) \neq 0$ то противречи инјективности;

г) Алгебру A заменимо алгебром $A/\ker\varphi$, на којој је добро дефинисано пресликавање φ' са $\varphi'(a + \ker\varphi) = \varphi(a)$. Слике пресликавања φ и φ' се поклапају, а φ' је инјективно. □

Задаци

1. а) Нека је A неунитална C^*-алгебра, e_λ нека њена апроксимативна јединица и (L,R) мнижитељ на A. Доказати да је $R(a) = \lim_\lambda aL(e_\lambda$ и $L(a) = \lim_\lambda R(e_\lambda)a$;

б) Нека је сада $A = \mathfrak{S}_\infty$ алгебра компактних оператора на Хилбертовом простору H. Доказати да је за сваки пројектор коначног ранга p пар (L_1, R_1) множитељ на $B(pH)$, ако је $L_1(A) = pL(A)p$ и $R_1(A) = pR(A)p$, па извести послдицу да је $\mathcal{M}(A) \cong B(H)$;

в) Нека је сада $A = C_0(\Omega)$ (локално компактан). Доказати да је $\mathcal{M}(A) \cong C_b(\Omega)$, користећи просторе $C(K)$ за компакте $K \subseteq \Omega$.

2. а) Нека је (X, Σ, μ) простор са мером и нека Σ_0 означава скуп свих μ-занемарљивих скупова. На Σ уведемо релацију $\sim$ са $A \sim B$ ако и само ако је $\mu(A \triangle B) = 0$. Доказати да је $\sim$ релација еквиваленције. Доказати да је количнички скуп $\Sigma/\Sigma_0 := \Sigma/\sim$ Булова алгебра у односу на операције $\cup$, $\cap$ и константе X, $\emptyset$. Показати да је у тој алгебри $[A] \leq [B]$ ако и само ако је $\mu(A \setminus B) = 0$. Тада кажемо да скуп B *скоро садржи* скуп A;

Надаље важи и $\mu(X) < +\infty$.

б) Нека је Δ простор максималних идеала алгебре $L^\infty(X,\mu)$, где је $\mu(X) < +\infty$. Користећи Рисову теорему о репрезентацији, доказати да на Δ постоји позитивна Борелова мера $\hat{\mu}$ за коју важи

$$\int_\Delta \hat{f}\,\mathrm{d}\hat{\mu} = \int_X f\,\mathrm{d}\mu,$$

за све $f \in L\infty$;

в) Доказати да је $\mu(G) > 0$ за сваки отворен скуп у Δ;

г) Доказати да за сваку функцију $g \in L^\infty(\Delta, \hat{\mu})$ постоји непрекидна функција $h : \Delta \to \mathbf{C}$ таква да је $g = h$, $\hat{\mu}$ скоро свуда. Извести последицу: Банахови простори $C(\Delta)$ и $L^\infty(\Delta, \hat{\mu})$ се поклапају;

д) Доказати да је затворење произвољног отвореног скупа у Δ такође отворено. (Кажемо да је простор са тим својством *екстремно неповезан*;

ђ) Доказати да за сваку фамилију $E_\alpha \subseteq X$ постоји минималан скуп који је скоро садржи, то јест скуп E, такав да за све α E скоро садржи E_α, и да ако и F поседује исто својство тада E скоро садржи F;

е) Извести последицу: Булова алгебра Σ/Σ_0 је комплетна, односно свака фамилија у њој има супремум.

3. а) Нека је $a \in A$ нормалан елемент C^*-алгебре A, и $f : \sigma(a) \to \mathbf{C}$ непрекидна функција. Доказати да је $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$ (теорема о непрекидном пресликавању спектра);

б) Нека је $a \in A$ нормалан, $f : \sigma(a) \to \sigma(f(a))$ и $g : \sigma(f(a)) \to \mathbf{C}$ непрекидне функције. Доказати да је $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

4. Нека је A Банахова алгебра са инволуцијом за коју важи $||a^*|| = ||a||$ (не мора бити $C*$). Нека је $||a||_{rep} := \sup ||\pi(a)||$, где се супремум узима по свим $*$-хомоморфизмима $\pi : A \to B$ у неку C^*-алгебру B.

а) Доказати да је $||\cdot||_{rep}$ испуњава C^* услов, као и да је $||a||_{rep} \leq ||a||$;

б) Нека је $C^*(A)$ комплетирање алгебре A у односу на норму $||\cdot||_{rep}$, и $\varphi_0 : A \to C^*(A)$ природно утапање. (Ту алгебру називамо C^*-*овојница* алгебре A.) Доказати да $C^*(A)$ поседује универзално својство, то јест да за сваку другу C^* алгебру B и $*$-хомоморфизам $\varphi : A \to B$ постоји јединствени $*$-хомоморфизам $\psi : C^*(A) \to B$ такав да је $\varphi = \psi \circ \varphi_0$.

5. а) Нека је у неуниталној алгебри A, елемент a строго позитиван (то значи да је $\sigma_{A_1}(a) \subseteq (0, +\infty)$). Доказати да је низ $e_n = a(a + 1/n)^{-1}$ растући и да чини апроксимативну јединицу алгебре A;

б) Нека је e_n растућа апроксимативна јединица алегбре A. Доказати да је елемент $a = \sum_{n=1}^{+\infty} e_n/2^n$ строго позитиван.

6. Нека је A ограничен оператор на Хилбертовом простору H. Доказати да је A позитиван елемент C^*-алгебре $B(H)$, ако и само ако је $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ за свако $x \in H$.

7. Нека је A нека C^*-алгебра и $a \in G(A)$ (дакле инвертибилан). Показати да у A постоје унитаран u и позитиван c такви да је $a = uc$. Наћи пример C^*-алгебре и нормалног елемента a који се не може представити на описан начин.

8. а) Нека је a елемент спектралног радијуса $r(a) < 1$, и $b = \left(\sum_0^{+\infty} a^{*n} a^n\right)^{1/2}$. Доказати да је b коректно дефинисан, $b \geq 1$, и $||bab^{-1}|| \leq 1$;

б) Извести последицу: $r(a) = \inf\limits_{b \in G(A)} ||bab^{-1}|| = \inf\limits_{b \in A_{sa}} ||e^b a e^{-b}||$.

4. C*-АЛГЕБРЕ (други део)

СПЕКТРАЛНА ТЕОРЕМА

4.1. Дефиниција. Нека је Ω скуп, $\mathfrak{M}$ нека σ-алгебра на њему и нека је H неки Хилбертов простор, а $B(H)$ алгебра свих ограничених оператора на H. *Спектралном мером* називамо пресликавање $E : \mathfrak{M} \to B(H)$, такво да важи

(1) $E(A)^2 = E(A) = E(A)^*$, за свако $A \in \mathfrak{M}$ (тј. вредости мере су ортогонални пројектори);
(2) $E(\emptyset) = 0$ и $E(\Omega) = I$ - јединични оператор;
(3) $E(\bigsqcup_1^\infty A_j) = \sum_1^\infty E(A_j)$, при чему захтевамо да ред јако конвергира;
(4) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$ - посебно, ако $A \cap B = \emptyset$ онда $E(A)E(B) = 0$.

Примедбе Услови нису независни. Рецимо у другом услову, прва једнакост се лако доказује. И иначе у класичној теорији мере, услов $m(\emptyset) = 0$ служи само да би се искључио тривијалан случај где је мера сваког скупа бесконачна - овде је то, наравно, немогуће. Друга једнакост није суштинска, јер се лако изводи монотонија

$$A \subseteq B \Rightarrow E(A) \leq E(B),$$

па је $(E(I)H)^\perp$ вишак, односно можемо уместо Хилбертовог простора H посматрати његов потпростор $E(I)H$.

Даље, четврти услов се у неколико корака може доказати на основу првог и трећег, што је описано у задатку број 1.

Захтев у трећем услову да ред на десној страни јако конвергира је вишак. Наиме, из $A_i \cap A_j = \emptyset$ следи да су пројектори $E(A_i)$ и $E(A_j)$ ортогонални, па је свака њихова коначна сума такође пројектор (ортогонални). Тада су парцијалне суме наведеног реда растући низ пројектора који увек јако (и слабо) конвергира ка неком ортогоналном пројектору.

Из четвртог услова следи да је увек $E(A)E(B) = E(A \cap B) = E(A \cap B)^* = (E(A)E(B))^* = E(B)E(A)$.

Неки уместо спектрална мера, кажу и *спектрално разлагање јединице*.

Простор $L^\infty(\Omega; E)$ или само $L^\infty(E)$ се дефинише као и у случају бројчаних мера. Скуп A је мере нула ако је $E(A) = 0$ - нулти пројектор. Лако се види из аксиома спектралне мере да је пребројива унија скупова мере нула, такође мере нула. Есенцијални супремум $\sup\mathrm{ess}\,|f|$ функције $|f|$ дефинишемо као најмању константу $M > 0$ такву да је $E\{x \in \Omega \mid |f(x)| > M\} = 0$. Тада је $L^\infty(E) = \{f : \Omega \to \mathbf{C} \mid ||f||_\infty = \sup\mathrm{ess}\,|f| < \infty\}$ Банахов простор.

4.2. Интеграција у односу на спектралну меру. Може се заснивати теорија интеграције нумеричких функција у односу на спектралну меру, на исти начин као и у односу на обичну - дефинишу се просте функције, интеграли простих итд. Међутим може се поступити и једноставније. За дате векторе $f, g \in H$ можемо формирати комплексну меру $\mu_{f,g}$ задату са

$$\mu_{f,g}(A) = \langle E(A)f, g\rangle .$$

Уколико је $g = f$, тада је мера $\mu_{f,f}$ позитивна мера, а ако је још $||f|| = 1$, онда је и вероватносна (тј. $\mu_{f,f}(\Omega) = 1$).

За дату есенцијално ограничену (тиме и мерљиву) функцију $\varphi : \Omega \to \mathbf{C}$ посматрамо интеграл

$$\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu_{f,g}.$$

Није тешко проверити да он чини једну ограничену билинеарну форму по f и g. Заиста, линеарност по f и антилинеарност по g је тривијална. Ограниченост следи, јер је

$$\left|\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu_{f,g}\right| \le ||\varphi||_\infty |\mu_{f,g}|(\Omega) \le ||\varphi||_\infty ||f||\, ||g||.$$

Последња неједнакост следи, јер због Коши-Шварцове неједнакости, имамо

$$|\mu_{f,g}(A)|^2 = |\langle E(A)f, g\rangle|^2 = |\langle E(A)f, E(A)g\rangle|^2 \le \langle E(A)f, f\rangle \langle E(A)g, g\rangle ,$$

па је за свако разлагање $\Omega = \bigsqcup A_j$

$$(1)\quad \sum_1^\infty |\mu_{f,g}(A_j)| \le \sum_1^\infty (\langle E(A_j)f, f\rangle)^{1/2} (\langle E(A_j)g, g\rangle)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_1^\infty \langle E(A_j)f, f\rangle \sum_1^\infty \langle E(A_j)g, g\rangle\right)^{1/2} = (\langle If, f\rangle \langle Ig, g\rangle)^{1/2} = ||f||\, ||g||.$$

Отуда постоји ограничен оператор $T \in B(H)$, такав да је $\langle Tf, g\rangle = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu_{f,g}$. Дефинишемо онда,

$$T := \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}E = \int_\Omega \varphi(x) \,\mathrm{d}E(x).$$

4.3. Спектрална теорема. Нека је T нормалан оператор на Хилбертовом простору H. Тада постоји јединствена Борелова спектрална мера E на $\sigma(T)$, таква да за сваку непрекидну функцију $f : \sigma(T) \to \mathbf{C}$ важи

$$(2)\qquad \int_{\sigma(T)} f(z) \,\mathrm{d}E(z) = f(T),$$

и посебно

$$\int_{\sigma(T)} z \,\mathrm{d}E(z) = T.$$

И више, интеграл на левој страни формуле (2) има смисла за сваку $f \in L^\infty(\sigma(T))$, и пресликавање

$$L^\infty(\sigma(T)) \ni f \mapsto \int_{\sigma(T)} f(z) \,\mathrm{d}E(z) \in B(H)$$

представља утапање C^*-алгебре $L^\infty(\sigma(T))$ у $B(H)$.

Доказ. Посматрајмо комутативну C^*-алгебру $C^*(T)$. Њен простор максималних идеала може се поистоветити са $\sigma(T)$, а Гељфандова трансформација $\hat{T}$ оператора T са идентичком функцијом; и више $\widehat{f(T)}$ са f за сваку непрекидну f. (Став о непрекидном функционалном рачуну.) Нека су x, $y \in H$ произвољни вектори. Пресликавање

$$C(\sigma(T)) \ni f \mapsto \langle f(T)x, y\rangle$$

је ограничен функционал. Заиста, линеарност (по f) је очита, а ограниченост следи из $|\langle f(T)x, y\rangle| \le ||f(T)||\, ||x||\, ||y|| = ||f||\, ||x||\, ||y||$. Према Рисовој теореми, постоји регуларна комплексна Борелова мера $\mu_{x,y}$ таква да је за сваку непрекидну функцију f

$$\langle f(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(z) \,\mathrm{d}\mu_{x,y}(z).$$

Једноставно проверавамо да за фамилију мера $\mu_{x,y}$ $(x, y \in H)$ важе једнакости $\mu_{\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2,y} = \lambda_1\mu_{x_1,y} + \lambda_2\mu_{x_2,y}$ и $\mu_{y,x} = \bar{\mu}_{x,y}$. Отуда је за сваку функцију $f \in L^\infty(\sigma(T))$ пресликавање $(x, y) \mapsto \int_{\sigma(T)} f(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}(z)$ ограничена билинеарна форма, па постоји оператор $\Psi(f) \in B(H)$, такав да је

$$\langle\Psi(f)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}(z).$$

Пресликавање Ψ је, очигледно, линеарно, и важи $\Psi(\bar{f}) = \Psi(f)^*$. Следећи корак је да докажемо да је Ψ мултипликативно на $L^\infty(\sigma(T))$. Оно је мултипликативно, (према дефиницији) на ужем скупу $C(\sigma(T))$, па за све непрекидне f, g имамо

$$\int_{\sigma(T)} f(z)g(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}(z) = \langle f(T)g(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(z)\,\mathrm{d}\mu_{g(T)x,y}(z), \tag{3}$$

одакле је мера $g(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}$ једнака мери $\mu_{g(T)x,y}$. Отуда (3) важи и за све $f \in L^\infty(\sigma(T))$ и $g \in C(\sigma(T))$, односно важи

$$\int_{\sigma(T)} g(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,\Psi(f)^*y}(z) = \langle g(T)x, \Psi(f)^*y\rangle = \langle\Psi(f)g(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(z)g(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}(z),$$

тп јест $f(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \mathrm{d}\mu_{x,\Psi(f)^*y}$, за све $f \in L^\infty(\sigma(T))$. Тако за све f, $g \in L^\infty(\sigma(T))$ имамо

$$\langle\Psi(fg)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f(z)g(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}(z) = \int_{\sigma(T)} \mathrm{d}\mu_{x,\Psi(f)^*\Psi(g)^*y} =$$
$$= \langle x, \Psi(f)^*\Psi(g)^*y\rangle = \langle\Psi(g)\Psi(f)x, y\rangle\,.$$

Тако је Ψ хомоморфизам алгебре $L^\infty(\sigma(T))$ у $B(H)$. Конструишемо сада спектралну меру. Наиме за Борелов скуп $A \subseteq \sigma(T)$ ставимо $\langle E(A)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} \chi_A(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,y}(z)$, где је χ_A карактеристична функција скупа A, односно $E(A) = \Psi(\chi_A)$. Како је Ψ $*$-хомоморфизам, и $\chi_A^2 = \bar{\chi}_A = \chi_A$, то је и $E(A)^2 = E(A)^* = E(A)$. Остала својства спектралне мере следе из својстава комплексних мера $\mu_{x,y}$.

Остаје још да докажемо изометричност. За то је довољно доказати да је Ψ инјективно. Претпоставимо супротно, да је $f \neq 0$ E-скоро свуда, и $\Psi(f) = 0$. Тада је за неко $\delta > 0$, скуп $A = \{t \in \sigma(T) \mid |f(t)| > \delta\}$ E-строго позитивне мере, тј. $E(A) \neq 0$, односно $E(A)x = x$ за неки вектор $x \in H$. Тада је, међутим

$$0 < ||x||^2 = \mu_{E(A)x,x}(\sigma(T)) = \int_{\sigma(T)} \chi_A(z)\,\mathrm{d}\mu_{x,x}(z) \leq$$
$$\leq \frac{1}{\delta^2}\int_{\sigma(T)} |f(z)|^2\,\mathrm{d}\mu_{x,x}(z) = \frac{1}{\delta^2}\,\langle\Psi(f)x, \Psi(f)x\rangle = 0,$$

што чини контрадикцију. □

Примедба. Иако то није експлицитно наглашено, нити тешко за непосредан доказ, пресликавање Ψ је и монотоно, тј. $f \leq g$ повлачи $\Psi(f) \leq \Psi(g)$. То следи, јер инјективни хомоморфизми чувају спектар.

Још једна примедба. Спектралном теоремом дефинисан је L^∞-функционални рачун за нормалне операторе на Хилбертовом простору. Тако ћемо убудуће, уместо $\Psi(f)$ писати $f(T)$. Ипак, неки аутори избегавају појам L^∞, јер се не зна унапред у односу на коју меру треба тражити есенцијално ограничене функције. Уместо тога, они полазе од ограничених Борелових функција, те користе назив *Борелов функционални рачун*.

И трећа примедба. Може се доказати и да свака спектрална мера потиче од неког нормалног оператора. О томе видети задатак број 2.

4.4. Став [даља својства спектралног интеграла]. а) За сваки отворен скуп $U \subseteq \sigma(T)$ је $E(U) \neq 0$;

б) $\lambda \in \sigma(T)$ је сопствена вредност ако и само ако је $E(\{\lambda\}) \neq 0$; тада је $E(\{\lambda\})$ пројектор на сопствени потпростор који одговара сопственој вредности λ;

в) Нека су f_n, $f \in L^\infty(\sigma(T))$. Ако $f_n \to f$ скоро свуда и $\sup_n ||f_n|| < \infty$, онда $f_n(T) \to f(T)$ јако, односно $||f_n(T)x - f(T)x|| \to 0$ за сваки вектор $x \in H$;

г) За $F \subseteq B(H)$, дефинишемо $F' = \{A \in B(H) \mid AB = BA$ за свако $B \in S\}$ комутант скупа S. За $S \in B(H)$ следећи услови су еквивалентни:

(1) $S \in \{T\}'$;
(2) $S \in C^*(T)'$;
(3) $S \in \{E(A) \mid A \subseteq \sigma(T) \text{ мерљив}\}'$.

Доказ. а) Ако је $U \subseteq \sigma(T)$ отворен. Тада постоји непрекидна позитивна функција f са носачем садржаним у U, и норме једнаке 1. Тада је $f \leq \chi_A$, па је $f(T) \leq E(A)$;

б) Нека је $E_\lambda = E(\{\lambda\}) \neq 0$, и нека је x елемент његове слике, тј. $E_\lambda x = x$. Како је $(z-\lambda)\chi_{\{\lambda\}} \equiv 0$, то је $(T-\lambda 1)E_\lambda = 0$, па је $(T-\lambda 1)x = (T-\lambda 1)E_\lambda x = 0$. Тако је λ сопствена вредност и сви елементи слике пројектора E_λ су сопствени вектори.

Обратно, нека је $Tx = \lambda x$. Формирамо скупове $F_n = \sigma(T) \cap \{t \mid 1/(n+1) < |t-\lambda| \leq 1/n\}$ и $F_0 = \{t \in \sigma(T) \mid |t-\lambda| > 1\}$. Тада је $\cup F_j = \sigma(T) \setminus \{\lambda\}$. Уочимо функције $g_n(z) = 1/(z-\lambda)\chi_{F_n}(z)$. Оне припадају L^∞, јер је F_n на строго позитивном растојању од λ и важи $g_n(z)(z-\lambda) = \chi_{F_n}(z)$. Отуда је $E(F_n)x = \chi_{F_n}(T)x = g_n(T)(T-\lambda 1)x = 0$, па је и $\sum E(F_n)x = 0$, и тиме $E_\lambda x = x$. Тако је $E_\lambda \neq 0$ и сваки сопствени вектор се налази у његовој слици;

в) За све $x, y \in H$ имамо

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n(T)x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} f_n \,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \langle f(T)x, y\rangle\,,$$

према теореми о доминантној конвергенцији, па $f_n(T)x$ слабо тежи ка $f(T)x$. С друге стране, поново на основу ТДК

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n(T)x||^2 = \lim_{n\to\infty} \langle f_n(T)^* f_n(T)x, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} |f_n|^2 \,\mathrm{d}\mu_{x,x} = \int_{\sigma(T)} |f|^2 \,\mathrm{d}\mu_{x,x} = ||f(T)x||^2;$$

г) (1)$\Rightarrow$(2) Ако $S \in \{T\}'$ онда $S \in \{T, T^*\}'$ по Фаглид-Патнемовој теореми. Онда S комутира и са свим полиномима од T и T^*, који су густи у $C^*(T)$. (2)$\Rightarrow$(1) је тривијално.

(3)$\Leftrightarrow$(2) Пре свега, имамо

$$\langle E(A)Sx, y\rangle = \mu_{Sx,y}(A), \qquad \langle SE(A)x, y\rangle = \mu_{x,S^*y}(A) \tag{4}$$

и за све $f \in C(\sigma(T))$

$$\langle f(T)Sx, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{Sx,y}, \qquad \langle Sf(T)x, y\rangle = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,S^*y}. \tag{5}$$

Сада, ако важи $S \in \{E(A)\}'$, онда су мере у формули (4) идентичне па важи (5). Обратно, ако $S \in C^*(T)'$, онда су интеграли у (5) једнаки за сваку непрекидну функцију f, па су и мере једнаке, односно важи (4). $\square$

4.5. Напомена. Алгебру $\{f(T) \mid f \in L^\infty(\sigma(T))\}$ означаваћемо са $W^*(T)$ - објашњење ознаке уследиће у поглављу о фон Нојмановим алгебрама. У истом поглављу ћемо доказати и да је $W^*(T) = C^*(T)''$.

ГНС КОНСТРУКЦИЈА

У овом одељку упознаћемо такозвану ГНС конструкцију. Скраћеница потиче од имена *Гељфанд*, *Најмарк* и *Сеīал*, који су је развили. Конструкција представља основу теорије репрезентација C^*-алгебри, односно њоме се конструишу "цигле", од којих се могу изградити све репрезентације. Успут ћемо доказати и другу Гељфанд-Најмаркову теорему која тврди да је свака C^*-алгебра (без обзира на комутативност) изометрички изоморфна некој подалгебри алгебре $B(H)$ за погодно одабран Хилбертов простор H.

4.6. Дефиниција. *Сшање* на униталној C^*-алгебри A је фукционал $\rho : A \to \mathbf{C}$, такав да важи $a \geq 0 \Rightarrow \rho(a) \geq 0$ и $\rho(1) = 1$. Термин стање потиче из физике (енглески $state$, руски $состояние$).

Следе основна својства стања:

(1) Ако је ρ стање, а $a = a^*$, онда је $\rho(a) \in \mathbf{R}$, јер можемо узети $a = a^+ - a^-$.

(2) Ако је ρ стање, онда је пресликавање $A \times A \ni (a,b) \mapsto \rho(a^*b)$ полускаларни производ - једино не мора бити недегенерисан. У сваком случају, полазећи од неједнакости $\rho((a-\lambda b)^*(a-\lambda b)) \geq 0$ за погодно одабрано λ налазимо да важи Коши Шварцова неједнакост

$$|\rho(a^*b)|^2 \leq \rho(a^*a)\rho(b^*b).$$

(3) Свако стање је ограничен функционал и норма му је једнака један. Заиста, ако је $||a|| < 1$, онда је и $||a^*a|| < 1$, па су елементи a^*a и $1 - a^*a$ позитивни, одакле су $\rho(a^*a)$ и $1 - \rho(a^*a)$ позитивни бројеви, то јест $0 \leq \rho(a^*a) \leq 1$. Даље је $|\rho(a)|^2 = |\rho(1^*a)|^2 \leq \rho(1)\rho(a^*a) < 1$. Тако је $||\rho|| \leq 1$, а једнака је, јер је $\rho(1) = 1$.

(4) Ако је ρ ограничен функционал, такав да је $||\rho|| = \rho(1) = 1$, онда је ρ стање. Довољно је у овом случају доказати да је ρ позитиван. Нека је $a \geq 0$ и $\rho(a) = \alpha + i\beta$. Имамо

$$||a + it1||^2 \geq |\rho(a + it1)|^2 = |\alpha + i(\beta + t)|^2 = \alpha^2 + (\beta + t)^2,$$

а како је $||a + it1||^2 = ||(a + it1)^*(a + it1)|| = ||a^2 + t^2 1|| \leq ||a||^2 + t^2$, то је

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 \leq ||a||^2 + t^2, \qquad \text{то јест} \qquad \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq ||a||^2,$$

па је $\beta = 0$. Даље, како $||a||1 - a$ има норму мању или једнаку од $||a||$, то је $|||a|| - \alpha| \leq ||a||$, па је $\alpha \geq 0$.

(5) Скуп свих стања на алгебри A, у ознаци $\mathcal{S}(A)$ је конвексан подскуп јединичне сфере у дуалном простору A^*. Он је затворен у односу на слабу-$*$ топологију, и према томе компактан (Банах-Алаоглуова теорема). Заиста, ако су ρ_1 и ρ_2 стања, и $\theta \in [0,1]$, онда је и $\rho = \theta\rho_1 + (1-\theta)\rho_2$ стање, јер се једноставно проверава $\rho(1) = 1$ и $||\rho|| \leq 1$. Даље, ако $\mathcal{S}(A) \ni \rho_n \to \rho$ $*$-слабо, тада за свако $a \in A$, $\rho_n(a) \to \rho(a)$, одакле се лако види да је $\rho(1) = 1$, и $|\rho(a)| \leq 1$, кад год $|\rho_n(a)| \leq 1$.

Ако је A C^*-алгебра без јединице, онда стање на A дефинишемо, као позитиван функционал ρ ($a \geq 0$ повлачи $\rho(a) \geq 0$) норме 1. Тада се стање ρ на A може продужити до стања ρ_1 на A_1 - унитализацији алгебре A, узимајући $\rho_1(a + \lambda 1) = \rho(a) + \lambda$.

За стање ρ кажемо да је *чисто*, ако за сваки други позитиван функцинал τ, важи $\tau \leq \rho$ повлачи $\tau = t\rho$, за неко $t \in [0,1]$.

4.7. Неки примери.

(1) Нека је ρ стање на алгебри $C(K)$. Тада је ρ облика $\rho(f) = \int_K f\,\mathrm{d}\mu$ за неку регуларну Борелову меру μ. Из услова позитивности следи да је μ позитивна мера (Рисова теорема), а из услова $\rho(1) = 1$, да је $\mu(K) = 1$.

Чистим стањима одговарају атомарне мере сконцентрисане у тачки t_0. Заиста, ако постоје два дисјунктна скупа A, $B \subseteq K$ чисто позитивне мере, онда је функционал $\sigma(f) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$ мањи од ρ а није му пропорционалан.

(2) На свакој подалгебри алгебре $B(H)$, јединични вектор $\psi \in H$ генерише стање $\rho_\psi(A) = \langle A\psi, \psi\rangle$. Заиста $|\rho_\psi(A)| \leq ||A\psi||\,||\psi|| \leq ||A||$, па је $||\rho_\psi|| \leq 1$, док је $\rho_\psi(I) = \langle\psi,\psi\rangle = ||\psi||^2 = 1$. Одавде следи и позитивност, мада се она може и непосредно видети, јер је $\rho_\psi(A^*A) = ||A\psi||^2 \geq 0$.

(3) Алгебра $\mathbf{C}^2$, са множењем тачка по тачка, инволуцијом $(z,w)^* = (\bar{z}, \bar{w})$ и $\max$-нормом је у ствари специјалан случај алгебре $C(K)$, за $K = \{0,1\}$. Свако стање ρ је облика $\rho(z,w) = \lambda z + \mu w$, при чему су λ, $\mu \geq 0$ и $\lambda + \mu = 1$. Тако се скуп стања може видети и као сегмент $[0,1]$. Чистим стањима одговарају крајње тачке тог интервала, односно случајеви $\lambda = 0$ и $\mu = 0$. Заиста, у супротном је функционал $\sigma(z,w) = \lambda z$ позитиван, мањи од ρ, али му није пропорционалан.

(4) Чиста стања на комутативној C^*-алгебри су карактери. То следи из првог примера и прве Гељфанд Најмаркове теореме.

4.8. Став [егзистенција стања]. За дато $a \in A$ и свако $\alpha \in \sigma(a)$ постоји стање $\rho_\alpha \in \mathcal{S}(A)$, такво да је $\rho_\alpha(a) = \alpha$; посебно, за дато $a \in A$ постоји стање ρ такво да је $\rho(a^*a) = ||a||^2$.

Доказ. На скупу $\{\lambda a + \mu 1 \,|\, \lambda, \mu \in \mathbf{C}\}$ дефинишемо $\rho_\alpha(\lambda a + \mu 1) = \lambda\alpha + \mu$. Очигледно је $\rho_\alpha(1) = 1$. Даље, $\lambda\alpha + \mu \in \sigma(\lambda a + \mu 1)$ према теореми о пресликавању спектра, па је $|\lambda a + \mu 1| \leq ||\lambda a + \mu 1||$, одакле је $||\rho_\alpha|| \leq 1$. Према Хан-Банаховој теореми, могуће је продужити ρ_α до целе алгебре A без увећања норме. Како то продужење има норму 1 и слика јединицу у 1, то је оно стање.

Како је a^*a позитиван и тиме нормалан, $||a^*a|| = ||a||^2 \in \sigma(a^*a)$, па применимо претходно. □

4.9. Дефиниција [репрезентација C^*-алгебре]. Нека је A C^*-алгебра. $*$-хомоморфизам $\varphi : A \to B(H)$, где је H неки Хилбертов простор, називамо *репрезентација* алгебре A. Уколико желимо да нагласимо Хилбертов простор, онда прецизније кажемо да је уређен пар (φ, H) репрезентација.

Репрезентације се могу сабирати. Наиме, ако су (φ, H) и (ψ, K) две репрезентације алгебре A, онда је то и $(\varphi, H) \oplus (\psi, K) = (\varphi \oplus \psi, H \oplus K)$, где је $\varphi \oplus \psi$ дато 2×2 блок матрицом

$$(\varphi \oplus \psi)(a) = \begin{bmatrix} \varphi(a) & 0 \\ 0 & \psi(a) \end{bmatrix}.$$

За две репрезентације (φ, H) и (ψ, K) кажемо да су *еквивалентне* (или *унитарно еквивалентне*) ако постоји унитарно пресликавање $V : H \to K$, такво да је $\varphi(a) = V^*\psi(a)V$. Такве репрезентације, логично, сматрамо истим.

Ако је φ инјективно (и тиме изометрично), онда га називамо *верним*. Ако у H постоји вектор Ω, такав да је $\varphi(A)H = \{\varphi(a)\Omega \mid a \in A\}$ густ у $B(H)$ (у операторној норми), онда такву репрезентацију зовемо *циклична*, а вектор Ω *цикличним вектором*.

Репрезентација (φ, H) је *недегенерисана* ако из $\varphi(A)x = \{0\}$ следи $x = 0$. Недегенерисаност није никакава суштинска особина. Наиме, ако је (φ, H) репрезентација, онда је $\varphi(A)H = \{ax \mid a \in A, x \in H\}$ линеаран потпростор. Ако је p пројектор на његово затворење, онда је $(p\varphi, pH)$ недегенерисана репрезентација. И више $(\varphi, H) = (p\varphi, pH) \oplus (0, (1-p)H)$, тј. свака репрезентација је збир недегенерисане и нулте репрезентације.

4.10. Став [ГНС конструкција]. Нека је A нека C^*-алгебра, и ρ неко стање на A. Тада важи

а) Скуп $N_\rho = \{a \in A \mid \rho(a^*a) = 0\}$ је затворен леви идеал;

б) Пресликавање $A \times A \ni (a, b) \mapsto \langle a, b\rangle_\rho$ дато са

$$\langle a, b\rangle_\rho = \rho(b^*a) \tag{6}$$

је полускаларни производ;

в) Пресликавање (6) је скаларни производ на количнику A/N_ρ. Комплетирање пред-Хилбертовог простора A/N_ρ у односу на тај скаларни производ означавамо са H_ρ;

г) Пресликавање $\varphi_\rho : A \to B(H_\rho)$ где је $\varphi_\rho(a)$ задато на свуда густом скупу A/N_ρ са

$$\varphi_\rho(a)(x + N_\rho) = ax + N_\rho$$

је репрезентација C^*-алгебре A;

д) Репрезентација (φ_ρ, H_ρ) је недегенерисана и циклична; циклични вектор је $1 + N_\rho$;

ђ) За репрезентацију (φ_ρ, H_ρ) важи $\rho(a^*a) \leq ||\varphi_\rho(a)||^2 \leq ||a||^2$.

Доказ. а) Затвореност је очигледна. Да бисмо се уверили да је N_ρ леви идеал, уочимо да је $N_\rho = \{a \in A \mid \forall b \in A,\ \rho(a^*b) = 0\}$. Заиста, једна инклузија је тривијална, а друга следи из Коши Шварцове неједнакости: $|\rho(a^*b)|^2 \leq \rho(a^*a)\rho(b^*b)$;

б) Једноставно се проверава да је $\langle \cdot, \cdot\rangle_\rho$ линеаран по првој и антилинеаран по другој промењљивој. Позитивност и симетричност су такође одмах видљиве;

в) Приметимо да је $N_\rho = \{a \in A \mid \langle a, a\rangle_\rho = 0\} = \{a \in A \mid \forall b \in A,\ \langle a, b\rangle_\rho = 0\}$, одакле следи строга позитивна дефинитност. Међутим, следи и да је $\langle \cdot, \cdot\rangle_\rho$ коректно дефинисан на количнику, јер за $a \sim a'$, $b \sim b'$, односно $a - a', b - b' \in N_\rho$, имамо $\langle a, b\rangle_\rho - \langle a', b'\rangle_\rho = \langle a - a', b\rangle_\rho + \langle a', b - b'\rangle_\rho = 0$;

г) $\varphi_\rho(a)$ је коректно дефинисано, јер је N_ρ леви идеал, па $x \sim x'$, односно $x - x' \in N_\rho$ повлачи $ax - ax' \in N_\rho$. Непосредно се види да је φ_ρ сагласно са линеарним комбинацијама и множењем. Остаје да се провери да је $\varphi_\rho(a^*) = \varphi_\rho(a)^*$. Међутим, имамо

$$\langle \varphi_\rho(a)x, y\rangle_\rho = \rho(y^*ax) = \rho((a^*y)^*x) = \langle x, \varphi_\rho(a^*)y\rangle,$$

што завршава доказ;

д) Вектор $1 + N_\rho$ је цикличан, јер је $\varphi(a)(1 + N_\rho) = a + N_\rho$ што покрива свуда густ (у H_ρ) скуп A/N_ρ. Циклична репрезентација је увек недегенерисана;

ђ) $||\varphi_\rho(a)|| \le ||a||$ важи јер је φ_ρ хомоморфизам, па је норме мање или једнаке од 1. Што се тиче друге неједнакости, имамо

$$||\varphi_\rho(a)||^2 \ge ||\varphi_\rho(a)(1+N_\rho)||^2/||1+N_\rho||^2 = \rho(a^*a)/\rho(1^*1) = \rho(a^*a).$$

□

4.11. Теорема [друга Гељфанд-Најмаркова]. Свака C^*-алгебра изометрички је изоморфна некој подалгебри алгебре $B(H)$, где је H неки Хилбертов простор.

Доказ. Заправо, треба показати да постоји верна репрезентација сваке C^*-алгебре A. Конкретно, показаћемо да је то репрезентација

$$(\varphi, H) = \bigoplus_{\rho \in \mathcal{S}(A)} (\varphi_\rho, H_\rho). \tag{7}$$

Такву репрезентацију зовемо *универзална репрезентација*. Она је директан збир свих ГНС-репрезентација (φ_ρ, H_ρ), где ρ пролази скуп $\mathcal{S}(A)$ свих стања на A.

Није на одмет подсетити се шта је директан збир $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$, неке, могуће непребројиве, фамилије Хилбертових простора. То је скуп свих фамилија $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, $x_\lambda \in H_\lambda$ таквих да је $\sum_{\lambda\in\Lambda} ||x_\lambda||^2 < +\infty$. (Јасно, у таквој фамилије је скуп свих индекса λ за које је $x_\lambda \ne 0$ највише пребројив.) Скаларни производ фамилија x и y је задат са

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\lambda\in\Lambda} \langle x_\lambda, y_\lambda\rangle\,,$$

где је скаларни производ под знаком суме онај у H_λ. Рутински се проверава да је реч о Хилбертовом простору.

Ако су B_λ оператори на H_λ, онда се оператор $B = \oplus_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ на $H = \oplus_{\lambda\in\Lambda} H_\lambda$ задаје помоћу $B(x_\lambda) = (B_\lambda x_\lambda)$. Тада важи $||B|| = \sup_{\lambda\in\Lambda} ||B_\lambda||$, јер је, с једне стране

$$||Bx||^2 = \sum_\lambda ||B_\lambda x_\lambda||^2 \le \sup_\lambda ||B_\lambda|| \sum_\lambda ||x_\lambda||^2,$$

а с друге стране за све $\varepsilon > 0$ постоји λ_0, такво да је $\sup_\lambda ||B_\lambda|| - \varepsilon < ||B_{\lambda_0}||$, и јединични вектор $y_{\lambda_0} \in H_{\lambda_0}$ такав да је $||B_{\lambda_0}|| - \varepsilon < ||B_{\lambda_0} y_{\lambda_0}||$. Тада за фамилију (x_λ), где је $x_{\lambda_0} = y_{\lambda_0}$ и $x_\lambda = 0$, иначе, важи $||x|| = ||y_0|| = 1$ и

$$||Bx|| = ||B_{\lambda_0} y_0|| > \sup_\lambda ||B_\lambda|| - 2\varepsilon.$$

Докажимо да је репрезентација (7) верна. Како су сви φ_ρ хомоморфизми, то је према Ставу 4.10ђ, $||\varphi_\rho(a)|| \le ||a||$ за све ρ, што после узимања супремума постаје $||\varphi(a)|| \le ||a||$. С друге стране за свако $a \in A$ према Ставу 4.8, постоји стање ρ_a такво да је $\rho_a(a^*a) = ||a||^2$, што због Става 4.10ђ даје $||\varphi_{\rho_a}(a)||^2 = ||a||^2$, па је $||\varphi(a)|| = \sup_{\rho\in\mathcal{S}(A)} ||\varphi_\rho(a)|| \ge ||a||$. □

Примедба. Универзална репрезентација, иако верна, није најподеснија. Она је, наиме превелика, јер је одговарајући Хилбертов простор, осим у најтривијалнијој ситуацији, несепарабилан. Ускоро ћемо видети да постоје и боље, тј. мање репрезентације.

НЕРАЗЛОЖИВЕ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈЕ И ЧИСТА СТАЊА

У овом одељку увешћемо неразложиве репрезентације, и доказаћемо да су од свих ГНС репрезентација неразложиве само оне које потичу од чистих стања. Такође, навешћемо једну погоднију, тј. мању, верну репрезентацију произвољне C^*-алгебре A.

4.12. Дефиниција. Репрезентација (φ, H) је *неразложива* (или *иредуцибилна*) ако није унитарно еквивалентна збиру две нетривијалне (не нулте) репрезентације. Неразложивост репрезентације (φ, H) еквивалентна је томе да су једини потпростори у H инваријантни у односу на све операторе из $\varphi(A)$, тривијалан $\{0\}$ и цео H.

Заиста, ако се φ може разложити на $(\varphi, H) \cong (\varphi_1 \oplus \varphi_2, H_1 \oplus H_2)$, онда је потпростор $V^*(H_1)$ (где је $V : H \to H_1 \oplus H_2$ изометрија) инваријантан у односу на $\varphi(A)$.

Обратно, нека је $L \le H$ потпростор инваријантан у односу на све $\varphi(a)$, $a \in A$, и p пројектор на L. Тада, ако $y \in L$ онда и $\varphi(a)y \in L$, па је $\varphi(a)y = p\varphi(a)y$. За било које $x \in H$, $px \in L$, па је $p\varphi(a)px = \varphi(a)px$, односно

$$p\varphi(a)p = \varphi(a)p.$$

Међутим, то важи и за a^*, што после узимања инволуције даје

$$p\varphi(a)p = p\varphi(a).$$

Комбинујући последње две истакнуте формуле, налазимо $p\varphi(a) = \varphi(a)p$, а тиме и $(1-p)\varphi(a) = \varphi(a)(1-p)$, односно и L и $L^\perp$ су инваријантни за $\varphi(A)$. Тада се (φ, H) може разложити на $(p\varphi, L) \oplus ((1-p)\varphi, L^\perp)$.

4.13. Став [Шурова лема]. Нека је (φ, H) нека репрезентација C^*-алгебре A. Следећи услови су међусобно еквивалентни:

(1) (φ, H) је неразложива;
(2) комутант скупа $\varphi(A)$ (у $B(H)$) једнак је $\mathbf{C}I = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbf{C}\}$;
(3) сваки вектор $0 \ne x \in H$ је цикличан за (φ, H).

Доказ. Нека је (φ, H) неразложива, и нека $\varphi(A)'$ (ознака за комутант) садржи бар један оператор који није скаларни умножак јединичног, рецимо B. Тада $\varphi(A)'$ садржи и B^* (јер је $\varphi(A)'$ затворена за инволуцију), а тиме и $(B+B^*)/2$ и $(B-B^*)/2i$. Бар један од последња два оператора није скаларни умножак јединице, јер би у противном такав био и B. Дакле, постоји самоадјунгован оператор T у $\varphi(A)'$, који није скаларни умножак јединице. То значи да се његов спектар састоји од барем две тачке, па постоји нетривијалан пројектор P у његовом спектралном разлагању - он се може изразити као $\chi_F(T)$ за неки скуп $\emptyset \subsetneqq F \subsetneqq \sigma(T)$. Како се χ_F може изразити као (тачка по тачка) лимес непрекидних функција, по модулу не већих од 1, и како је скуп полинома густ у алгебри непрекидних функција, то постоји низ полинома $p_n \to \chi_F$ т.п.т. Према својствима спектралне мере, тада $p_n(T) \to \chi_F(T) = p$, јако. Треба још само приметити да је комутант увек затворен у односу на алгебарске операције и јаку топологију да би закључили да је $p \in \varphi(A)'$. Тада се, као што знамо (φ, H) може разложити. Тако први услов повлачи други.

Обратно, ако (φ, H) није неразложива, онда како смо већ видели у дефиницији, постоји нетривијалан пројектор који комутира са $\varphi(A)$. Тако други услов повлачи први.

Нека је $x \in H$ вектор који није цикличан. Потпростор $L = \varphi(A)x$ није цео, а (тривијално) није ни само $\{0\}$. Једноставно се види да је L инваријантан за $\varphi(A)$, па (φ, H) није неразложива. Тако први услов повлачи трећи.

Најзад, ако (φ, H) није неразложива, онда постоји нетривијалан $L \le H$ инваријантан за $\varphi(A)$. Сваки вектор из L није цикличан. $\square$

4.14. Став [Карактеризација чистих стања]. Стање ρ на алгебри A је чисто ако и само ако је ρ крајња тачка скупа $\mathcal{S}(A)$.

Подсетимо се да је x крајња тачка конвексног скупа C ако и само ако из $x = \theta y + (1-\theta)z$, $y, z \in C$, $0 < \theta < 1$ следи $y = z = x$.

Доказ. Претпоставимо да је ρ чисто стање, и нека је $\rho = \theta\rho_1 + (1-\theta)\rho_2$. Функционал $\theta\rho_1$ је позитиван и мањи од ρ (јер је $(1-\theta)\rho_2 \ge 0$), па је $\theta\rho_1 = t\rho$, за неко $t \ge 0$. Међутим, како су ρ_1 и ρ стања, то је $\theta = \theta\rho_1(1) = t\rho(1) = t$, па је $\rho_1 = \rho$. Слично и $\rho_2 = \rho$.

Обратно, нека је ρ крајња тачка скупа $\mathcal{S}(A)$, и нека је $\tau \le \rho$ позитиван функционал. Ако је $\tau(1) = 0$, тада због Коши Шварцове неједнакости, имамо за све $a \in A$, $|\tau(a)|^2 = |\tau(1^*a)|^2 \le \tau(1)\tau(a^*a) = 0$, па је $\tau \equiv 0$. Означимо $\alpha = \tau(1) > 0$. Тада је $(1/\alpha)\tau$ стање (јер је позитивно и узима вредност 1 у јединици). Слично разматрање поновимо за $\sigma = \rho - \tau$, па налазимо да је $(1/(1-\alpha))\sigma$ такође стање. Тако је

$$\rho = \alpha \cdot (1/\alpha)\tau + (1-\alpha)\cdot 1/(1-\alpha)(\rho-\tau),$$

па је $\rho = (1/a)\tau = 1/(1-\alpha)(\rho - \tau)$. $\square$

Одавде посебно следи да је скуп свих чистих стања увек непразан - Крејн-Милманова теорема. У следећем ставу видеће се да их има довољно да од њих саставимо верну репрезентацију.

4.15. Став [егзистенција чистих стања]. Нека је $a \in A$ нормалан елемент. Тада за свако $\alpha \in \sigma(a)$ постоји чисто стање $\rho_\alpha \in \mathcal{PS}(A)$ такво да је $\rho_\alpha(a) = \alpha$; посебно, за дато $a \in A$ постоји $\rho \in \mathcal{PS}(A)$, такво да је $\rho(a^*a) = ||a||^2$.

Доказ. Како је алгебра $C^*(a)$ изоморфна са $C(K)$ за неки компакт K, можемо одабрати карактер ρ'_α на $C^*(a)$, такав да је $\rho'_\alpha(a) = \alpha$ (на пример $x \mapsto \hat{x}(t_0)$, где је t_0 тачка у којој Гељфандова трансформација $\hat{a}$ узима вредност α); очито је $\rho'_\alpha(1) = 1$, и $||\rho'_\alpha|_{C^*(a)}|| = 1$. Скуп свих продужења $\mathcal{K}_\alpha$ овог функционала до целе A без увећања норме је непразан према Хан-Банаховој теореми. Непосредно се може проверити да је $\mathcal{K}_\alpha$ конвексан и затворен (у слабој-$*$ топологији) подскуп скупа $\mathcal{S}(A)$, и отуда компактан. Према Крејн Милмановој теореми, у $\mathcal{K}_\alpha$ постоји барем једна крајња тачка ρ_α. Да бисмо завршили доказ довољно је показати да је ρ_α уједно и крајња тачка (већег) скупа $\mathcal{S}(A)$. Ако то није, онда постоје ρ_1, $\rho_2 \in \mathcal{S}(A)$, такви да је $\rho_\alpha = \theta\rho_1 + (1-\theta)\rho_2$. Међутим, како је $\rho_\alpha|_{C^*(a)}$ карактер, односно чисто стање, то је и $\rho_1|_{C^*(a)} = \rho_2|_{C^*(a)} = \rho_\alpha|_{C^*(a)}$, што значи да ρ_1, $\rho_2 \in \mathcal{K}_\alpha$. Одатле излази да ρ_α није крајња тачка скупа $\mathcal{K}_\alpha$, што је контрадикција.

За a^*a важи исто расуђивање, као и у доказу Става 4.8. □

4.16. Последица. Репрезентација

$$\bigoplus_{\rho \in \mathcal{PS}(A)} (\varphi_\rho, H_\rho)$$

је верна.

Доказ. Доказ је исти као у другој Гељфанд Најмарковој теореми. □

Примедба. Могу се конструисати и још мање и оперативније верне репрезентације, тако што ћемо од свих стања које доводе до међусобно еквивалентних репрезентација задржати у скупу индекса само по једну.

4.17. Став. Нека је ρ стање на алгебри A. Репрезентација (φ_ρ, H_ρ) је неразложива ако и само ако је ρ чисто стање.

Доказ. Претпоставимо да (φ_ρ, H_ρ) није неразложива. Тада постоји нетривијалан потпростор L инваријантан у односу на $\varphi_\rho(A)$; пројектор на L означимо са p, а са $\Omega = 1 + N_\rho$ цикличан вектор за (φ_ρ, H_ρ). $p\Omega$ не може бити нула, јер, у супротном $p\varphi(a)\Omega = \varphi(a)p\Omega = 0$, па како је $\varphi(A)\Omega$ густо у H, то је $p = 0$. Из истих разлога отпада и претпоставка $(1-p)\Omega = 0$. Означимо $\psi_1 = p\Omega/||p\Omega||$ и $\psi_2 = (1-p)\Omega/||(1-p)\Omega||$. Помоћу тих вектора формирамо стања ρ_1 и ρ_2, са $\rho_j(a) = \langle \varphi_\rho(a)\psi_j, \psi_j \rangle$, за $j = 1, 2$. (Једноставно се проверавају услови $\rho_j(1) = 1$ и $||\rho_j|| \le 1$.) Ако је $\theta = ||p\Omega||^2$, тада је $1 - \theta = ||(1-p)\Omega||^2$, и имамо

$$\theta\rho_1(a) + (1-\theta)\rho_2(a) = \langle \varphi_\rho(a)p\Omega, p\Omega \rangle + \langle \varphi_\rho(a)(1-p)\Omega, (1-p)\Omega \rangle = \langle \varphi_\rho(a)\Omega, \Omega \rangle = \rho(a).$$

Тако се ρ може приказати као конвексна комбинација различитих стања, па оно није чисто.

Обратно, нека је (φ_ρ, H_ρ) неразложива репрезентација, и нека је $\rho = \theta\rho_1 + (1-\theta)\rho_2$. Очигледно је $0 \le \theta\rho_1 \le \rho$. Пресликавање из $A \times A$ у $\mathbf{C}$ дато са

$$[x, y] := \theta\rho_1(y^*x)$$

је полускаларни производ, који је потчињен скаларном производу $\langle x, y \rangle_\rho = \rho(y^*x)$, па се факторише кроз N_ρ, и непрекидно продужује до билинеарне форме на H_ρ. Тада постоји ограничен (чак позитиван) оператор S такав да је $[x, y] = \langle Sx, y \rangle_\rho$. Имамо

$$\langle S\varphi_\rho(a)x, y \rangle_\rho - \langle \varphi_\rho(a)Sx, y \rangle_\rho = \langle Sax, y \rangle_\rho - \langle Sx, a^*y \rangle_\rho = \theta\rho_1(y^*ax - (a^*y)^*x) = 0,$$

па S припада комутанту $\varphi_\rho(A)'$. Према Шуровој леми, мора бити $S = \lambda I$. Отуда је

$$\theta\rho_1(a) = \langle 1, Sa \rangle = \langle 1, \lambda a \rangle = \lambda\rho(a),$$

па су ρ и ρ_1 пропорционални. □

4.18. Последица. а) Ако је (φ, H) нека циклична репрезентација C^*-алгебре A, са цикличним вектором Ω, онда је она унитарно еквивалентна ГНС-репрезентацији која потиче од стања

$$\rho(a) = \langle \varphi(a)\Omega, \Omega \rangle\,; \tag{8}$$

б) Свака неразложива репрезентација унитарно је еквивалентна репрезентацији која потиче од неког чистог стања.

Доказ. а) Једноставно се проверава да је ρ заиста стање. Дефинишимо пресликавање $V : H_\rho \to H$ на густом скупу $\varphi_\rho(A)1$ са $V(a + N_\rho) = \varphi(a)\Omega$. Дефиниција је коректна, јер $a + N_\rho = 0$, тј. $a \in N_\rho$ повлачи $\rho(a^*a) = 0$, односно $||\varphi(a)\Omega||^2 = 0$ (имајући у виду (8)). Да бисмо проверили да је V изометричан уочимо да је

$$||V(a + N_\rho)||^2 = ||\varphi(a)\Omega||^2 = \langle \varphi(a^*a)\Omega, \Omega \rangle = \rho(a^*a) = ||a||^2.$$

Међутим V је и сурјективно, јер је Ω цикличан вектор. Једноставно се проверава да V преводи φ_ρ у φ, јер

$$(V\varphi_\rho(a))(x + N_\rho) = V(ax + N_\rho) = \varphi(ax)\Omega = \varphi(a)\varphi(x)\Omega = \varphi(a)V(x + N_\rho);$$

б) Једноставна последица претходног. □

4.19. Спектар алгебре. На скупу свих чистих стања можемо увести релацију еквиваленције $\rho \sim \sigma$ ако су одговарајуће ГНС репрезентације (φ_ρ, H_ρ) и $(\varphi_\sigma, H_\sigma)$ унитарно еквивалентне. Директан збир

$$\bigoplus_{\rho \in \mathcal{PS}(A)/\sim} (\varphi_\rho, H_\rho)$$

је још мања верна репрезентација.

Скуп свих нееквивалентних чистих стања је уједно и скуп свих неизоморфних неразложивих репрезентација. У комутативном случају то је простор карактера. Отуда има места тај скуп назвати спектар, и означавати га са $\mathrm{Spec}(A)$. Каква се топологија може увести на спектру произвољне C^*-алгебре може се видети касније.

Задаци

1. а) Нека су P, Q и $P+Q$ ортогонални пројектори на неком Хилбертовом простору H. Доказати да је тада $PQ = QP = 0$;

б) Доказати да четврти услов у дефиницији спектралне мере следи из првог и трећег.

2. Нека је $K \subseteq \mathbf{C}$ компактан скуп и E спектрална мера на Бореловим подскуповима скупа K са вредностима у $B(H)$ за коју не знамо да ли потиче од неког нормалног оператора. Означимо са $\Psi(F) \in B(H)$ вредност спектралног интеграла $\int_K f\,\mathrm{d}E$.

а) Доказати да је $||Psi(f)|| \le ||f||_{\max}$, као и да $f_n \rightrightarrows f$ повлачи $\Psi(f_n) \to \Psi(f)$ у норми простора $B(H)$;

б) Доказати да је $\Psi(\bar{f}) = \Psi(f)^*$, $\Psi(\lambda f + \mu g) = \lambda\Psi(f) + \mu\Psi(g)$;

в) Доказати да је $\Psi(\chi_A\chi_B) = \Psi(\chi_A)\Psi(\chi_B)$ за свака два Борелова скупа A и B, па одатле, користећи а) доказати да за сваке две есенцијално ограничене функције f и g важи $\Psi(fg) = \Psi(f)\Psi(g)$;

г) Нека је $T = \int_K z\,\mathrm{d}E(z)$. Доказати да је оператор T нормалан, као и да се спектрална мера оператора T поклапа са полазном.

3. Нека је U унитаран оператор на Хилбертовом простору H, и нека је $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ Борелова функција са својством $e^{ig(z)} = z$ за $z \in \{|z| = 1\}$. Доказати да је $g(U)$ самоадјунгован оператор и извести последицу да је сваки унитаран оператор неки експонент.

4. Нека је $T \in B(H)$ нормалан оператор.

а) Доказати да за све $\varepsilon > 0$ постоји нормалан оператор A са коначним спектром (тзв. дијагоналан) са својством $||T - A|| < \varepsilon$;

б) Ако је $\ker T = \{0\}$ доказати да за све $\varepsilon > 0$ постоји нормалан инвертибилан оператор B са својством $||T - B|| < \varepsilon$ и $\{T\}' \subseteq \{B\}'$.

5. а) Доказати да за самоадјунговане операторе важи неједнакост $|\left\langle Tx, x\right\rangle|^2 \le \left\langle T^2x, x\right\rangle ||x||^2$;

б) Ако је T позитиван оператор, x јединични вектор и φ конвексна на $[0, +\infty)$ функција, онда је $\varphi(\langle Tx, x\rangle) \leq \langle \varphi(T)x, x\rangle$;

в) Доказати неједнакост $||Tx||^2 \leq \langle |T|^p x, x\rangle^{1/p} \langle |T|^q x, x\rangle^{1/q}$, где је $p, q > 1$ и $1/p + 1/q = 1$.

6. а) Нека је T нормалан оператор и λ изолована тачка његовог спектра. Показати да је λ сопствена вредност;

б) Нека је $B(H)/K(H)$ Калкинова алгебра. Доказати да ниједан елемент у њој нема изолованих тачака у свом спектру.

7. Нека је ρ функционал на C^*-алгебри A. Посматрајмо услове

(1) $\rho(1) = 1$;

(2) $a \geq 0 \Rightarrow \rho(a) \geq 0$;

(3) $||\rho|| = 1$.

Услови (1) и (2) су дефиниција стања. Познато је да $(1) \wedge (2) \Rightarrow (3)$, као и $(1) \wedge (3) \Rightarrow (2)$. Доказати да и $(2) \wedge (3) \Rightarrow (1)$. Другим речима било која два од горе наведених услова повлаче трећи.

8. Доказати да је ГНС репрезентација (H_ρ, φ_ρ) верна ако и само ако је функционал ρ веран, односно ако поседује својство $a > 0 \Rightarrow \rho(a) > 0$.

9. Нека је $A = B(H)$ алгебра свих ограничених оператора на Хилбертовом простору H, нека је $\psi \in H$ јединични вектор и $\rho_\psi : B(H) \to \mathbf{C}$ стање дато са $\rho_\psi(A) = \langle A\psi, \psi\rangle$.

а) Доказати да је пресликавање $H \ni f \mapsto S_f + N_{\rho_\psi} \in H_{\rho_\psi}$, где је $S_f(x) = \langle x, \psi\rangle f$ унитарни изоморфизам Хилбертових простора H и H_{ρ_ψ};

б) Доказати да је репрезентација $(\rho_\psi, H_{\rho_\psi})$ верна;

в) Доказати да је стање ρ_ψ чисто.

10. Нека је A матрична алгебра свих матрица $n \times n$ посматрана као скуп свих оператора на Хибертовом простору $\mathbf{C}^n$ (тиме се задаје инволуција и норма). Показати да је пресликавање $\tau : A \to \mathbf{C}$ дато са $\tau(T) = (1/n)\,\mathrm{tr}(T)$ стање. Да ли је то стање чисто? Описати ГНС репрезентацију алгебре A која потиче од стања τ. Да ли је та репрезентација неразложива? Да ли је верна?

11. Доказати да је свако линеарно и позитивно пресликавање између две C^*-алгебре ограничено и да норма не превазилази један.

12. Доказати да је комутант скупа свих компактних оператора на Хилбертовом простору H тривијалан (садржи само скаларне умношке јединице) - извести закључак да је репрезентација $K(H) \mapsto B(H)$ дата идентичким пресликавањем неразложива.

13. а) Доказати идентитет $a^n b - ba^n = \sum_{k=0}^{n-1} a^k(ab - ba)a^{n-1-k}$;

б) Доказати да ни за која два елемента a и b произвољне Банахове алгебре, једнакост $ab - ba = 1$ није могућа.

5. ИНТЕРМЕЦО - НЕКОЛИКО ПОГЛАВЉА О ХИЛБЕРТОВИМ ПРОСТОРИМА

НЕКОЛИКО ТЕХНИЧКИХ РЕЗУЛТАТА

Током читаве главе H је неки Хилбертов простор, а $B(H)$ ознака за алгебру свих ограничених оператора на H.

5.1. Билинеарне форме. Пресликавање $\Omega : H \times H \to \mathbf{C}$ је билинерана форма ако је линеран по првој ($\Omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \Omega(x_1, y) + \lambda_2 \Omega(x_2, y)$) и антилинеарна по другој ($\Omega(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \bar{\mu}_1 \Omega(x, y_1) + \bar{\mu}_2 \Omega(x, y_2)$). Она је ограничена ако постоји константа $M < +\infty$ са својством $|\Omega(x, y)| \leq M ||x|| \, ||y||$. Најмања константа M са наведеним својством назива се норма форме Ω и означава се са $||\Omega||$.

Основни пример билинеарне форм је пресликавање задато са

$$\Omega_T(x, y) = \langle Tx, y \rangle \,, \tag{1}$$

где је $T \in B(H)$. Билинеарност је очигледна, а ограниченост следи из Коши Шварцове неједнакости, јер имамо $| \langle Tx, y \rangle | \leq ||Tx|| \, ||y|| \leq ||T|| \, ||x|| \, ||y||$, чиме је $||\Omega_T|| \leq ||T||$.

Међутим, важи и обратно. Свака блиниеарна форма је облика (1). Заиста, ако је Ω билинерна, онда је за фиксирано $x \in H$, пресликавање $y \mapsto \overline{\Omega(x, y)}$ ограничено и линеарно, па према Рисовој теореми, постоји јединствено одређен вектор z са својством $\overline{\Omega(x, y)} = \langle y, z \rangle$, односно $\Omega(x, y) = \langle z, x \rangle$. Није тешко видети да је пресликавање $x \mapsto z$ линеарно, па означимо $z = Tx$. Даље је $||Tx|| = \sup | \langle Tx, y \rangle | = \sup |\Omega(x, y)| \leq \sup ||\Omega|| \, ||x|| \, ||y|| = ||\Omega|| \, ||x||$, где се супремум узима по свим y норме мање или једнаке од један. Тако је $||T|| \leq ||\Omega||$. Тако су све билинеране форме облика (1) и $||\Omega|| = ||T||$.

Одавде посебно следи да је оператор T једнозначно задат својом билинеарном формом $(x, y) \mapsto \langle Tx, y \rangle$, односно ако за све x, $y \in H$ важи $\langle T_1 x, y \rangle = \langle T_2 x, y \rangle$, онда је $T_1 = T_2$.

5.2. Квадратне форме. Нека је $T \in B(H)$. *Квадратна форма* оператора T је пресликавање $Q_T : H \to \mathbf{C}$ дато са

$$Q(x) = \langle Tx, x \rangle \,. \tag{2}$$

Оператор T је једнозначно задат својом квадратном формом. То следи из такозваног *поларизационог идентитета*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\,\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\,\langle T(x-iy), x-iy\rangle =$$
$$= \sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle T(x+i^k y), x+i^k y\right\rangle,$$

који се једноставно проверава рачуном. Такође, квадратна форма (2) задовољава идентитете

$$\begin{gathered} Q(x+y)+Q(x-y)=2(Q(x)+Q(y)) \\ Q(ix)=Q(x) \\ |Q(x)|\le M\|x\|^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Могуће је, међутим, и апстрактно увести појам квадратне форме. Наиме, квадратном формом називамо пресликавање $Q : H \to \mathbf{C}$ које задовољава услове (3). Показује се да свака квадратна форма потиче од неког оператора. Доказ ове тврдње је копија доказа Џордан фон Нојмановох става који тврди да норма потиче од неког скаларног производа. Овде ће бити само наведена скица доказа.

Најпре треба извести неке елементарне тврдње, као што су $Q(0) = 0$ и $Q(-x) = Q(x)$. Затим доказати идентитет

$$Q(x+y+z) = Q(x+y)+Q(y+z)+Q(z+x)-Q(x)-Q(y)-Q(z),$$

што је можда и најтеже место. Потом, увести пресликавање $\Omega : H\times H \to \mathbf{C}$ са

$$\Omega(x,y) = \sum_{k=0}^{3} i^k Q(x+i^k y)$$

и пказати да је адитиван по првој и по другој променљивој. Доказ да скалар излази напоље није тривијалан али понавља идеје које се срећу приликом решавања Кошијеве функционалне једначине. Најзад за ограниченост, прво извести неједнакост $|\Omega(x,y)| \le 4M(\|x\|+\|y\|)^2$, па се послужити триком. Наиме за позитивно t имамо

$$|\Omega(x,y)| = |\Omega(tx, \frac{1}{t}y)| \le 4M(t\|x\| + \frac{1}{t}\|y\|)^2,$$

и напокон ставити $t = \sqrt{\|y\|/\|x\|}$. Једном ћу можда исписати детаље.

5.3. Слика и језгро. Нека је $T \in B(H)$. Важи

а) $(\operatorname{Im} T)^\perp = \ker T^*$ и $(\operatorname{Im} T^*)^\perp = \ker T$, односно $H = \overline{\operatorname{Im} T} \oplus \ker T^* = \overline{\operatorname{Im} T^*} \oplus \ker T$;

б) Оператор T је нормалан ако и само ако за све $x \in H$ важи $\|Tx\| = \|T^*x\|$. Посебно, ако је T нормалан, тада је $\ker T = \ker T^*$ и тиме $H = \overline{\operatorname{Im} T} \oplus \ker T$;

Доказ. а) Нека је $y \perp \operatorname{Im} T$. Тада је за све $x \in H$, $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle = 0$, па је $T^*y = 0$. Тиме је $(\operatorname{Im} T)^\perp \subseteq \ker T^*$. Обратно, нека је $y \in \ker T^*$, то јест $T^*y = 0$. Тада је, за све $x \in H$, $\langle y, Tx\rangle = \langle T^*y, x\rangle = 0$, па $y \in (\operatorname{Im} T)^\perp$. Друга једнакост следи заменом T са T^*.

б) Заиста, $\|Tx\| = \|T^*x\|$ еквивалентно је са $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle$, односно томе да се квадратне форме оператора T^*T и TT^* поклапају, што значи да је $T^*T = TT^*$; □

5.4. Поларно разлагање. Нека је $T \in B(H)$. Тада постоји, и јединствен је, оператор V такав да важи

(1) $T = V|T|$;
(2) VV^* једнако је пројектору на $\overline{\operatorname{Im} T}$;
(3) V^*V једнако је пројектору на $\overline{\operatorname{Im} T^*}$.

Тада важи и $V * T = |T|$

Доказ. Нека $x \in \operatorname{Im}|T|$. Тада је

$$\|\,|T|x\|^2 = \langle |T|x, |T|x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \|Tx\|^2, \tag{4}$$

па је пресликавање $V_0 : \operatorname{Im}|T| \to \operatorname{Im} T$ дато са $V(|T|x) = Tx$ коректно дефинисано, линеарно и норме не веће од један. Отуда се оно може продужити (по непрекидности) до пресликавања из $\overline{\operatorname{Im}|T|}$ у $\overline{\operatorname{Im} T}$. Дефинишимо V са $Vx = V_0x$ за $x \in \overline{\operatorname{Im}|T|}$, и $Vx = 0$ за $x \perp \operatorname{Im}|T|$. За доказ егзистенције треба још доказати да је $\overline{\mathrm{Im}\,|T|} = \overline{\mathrm{Im}\,T^*}$. Међутим, из елементарне једнакости $||Tx||^2 = \langle T^*Tx, x\rangle = ||\,|T|x||^2$ одмах налазимо $\ker T = \ker |T|$ одакле преласком на ортогонални комплемент добијамо тражено.

Што се тиче јединствености, јасно је да је V јединствено на $\overline{\mathrm{Im}\,T^*}$. Уколико би за неко y из ортогоналног комплемента било $Vy \neq 0$ био би нарушен један од друга два услова. $\square$

5.5. Линеарни омотачи. Сваки оператор $T \in B(H)$ је линеарна комбинација највише 4 унитарна оператора. Такође T је линарна комбинација највише 4 позитивна оператора.

Доказ. Како је увек $T = T_1 + iT_2$, где су $T_1 = (T+T^*)/2$ и $T_2 = (T-T^*)/2i$, довољно је доказати да јесваки самоадјунгован линеарна комбинација највише 2 унитарна, односно комбинација највише 2 позитивна. Ако је $T = T^*$ оператор норме мање од 1, онда су $T \pm i\sqrt{I-T^2}$ унитарни. Заправо су један другом инверзни, а полузбир им је једнак T. Заиста

$$(T - i\sqrt{I-T^2})(T + i\sqrt{I-T^2}) = T^2 + i(T\sqrt{I-T^2} - \sqrt{I-T^2}T) + I - T^2 = I,$$

јер $\sqrt{I-T^2}$ припада комутативној подалгебри $C^*(T)$. Ако $||T||$ није мања од један, онда применимо претходно на $T/||T||$.

Што се тиче друге тврдње, следи из $T = T^+ - T^-$. $\square$

5.6. Оператори коначног ранга. Нека је T оператор коначног ранга, и нека је ψ_j, $1 \le j \le n$ нека база његове слике. Тада за све $x \in H$ постоје јединствени скалари $\alpha_j(x)$ такви да је $Tx = \sum_j \alpha_j(x)\psi_j$. Пресликавање $H \to \mathbf{C}$, $x \mapsto \alpha_j(x)$ је ограничено и линеарно, јер представља композицију оператора T и пројекције $\sum_j \alpha_j\psi_j \mapsto \alpha_j$. Према Рисовој теореми је онда $\alpha_j(x) = \langle x, \varphi_j\rangle$ за неке векторе φ_j. Тако T има облик

$$Tx = \sum_j \langle x, \varphi_j\rangle\, \psi_j.$$

Другим речима, T је (коначна) линеарна комбинација пресликавања облика $x \mapsto \langle x, \varphi\rangle\,\psi$, и то су пресликавања ранга један. Таква пресликавања означаваћемо са $\psi \otimes \bar{\varphi}$. (Логика за овакво означавање садржана је у чињеници да је $H \otimes_{alg} H$ изоморфно са операторима коначног ранга.)

Примедба: Ако је X (само) Банахов простор, онда се оператори коначног ранга могу описати помоћу $X \otimes_{alg} X^*$.

Правила рачуна са операторима ранга један једноставно се проверавају и следи њихов списак:

$$\begin{gathered} T(\psi\otimes\bar\varphi) = (T\psi)\otimes\bar\varphi, \qquad (\psi\otimes\bar\varphi)T = \psi\otimes(T^*\varphi) \\ (\psi\otimes\bar\varphi)^* = \varphi\otimes\bar\psi, \qquad (\psi\otimes\bar\varphi)\cdot(g\otimes\bar f) = \langle g,\varphi\rangle\,\psi\otimes\bar f \\ |\psi\otimes\bar\varphi| = ||\varphi||\,||\psi||\frac{\varphi}{||\varphi||}\otimes\frac{\bar\varphi}{||\varphi||} \end{gathered} \tag{5}$$

ТРАГ - НУКЛЕАРНИ ОПЕРАТОРИ

5.7. Мотивација. Траг је познати појам из линеарне алгебре и означава суму елемената дате матрице који се налазе на главној дијагонали. Показује се (у линеарној) да еквивалентне матрице имају исти траг, то јест да је траг својство линеарног пресликавања (а не саме матрице) као и да је траг једнак суми сопствених вредности, где сваку сопствену вредност сабирамо онолико пута колика је димензија коренског потпростора.

Подстакнути овиме, можемо да покушамо да уведемо траг као суму

$$\mathrm{tr}_\varphi(T) = \sum_j \langle T\varphi_j, \varphi_j\rangle\,, \tag{6}$$

где је φ_j нека ортонормирана база. Одмах се поставља питање да ли назначени ред конвергира и ако конвергира да ли је конвергенција апсолутна, као и да ли резултат зависи од избора базе. Због (евентуалне) зависности суме реда у (6) стоји оно φ у индексу ознаке за траг. Када за одређену класу оператора покажемо да траг не зависи од избора базе, престаћемо да назначавамо базу у индексу.

Наглашавамо да нигде не претпостављамо да је полазни Хилбертово простор сепарабилан, што значи да индекс j може да пролази и неки непребројив скуп, те да се врши сумирање непребројиве фамилије.

5.8. Траг позитивног оператора. у случају када је T позитиван оператор сабирци реда (6) су позитивни и сума сигурно постоји, макар и у $\overline{\mathbf{R}}$. Редом ћемо извести нека елементарна својства трага позитивних оператора.

(ПТ1) $\operatorname{tr}_\varphi(T^*T) = \operatorname{tr}_\varphi(TT^*)$. Заиста, имамо

$$\sum_j \langle T^*T\varphi_j, \varphi_j\rangle = \sum_j \langle T\varphi_j, T\varphi_j\rangle = \sum_j \sum_i \langle T\varphi_j, \varphi_i\rangle \overline{\langle T\varphi_j, \varphi_i\rangle}.$$

Како су у последњем реду сабирци позитивни могућа је измена поретка сумирања, па налазимо

$$\sum_j \langle T^*T\varphi_j, \varphi_j\rangle = \sum_i \sum_j \langle \varphi_j, T^*\varphi_i\rangle \overline{\langle \varphi_j, T^*\varphi_i\rangle} = \sum_i \langle T^*\varphi_i, T^*\varphi_i\rangle$$

на основу Парсевалове једнакости.

(ПТ2) Ако је $T \geq 0$ и U унитаран, онда је $\operatorname{tr}_\varphi(U^*TU) = \operatorname{tr}_\varphi(T)$. Ово једноставно следи, ако претходно применимо на оператор $T^{1/2}U$, јер је $(T^{1/2}U)^*T^{1/2}U = U^*TU$, док је $T^{1/2}U(T^{1/2}U)^* = T^{1/2}UU^*T^{1/2} = T$.

(ПТ3) Нека је $B(H) \ni T \geq 0$. За било које две базе φ и ψ важи $\operatorname{tr}_\varphi(T) = \operatorname{tr}_\psi(T)$. Другим речима траг позитивног оператора не зависи од избора базе, те можемо да престанемо да у индексу означавамо базу. Заиста, пресликавање U које базни вектор φ_j пресликава у $\psi_=j$ унитарно, па на основу пртходног имамо

$$\operatorname{tr}_\psi(T) = \sum_j \langle T\psi_j, \psi_j\rangle = \sum_j \langle TU\varphi_j, U\varphi_j\rangle = \sum_j \langle U^*TU\varphi_j, \varphi_j\rangle = \sum_j \langle T\varphi_j, \varphi_j\rangle = \operatorname{tr}_\varphi(T).$$

(ПТ4) Нека је $B(H) \ni T \geq 0$ и нека је $V \in B(H)$ парцијална изометрија. Тада је $\operatorname{tr}(V^*TV) \leq \operatorname{tr}(T)$. Посебно, ако T има коначан траг, има га и V^*TV. Да бисмо ово доказали, уочимо неку базу φ'_j потпростора $\operatorname{Im} V^*$ и допунимо је векторима φ''_j до базе целог простора H. Очито важи $V\varphi''_j = 0$, а за слике вектора φ'_j уведимо ознаку $\psi'_j = V\varphi'_j$. Вектори ψ'_j чине базу за $\operatorname{Im} V$, и могу се допунити неким векторима ψ''_j до базе за H. Сада имамо

$$\operatorname{tr}(V^*TV) = \sum_j \langle V^*TV\varphi_j, \varphi_j\rangle = \sum_j \left\langle TV\varphi'_j, V\varphi'_j\right\rangle + \sum_j \left\langle TV\varphi''_j, V\varphi''_j\right\rangle.$$

Други сабирак се анулира, док је други једнак

$$\sum_j \left\langle T\psi'_j, \psi'_j\right\rangle \leq \sum \langle T\psi_j, \psi_j\rangle = \operatorname{tr}(T).$$

(ПТ5) Ако је $0 \leq S \leq T$ онда је $\operatorname{tr}(S) \leq \operatorname{tr}(T)$. Посебно, ако T има коначан траг, онда и S има коначан траг. Ово је тривијално. Довољно је неједнакост $\langle S\varphi_j, \varphi_j\rangle \leq \langle T\varphi_j, \varphi_j\rangle$ просумирати по свим базним векторима.

(ПТ6) Ако $\operatorname{tr}(A^*A), \operatorname{tr}(B^*B) < +\infty$ онда и $\operatorname{tr}(A+B)^*(A+B), \operatorname{tr}(A-B)*(A-B) < +\infty$. Ова тврдња следи на основу идентитета

$$(A+B)^*(A+B) + (A-B)^*(A-B) = 2A^*A + 2B^*B \tag{7}$$

и чињенице да су сви сабирци у том идентитету позитивни.

5.9. Нуклеарни оператори. Дефинишемо скуп $\mathfrak{S}_1 = \{T \in B(H) \mid \operatorname{tr}(|T|) < +\infty\}$. Елементе тог скупа називамо *нуклеарни* или *траговити* оператори. Користи се још и ознака $L^1(B(H))$. То је природан скуп на коме се може ваљано дефинисати траг.

(Т1) Ако $T \in \mathfrak{S}_1$, онда ред (6) апсолутно конвергира и

$$|\operatorname{tr}_\varphi(T)| \leq \operatorname{tr}(|T|). \tag{8}$$

(На левој страни још увек стоји ознака за базу, јер још нисмо доказали независнот резултата од избора базе.)

Ово ћемо доказати на основу следеће неједнакости

$$2|\langle Tx, x\rangle| \leq \langle |T|x, x\rangle + \langle |T|V^*x, V^*x\rangle, \tag{9}$$

где је $T = V|T|$ поларно разлагање оператора T. Њу изводимо овако:

$$0 \leq ||(|T|^{1/2} - \lambda|T|^{1/2}V^*)x||^2 = ||\,|T|^{1/2}x||^2 - 2\operatorname{Re}\bar\lambda \left\langle |T|^{1/2}x, |T|^{1/2}V^*x\right\rangle + |\lambda|^2||\,|T|^{1/2}V^*x||^2.$$

Одатле налазимо
$$2\,\mathrm{Re}\,\bar{\lambda}\,\langle Tx,x\rangle \le \langle |T|x,x\rangle + |\lambda|^2\,\langle |T|V^*x,V^*x\rangle\,,$$
па остаје још да узмемо $\lambda = e^{-i\alpha}$, где је $\alpha = \arg\langle Tx,x\rangle$.

Сада из (9) лако изводимо
$$2|\,\mathrm{tr}_\varphi(T)| \le \sum_j \langle |T|\varphi_j,\varphi_j\rangle + \sum_j \langle V|T|V*\varphi_j,\varphi_j\rangle = \mathrm{tr}(|T|) + \mathrm{tr}(V|T|V^*) \le 2\,\mathrm{tr}(|T|),$$
на основу својства (ПТ4).

(Т2) Ако $T \in \mathfrak{S}_1$ онда траг не зависи од избора базе.

Послужићемо се својством (ПТ6). Ако ту ставимо $A = |T|^{1/2}$ и $B = |T|^{1/2}V^*$ (где је $T = V|T|$), онда је $A^*A = |T|$, $B^*B = V|T|V*$ и оба та оператора имају коначан траг, први по претпоставци, а други на основу (ПТ4). Ако ставимо $S_1 = (A+B)^*(A+B) \ge 0$, онда је и $\mathrm{tr}(S_1) < +\infty$. С друге стране
$$S_1 = (A+B)^*(A+B) = (|T|^{1/2} + |T|^{1/2}V^*)^*(|T|^{1/2} + |T|^{1/2}V^*) = |T| + T + T^* + V|T|V^*.$$
Тако се $T + T^*$ може изразити као линеарна комбинација три позитивна оператора S_1, $|T|$ и $V|T|V^*$ са коначним трагом (први на основу (ПТ6), други по претпоставци и трећи на основу (ПТ4))

Ако у (ПТ6) ставимо $A' = |T|^{1/2}$, $B' = i|T|^{1/2}V^*$, закључићемо да је $\mathrm{tr}(S_2) < +\infty$, где је $S_2 = (A'+B')^*(A'+B')$, док је с друге стране после краћег рачуна $S_2 = -i(T-T^*) + |T| + V|T|V^*$, па се и $T - T^*$ може изразити као линеарна комбинација три позитивна оператора са коначним трагом. Сада се $T \pm T^*$ изражавају као линеарне комбинације позитивних нуллеарних, па се одатле, уз увећање броја сабирака, и T и T^* изражавају на такав начин. То јест
$$\begin{aligned} T &= \sum c_i Q_i, \qquad Q_i \ge 0, \mathrm{tr}(Q_i) < +\infty \\ T^* &= \sum c_i' Q_i', \qquad Q_i' \ge 0, \mathrm{tr}(Q_i') < +\infty. \end{aligned} \tag{10}$$
Одатле је јасно да $\mathrm{tr}_\varphi(T)$ не зависи од избора базе, па ћемо га означавати само са $\mathrm{tr}(T)$.

5.10. Један заостали резултат о C^* алгебрама. Нека је A нека C^*-алгебра и a, $b \in A$.

а) Ако је $0 \le a \le b$ онда је и $0 \le a^{1/2} \le b^{1/2}$, односно пресликавање $a \mapsto a^{1/2}$ је оператор монотоно;

б) Важи неједнакост $|ab| \le ||a||\,|b|$ (поредак у C^* алгебри).

Доказ. а) Претпоставимо прво да су a и b инвертибилни. Пре свега из полазне неједнакости конјуговањем са $b^{-1/2}$ налазимо
$$b^{-1/2}ab^{-1/2} \le 1.$$
Даље је
$$\begin{aligned} b^{-1/4}a^{1/2}b^{-1/4} \le ||b^{-1/4}a^{1/2}b^{-1/4}||1 = r(b^{-1/4}a^{1/2}b^{-1/4})1 = r(b^{-1/2}a^{1/2})1 \le \\ \le ||b^{-1/2}a^{1/2}||1 = ||b^{-1/2}ab^{-1/2}||^{1/2}1 \le 1, \end{aligned}$$
одакле конјуговањем са $b^{1/4}$ добијамо тражено. Ако a и b нису инвертибилни, онда $a + \varepsilon 1$ и $b + \varepsilon 1$ јесу, па је одатле
$$b^{1/2} - a^{1/2} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big((b+\varepsilon 1)^{1/2} - (a+\varepsilon 1)^{1/2}\Big) \ge 0,$$
јер је скуп позитивних оператора затворен. (Последње се најлакше види тако што форма $\langle \varphi(a)x,x\rangle$, где је φ нека верна репрезентација остаје позитивна после узимања лимеса);

б) Пре свега имамо $a^*a \le ||a^*a||1 = ||a||^2 1$, што после конјуговања са b постаје $|ab|^2 \le ||a||^2|b|^2$. Сада извадимо корен и неједнакост остаје на снази према претходном. □

5.11. Став [простор нуклеарних оператора]. а) Скуп $\mathfrak{S}_1$ је векторски простор и израз $||T||_1 = \mathrm{tr}(|T|)$ је једна норма на њему. (Ту норму зовемо *нуклеарна*);

б) $\mathfrak{S}_1$ је двострани самоадјунговани идеал. Прецизније, ако $T \in \mathfrak{S}_1$ и $S \in B(H)$, онда ST, TS, $T^* \in \mathfrak{S}_1$. При томе важе релације
$$||ST||_1, ||TS||_1 \le ||S||\,||T||_1, \quad ||T^*||_1 = ||T||_1; \tag{11}$$

в) Сваки нуклеаран оператор је компактан. Нуклеарна норма је већа од полазне. Оператори коначног ранга су густи у $\mathfrak{S}_1$.

Доказ. Овај доказ нећемо извести редом, већ најкраћим путем. Свако новодоказано својство биће нумерисано као наставак опретходна два својства (T1) и (T2).

(T3) Лака својства норме (сва осим неједнакости троугла). Једноставно се види да $T \in \mathfrak{S}_1 \Rightarrow \lambda T \in \mathfrak{S}_1$, $||\lambda T||_1 = |\lambda|\,||T||_1$, као и $||T||_1 \geq 0$. Ако је $||T||_1 = 0$, узимајући у обзир да је сваки вектор члан неке базе, једноставно закључујемо да за све $x \in H$ важи $\langle |T|x, x\rangle = 0$ одакле је $|T| = 0$ а тиме и $T = 0$.

(T4) $\mathfrak{S}_1$ је леви идеал. Заиста, ако $T \in \mathfrak{S}_1$, $S \in B(H)$, онда на основу заосталог резултата имамо $|ST| \leq ||S||\,|T|$, а одатле на основу (ПТ5), $\mathrm{tr}(|ST|) \leq ||S||\,\mathrm{tr}(|T|)$. Тиме смо уједно доказали и прву неједнакост у (11).

Примедба. Некомутативност је овде изразита, јер не можемо на исти начин доказати да је $\mathfrak{S}_1$ десни идеал.

(T5) Адитивност и неједнакост троугла. Нека $S, T \in \mathfrak{S}_1$ и нека је $S + T = W|S + T|$ поларно разлагање оператора $S + T$. Тада је $|S + T| = W(S + T) = WS + WT$. Како је $\mathfrak{S}_1$ леви идеал, то $WS, WT \in \mathfrak{S}_1$, постоје њихови трагови и не зависе од избора базе. Тако је

$$||S + T||_1 = \mathrm{tr}(W^*S) + \mathrm{tr}(W^*T) \leq ||W^*||(||S||_1 + ||T||_1) \leq ||S||_1 + ||T||_1.$$

(T6) $\mathfrak{S}_1$ је самоадјунгован и десни идеал. Да из $T \in \mathfrak{S}_1$ следи $T^* \in \mathfrak{S}_1$ види се на основу (10), јер смо већ доказали да је скуп нуклеарних оператора затворен за линеарне комбинације. Сада лако изводимо да је у питању десни идеал, јер ако $S \in B(H)$, $T \in \mathfrak{S}_1$, следи $T^* \in \mathfrak{S}_1$, па одатле $(TS)^* = S^*T^* \in \mathfrak{S}_1$, па остаје да још једном применимо самоадјунгованост. Доказ друге две релације у (11), међутим, одложићемо за наредни став.

(T7) Оператори коначног ранга су густи у $\mathfrak{S}_1$. Заиста, нека је $T \in \mathfrak{S}_1$ и нека је φ_j произвољна база за H. Одаберимо коначан скуп индекса J_0, такав да је $\sum_{j \notin J_0} \langle |T|\varphi_j, \varphi_j\rangle < \varepsilon$. Дефинишимо оператор S на бази φ_j са $S\varphi_j = |T|\varphi_j$ за $j \in J_0$, и $S\varphi_j = 0$ иначе. Очигледно је S коначног ранга (ранг му је мањи од кардиналности скупа J_0), а важи и $0 \leq S \leq |T|$, јер је $S = P|T|P$, односно $|T| - S = (I - P)|T|(I - P)$, где је P пројектор на линеарни омотач вектора φ_j, $j \in J_0$. С друге стране $|||T| - S||_1 < \varepsilon$, а с обзиром да важи (11) и да је скуп оператора коначног ранга идеал, то је и $||T - VS||_1 = ||V(|T| - S)||_1 < \varepsilon$.

(T8) Важи $||T|| \leq ||T||_1$. Да бисмо ово доказали, уочимо јединични вектор φ са својством $||\,|T|^{1/2}\varphi|| > ||\,|T|^{1/2}|| - \varepsilon$. Он је елемент неке базе, па је $||T||_1 \geq \langle |T|\varphi, \varphi\rangle = ||\,|T|^{1/2}\varphi||^2 > (||\,|T|^{1/2}|| - \varepsilon)^2$, па резултат добијамо када $\varepsilon \to 0$, јер за позитивне операторе важи $||A^2|| = ||A||$, што се види из Гељфандове трансформације ($\max f^2 = (\max f)^2$ за $f \geq 0$).

(T9) Важи инклузија $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_\infty$. Заиста, ако је $T \in \mathfrak{S}_1$ онда постоји S коначног ранга који му је ε близу (у нуклеарној норми), а тиме и $||T - S|| \leq ||T - S||_1 < \varepsilon$. Тако се T може приказати као лимес оператора коначног ранга (у обичној операторној норми) па је T компактан.

Примедба. Као што је познато, у $\mathfrak{S}_\infty$ нема правих затворених идеала. Оних незатворених има, и један такав пример је $\mathfrak{S}_1$. Упозорење, $\mathfrak{S}_1$ није затворен у полазној (операторској) норми, али јесте затворен у већој, нулеарној. Прецизније $\mathfrak{S}_1$ је комплетан. То ћемо, међутим, доказати мало касније.

$\square$

5.12. Својства трага. а) Функција $\mathrm{tr} : \mathfrak{S}_1 \to \mathbf{C}$ је линеаран функционал норме једнаке 1;
б) За $S \in B(H)$ и $T \in \mathfrak{S}_1$ важи $\mathrm{tr}(ST) = \mathrm{tr}(TS)$.

Доказ. а) Линеарност је очигледна. Ограниченост следи из (8), а норма се достиже на свим позитивним операторима;

б) Нека је, за почетак, S унитаран, то јест $\langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle$. Ако је φ_j нека база, онда је и $S\varphi_j$ такође база, па како траг не зависи од базе, имамо

$$\mathrm{tr}(ST) = \sum_j \langle ST(S\varphi_j), S\varphi_j\rangle = \sum_j \langle TS\varphi_j, \varphi_j\rangle = \mathrm{tr}(TS).$$

У општем случају, резултат следи на основу чињенице да је сваки оператор линерна комбинација (највише четири) унитарна.

Сада ћемо доказати друге две релације у (11). Докажимо последњу, оно која се односи на инволуцију. Нека је $T \in \mathfrak{S}_1$, и нека су $T = V|T|$ и $T^* = W|T^*|$ поларна разлагања оператора T

односно T^*. Тада је $|T^*| = W^*T^*$ па је

$$\operatorname{tr}(|T^*|) = \operatorname{tr}(W^*T^*) = \operatorname{tr}(W^*|T|V^*) = \operatorname{tr}(V^*W^*|T|) \leq ||V^*W^*|| \operatorname{tr}(|T|) \leq \operatorname{tr}(|T|),$$

где смо негде у средини искористили својство доказано у претходној тачки. Обратну неједнакост добијамо заменом T и T^*.

Сада имамо $||TS|| = ||S^*T^*|| \leq ||S^*|| \, ||T^*||_1 = ||S|| \, ||T||_1$. □

5.13. Став. Важи $\mathfrak{S}_\infty^* \cong \mathfrak{S}_1$. Изоморфизам се остварује тако што је сваки функционал $\Lambda \in \mathfrak{S}_\infty$ облика

$$\Lambda(T) = \operatorname{tr}(AT), \tag{12}$$

за неки нуклеаран A.

Посебно, одатле следи да је скуп $\mathfrak{S}_1$, осим што је двострани $*$ идеал, уједно и комплетан.

Доказ. Да је изразом (12) задат линеаран функционал је очигледно. Да је ограничен добијамо $|\Lambda(T)| \leq ||AT||_1 \leq ||A||_1||T||$, па је $||\Lambda|| \leq ||A||_1$. Линеарност пресликавања $A \leftrightarrow \Lambda$ је тривијална.

Обратно, нека је $\Lambda \in \mathfrak{S}_\infty^*$. Посматрајмо оператор $f \otimes \bar{g}$ ранга један, који је наравно компактан. Пресликавање $(f,g) \mapsto \Lambda(f \otimes \bar{g})$ је очигледно билинеарно. Покажимо и да је ограничено. Имамо

$$|\Lambda(f \otimes \bar{g})| \leq ||\Lambda|| \, ||f \otimes \bar{g}|| \leq ||\Lambda|| \, ||f|| \, ||g||,$$

јер је, због Коши Шварцове неједнакости $|| \langle x, g \rangle f|| = | \langle x, g \rangle | \, ||f|| \leq ||f|| \, ||g|| \, ||x||$. (Овде се чак и достиже једнакост, али то тренутно није важно.) Отуда постоји ограничен оператор A такав да је

$$\Lambda(f \otimes \bar{g}) = \langle Af, g \rangle .$$

Докажимо да је A нуклеаран. Нека је $A = V|A|$ његово поларно разлагање. Уочимо неку базу ψ_j у слици изометрије V. Тада је систем $\varphi_j = V^*\psi_j$ нека база у полазном простору изометрије V, односно у $\operatorname{Im} V^*$ и може се допунити до базе целог H коју ћемо такође означавати са φ_j. Имамо

$$\langle |A|\varphi_j, \varphi_j \rangle = \langle |A|\varphi_j, V^*\psi_j \rangle = \langle V|A|\varphi_j, \psi_j \rangle = \langle A\varphi_j, \psi_j \rangle = \Lambda(\varphi_j \otimes \bar{\psi}_j),$$

ако је $\varphi_j = V^*\psi_j$. У супротном је резултат израчунавања нула, јер је тада $\varphi_j \perp \operatorname{Im} V^* = \operatorname{Im} |A|$, односно $\varphi_j \in \ker |A|$. Када последњу једнакост просумирамо када $j \in J_0$ - неки коначан скуп индекса, налазаимо

$$\sum_{j \in J_0} \langle |A|\varphi_j, \varphi_j \rangle = \Lambda(\sum \varphi_j \otimes \bar{\psi}_j) \leq ||\Lambda|| \, || \sum \varphi_j \otimes \bar{\psi}_j||,$$

где се, евентуално, скуп индекса по којима се сумира на десној страни смањио. Оператор $\sum \varphi_j \otimes \bar{\psi}_j$ је коначног ранга (слика му је у линеалу вектора φ_j), а како оно преводи ψ_j у φ_j, реч је о (делимичној) изометрији, заправо рестрикцији оператора V^*, па има норму мању или једнаку од 1. Тако је $\sum\limits_{j \in J_0} \langle |A|\varphi_j, \varphi_j \rangle \leq ||\Lambda||$ за сваки коначан скуп индекса J_0. Отуда је $||A||_1 \leq ||\Lambda||$. Како смо обратну неједнакост већ доказали ово завршава доказ.

Нагласимо, још једанпут, да одавде следи и да је $\mathfrak{S}_1$ комплетан као дуални простор. □

5.14. Став. Важи $\mathfrak{S}_1^* \cong B(H)$. Изоморфизам се остварује тако што је сваки функционал $\Lambda \in \mathfrak{S}_1$ облика (12) за неки ограничен A.

Доказ. Као и у претходном ставу лако констатујемо ограниченост и линеарност пресликавања (12) као и линеарност коресподенције $A \leftrightarrow \Lambda$.

Нека је $\Lambda \in \mathfrak{S}_1$. Поново ћемо се послужити оператором $f \otimes \bar{g}$ ранга један. Његова траг рачунамо овако

$$\operatorname{tr}(f \otimes \bar{g}) = \sum_j \langle f \otimes \bar{g}\varphi_j, \varphi_j \rangle = \sum_j \langle \varphi_j, g \rangle \langle f, \varphi_j \rangle = \langle f, g \rangle ,$$

док је његова један норма, према (5) једнака

$$\operatorname{tr} |f \otimes \bar{g}| = ||f|| \, ||g|| \operatorname{tr} \frac{f}{||f||} \otimes \frac{\bar{f}}{||f||} = ||f|| \, ||g||.$$

Отуда је пресликавање $(f, g) \mapsto \Lambda(f \otimes \bar{g})$ ограничено и билинеарно и норма му је мања или једнака од $||\Lambda||$. Тако постоји ограничен оператор A (норме мање или једнаке од $||\Lambda||$) такав да је $\Lambda(f \otimes \bar{g}) = \langle Af, g\rangle$. Треба још уочити да је $A(f \otimes \bar{g}) = (Af) \otimes \bar{g}$, одакле је

$$\Lambda(f \otimes \bar{g}) = \langle Af, g\rangle = \mathrm{tr}(f \otimes \bar{g}).$$

Доказ је сада готов, јер је линеарни омотач оператора облика $f \otimes \bar{g}$ једнак скупу оператора коначног ранга, а последњи су густи у $\mathfrak{S}_1$. □

5.15. Теорема (Лидски). У линеарној алгебри показује се (релативно једноставно) да је траг матрице једнак збиру свих сопствених вредности, при чему сваку сопствену вредност рачунамо онолико пута колика је димензија њеног коренског потпростора.

(То није исто што и њена вишеструкост. Наиме, коренски потпростор је скуп свих вектора x за које је $(T - \lambda I)^k x = 0$ за неки природан број k, а сопствени потпростор скуп оних x-ова за које је $Tx = \lambda x$. Отуда је сопствени потпростор обавезно подскуп коренског, али не и обратно, осим када је T нормалан, па вишеструкост сопствене вредности може бити мања од димензије коренског потпростора.)

Уопштење ове тврдње познато је као *Теорема Лидскої*, која тврди да је за нуклеаран T, $\mathrm{tr}\, T$ једнак суми свих сопствених вредности ако сваку рачунамо онолико пута колика је димензија коренског потпростора.

Доказ ове тврдње није нимало једноставан, без обзира што се базира на граничном прелазу са коначно димензионалних простора. Ми га овде прескачемо јер Теорему нећемо даље користити. Теорема је, ипак, наведена, јер је довољно позната и значајна да би се изоставила приликом првог помињања нуклеарних оператора.

ХИЛБЕРТ-ШМИТОВИ ОПЕРАТОРИ

5.16. Дефиниција. За оператор $T \in B(H)$ кажемо да је *Хилберт̄-Шмит̄ов* ако је $\mathrm{tr}(|T|^2) = \mathrm{tr}(T^*T) < +\infty$. Скуп свих Хилберт Шмитових оператора означавамо са $\mathfrak{S}_2$ или са $L^2(B(H))$. Нема ничег изненађујућег у чињеници да је $\mathfrak{S}_2$ Хилбертов простор. Шта више, рад у $\mathfrak{S}_2$ знатно је једноставнији него у $\mathfrak{S}_1$. Али, идемо редом

5.17. Став. а) Скуп $\mathfrak{S}_2$ је векторски простор, а израз $||T||_2 = \mathrm{tr}(T^*T)^{1/2}$ је једна норма. Та норма задовољава релацију паралелограма, а скаларни производ који проистиче из ње је $\langle S, T\rangle = \mathrm{tr}(T^*S)$;

б) Важи $\mathfrak{S}_2 \cdot \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1$, односно производ два Хилберт-Шмитова оператора је нуклеаран и обратно, сваки нуклеаран се може написати као производ два Хилберт-Шмитова;

в) Простор $\mathfrak{S}_2$ је двострани самоадјунговани идеал, и важе неједнакости

$$||ST||_2, ||TS||_2 \le ||S||\, ||T||_2, \quad ||T^*||_2 = ||T||_2; \tag{13}$$

г) Скуп оператора коначног ранга је густ у $\mathfrak{S}_2$.

д) Важе релације $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{S}_\infty$, $||T|| \le ||T||_2 \le ||T||_1$, као и

Доказ. а) и б) Затвореност за множење скаларом, као и сва својства норме, изузев неједнакости троугла се једноставно доказује. Што се тиче затворености за сабирање вектора, довољно је погледати у једнакост (7). Наиме, сваки сабирак са леве стране је мањи од десне, а ако A, $B \in \mathfrak{S}_2$, онда је траг десне стране коначан.

Сада када знамо да је скуп $\mathfrak{S}_2$ линеаран простор, можемо доказати тврдњу под б). Наиме, јасно је $|T| \in \mathfrak{S}_2 \Leftrightarrow |T|^2 \in \mathfrak{S}_1$, па инклузија $\mathfrak{S}_2 \cdot \mathfrak{S}_2 \subseteq \mathfrak{S}_1$ следи на основу варијанте поларизационог идентитета

$$T^*S = \sum_{k=0}^{3} i^k (S + i^k T)^*(S + i^k T),$$

јер су $S + i^k T$ Хилберт-Шмитови, па сваки сабирак на десној страни има коначан траг. Недостаје још да приметимо да је $T \in \mathfrak{S}_2$ еквиваклентно са $T^* \in \mathfrak{S}_2$, што једноставно излази из дефиниције и својства (ПТ1). Шта више, из истог својства одмах следи $||T||_2 = ||T^*||_2$. Обратно, ако је $T \in \mathfrak{S}_1$ и $T = V|T|$ његово поларно разлгање, одмах се види да су $V|T|^{1/2}$ и $|T|^{1/2}$ Хилберт-Шмитови;

Сада је израз $\mathrm{tr}(T^*S)$ коректно дефинисан за $S, T \in \mathfrak{S}_2$, а ствар је рутине да се провере својства скаларног производа. Одатле одмах важи Коши-Шварцова неједнакост

$$|\,\mathrm{tr}(T^*S)|^2 = |\,\langle S, T\rangle\,|^2 \leq ||S||_2\,||T||_2 = \mathrm{tr}(S^*S)\,\mathrm{tr}(T^*T),$$

а одатле и неједнакост троугла за норму;

в) Садмоадјунгованост смо већ констатовали, па је довољно још доказати да је реч о левом идеалу. То, међутим, једноставно следи из неједнакости $T^*S^*ST \leq ||S||^2T^*T$. Одатле следе и одговарајуће неједнакости;

г) Доказује се на исти начин као и код нуклеарних. За коначан скуп J_0 са својством

$$\sum_{j\notin J_0} \langle T^*T\varphi_j, \varphi_j\rangle = \sum_{j\notin J_0} ||T\varphi_j||^2 < \varepsilon,$$

дефинишемо $S\varphi_j = T\varphi_j$ кад $j \in J_0$ и $S\varphi_j = 0$ иначе, и онда $||S - T||_2 = \sum_j ||(S - T)\varphi_j||^2 = \sum_{j\notin J_0} ||T\varphi_j||^2 < \varepsilon$;

д) Ако је T нуклеаран, он је производ два Хилберт-Шмитова, и како ови последњи чине идеал то је и сам T Хилберт-Шмитов. Неједнакост $||T|| \leq ||T||_2$ изводимо тако што уочимо јединични вектор φ са својством $||T||^2 - \varepsilon < ||T\varphi_j||^2$, а како је φ члан неке базе, то је десна страна мања од $||T||_2^2$. Сада комбинујући последње својство са чињеницом да је скуп оператора коначног ранга густ лако налазимо да је сваки Хилберт-Шмитов компактан.

Најзад, преосталу неједнакост добијамо овако. Нека је $T \in \mathfrak{S}_1$ и $||T||_1 \leq 1$. Тада је и $||T|| \leq 1$, па имамо

$$||T||_2^2 = \mathrm{tr}(T^*T) \leq ||T||\,||T||_1 \leq 1,$$

што завршава доказ. □

5.18. Став. Простор $\mathfrak{S}_2$ је Хилбертов простор.

Доказ. Доказали смо својства скаларног производа, па остаје још да докажемо комплетност. Нека је T_n Кошијев низ у $\mathfrak{S}_2$. Тада је, због $||T_m - T_n|| \leq ||T_m - T_n||_2$, то Кошијев низ и у операторној норми, па постоји лимес $T = \lim T_n$. За сваки коначан ортонормиран систем φ_j имамо

$$\sum_{j=1}^{n} ||T\varphi_j||^2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} ||T_n\varphi_j||^2 \leq \limsup_{n\to+\infty} ||T_n||_2^2,$$

па $T \in \mathfrak{S}_2$ и $||T||_2 \leq \limsup ||T_n||_2$.

Сада одаберемо n_0 тако да за све $n \geq n_0$ важи $||T_n - T_{n_0}|| < \varepsilon$ и пројектор коначног ранга P такав да је $||T(I - P)||_2, ||T_{n_0}(I - P)||_2 < \varepsilon$, што можемо, јер јескуп оператора коначгног ранга густ. Изводимо

$$||T - T_n||_2 \leq ||(T - T_{n_0})P|| + ||(T - T_{n_0})(I - P)|| + ||T_{n_0} - T_n|| \leq ||(T - T_{n_0})P|| + 3\varepsilon,$$

па резултат следи јер се израз $||(T - T_{n_0})P||$ може учинити произвољно малим, јер су све норме на коначно димензионалним просторима еквивалентне. □

ПАР ЗАПАЖАЊА О КОМПАКТНИМ ОПЕРАТОРИМА

5.19. Спектар компактног оператора. Позната је *Фредхолмова алтернатива* према којој, за компактан оператор T и фиксирано $0 \neq \lambda \in \mathbf{C}$ важи тачно једна од ове две могућности:

(1) Једначина $Tx = \lambda x$ има само тривијално решење;

(2) Једначина $Tx = \lambda x + y$ има решења за свако y.

Ова тврдња важи на Банаховим просторима. Први услов, преформулисан гласи да је језгро оператора $T - \lambda I$ тривијално, док други услов говори да је његова слика цео простор. Другим речима $T - \lambda I$ је инјективан ако и само ако је сурјективан. Посебно, ако $\lambda \neq 0$ није сопствена вредност, онда је (према теореми о отвореном пресликавању) то регуларна тачка. Како је нула увек у спектру компактног оператора (осим у тривијалном случају када се све одвија на коначно димензионалном простору) то је

$$\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \exists x \neq 0\, Tx = \lambda x\},$$

односно спектар компактног оператора се састоји од нуле и сопствених вредности. Свака сопствена вредност ј коначне вуишеструкости, јер би се у противном лако нашао низ x_n такав да Tx_n нема конвергентан подниз. Из истих разлога сопствене вредности образују нула низ. Наравно, ако их има бесконачно много. Ако их има коначно много, а полазни простор је бесконачно димензионалан, онда је и 0 обавезно сопствена вредност, и то бесконачне вишеструкости. Није искључена могућност да компактан оператор нема сопствених вредности. Тада је његов спектрални радијус $r(T) = 0$, и такав комактан квазинилпотентан оператор назива се *Волшерин*. Такви оператори, јасно, нису нормални, јер за нормалне важи $||T|| = r(T)$.

У сваком случају, сопствене вредности компактног оператора, ако их понављамо онолико пута колика је њихова вишеструкост обавезно образују нула низ. Тај низ означаваћемо са $\lambda_n(T)$, или само са λ_n ако је јасно о ком оператору се ради.

5.20. Спектрално разлагање нормалног компактног оператора. Ако је T нормалан оператор, онда је према спектралној теореми

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda).$$

Ако је T при томе и компактан, онда је $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n(T) \mid n \geq 1\}$. При томе је спектрална мера тачке λ_n пројектор на сопствени потпростор који према претходном одељку мора бити коначне димензије. Тај пројектор се може приказати као $Px = \sum \langle x, e_k \rangle e_k$, односно $P = \sum e_k \otimes \bar{e}_k$, где је e_k база сопственог потпростора. Када све то обухватимо, добијамо спектрално разлагање компактног оператора

$$T = \sum_n \int_{\lambda_n} \lambda \, \mathrm{d}E(\lambda) = \sum_n \lambda_n P_{\lambda_n} = \sum_n \lambda_n \varphi_n \otimes \bar{\varphi}_n, \tag{14}$$

при чему наглашавамо, још једанпут, да се у низу λ_n свака сопствена вредност понавља онолико пута колика је њена вишеструкост.

5.21. Шмитов развој и сингуларни бројеви. Ако је оператор T само компактан, али не и нормалан онда немамо могућност да га прецтавимо помоћу спектралне теореме. Међутим, ако је $T = V|T|$ поларно разлагање оператора, онда је његова апсолутна вредност $|T|$ компактан позитиван оператор. (Наиме $|T|^2 = T^*T$ је компактан, јер они чине идеал, а функција $\lambda \mapsto |\lambda|$ је непрекидна, па $|T| \in C^*(|T|^2)$ што је минимална која садржи T^*T и тиме мања од алгебре компактних.) Сопствене вредности оператора $|T|$ поређане у опадајући низ (са понављањем ако има вишеструких) називамо низ *сингуларних бројева* оператора T и означвамо их са $s_n(T)$. Дакле

$$s_n(T) = \lambda_n(|T|).$$

Када искористимо развој (14) за $|T|$ и помножимо с лева са V налазимо

$$T = V|T| = V(\sum_n \lambda_n(|T|)\varphi_n \otimes \bar{\varphi}_n) = \sum_n s_n(T) V\varphi_n \otimes \bar{\varphi}_n.$$

Како је V изометрија на $\operatorname{Im} T$, и како $\varphi_n \in \operatorname{Im} T$, то су вектори $\psi_n = V\varphi_n$ ортонормирани, и важи тзв. *Шмишов развој*:

$$T = \sum_n s_n(T)\psi_n \otimes \bar{\varphi}_n, \qquad \text{односно} \qquad Tx = \sum_n s_n(T) \langle x, \varphi_n \rangle \psi_n. \tag{15}$$

Није тешко видети да је $s_1(T) = \lambda_1(|T|) = \lambda_1(T^*T)^{1/2} = ||T^*T||^{1/2} = ||T||$, јер је λ_1 највећа сопствена вредност. Међутим, и нуклеарна и Хилберт-Шмитова норма се могу изразити преко сингуларних бројева. Наиме, како је $|T| = \sum_n s_n \varphi_j \otimes \bar{\varphi}_j$, лако налазимо да је $\operatorname{tr}(|T|^p) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n^p(T)$. Отуда је

$$||T||_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n, \qquad ||T||_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} s_n^2\right)^{1/2}.$$

Примедба: Последње наводи на помисао да се дефинишу простори $\mathfrak{S}_p$ за $1 \leq p$ као $\mathfrak{S}_p = \{T \in B(H) \mid ||T||_p = (\operatorname{tr}(|T|^p))^{1/p} < +\infty\}$. Наравно, могуће је и то учинити и тада ће важити резултат $\mathfrak{S}_p^* \cong \mathfrak{S}_q$, где је $1/p + 1/q = 1$, и изоморфизам се поново остварује релацијом (12).

ЛОКАЛНО КОНВЕКСНЕ ТОПОЛОГИЈЕ НА $B(H)$

5.22. „Слабашне“ топологије. Поред стандардне, *униформне топологије* на $B(H)$ која проистиче из операторске норме, на скупу $B(H)$ свих ограничених оператора на Хилбертовом простору H можемо дефинисати још различитих локално конвексних топологија.

Јака топологија је најмања топологија за коју су сва пресликавања $B(H) \ni T \mapsto Tx \in H$, $x \in H$ непрекидна. Она се може задати и системом базних околина нуле:

$$B_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} = \{T \in B(H) \mid \forall j,\ ||Tx_j|| < \varepsilon\}, \qquad x_j \in H, \varepsilon > 0.$$

Заправо скупови $\{A \in B(H) \mid ||Ax|| < \varepsilon\}$, $x \in H$, $\varepsilon > 0$ су суббазне околине нуле, а базне су њихови пресеци. Додуше онда треба свако x_j да има своје ε_j, али се може узети најмање од тих ε_j-ова, а да се не наруше аксиоме базе за топологију. Овај аргумент нећемо даље понављати.

Еквивалентно, јака топологиоја се задаје системом полунорми

$$p_x(T) = ||Tx||, \qquad x \in H.$$

Слаба топологија је најмања топологија у којој су сва пресликавања $B(H) \ni T \mapsto \langle Tx, y\rangle$, $x, y \in H$ непрекидна. Она се може задати и системом базних околина нуле:

$$B_{x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n,\varepsilon} = \{T \in B(H) \mid \forall j,\ |\langle Tx_j, y_j\rangle| < \varepsilon\}, \qquad x_j, y_j \in H, \varepsilon > 0$$

или системом полунорми

$$p_{x,y}(T) = |\langle Tx, y\rangle|.$$

Операције сабирања и множења скаларом, непрекидне су у односу на све три наведене топологије, што се једноставно проверава.

Операција множења оператора непрекидна је у униформној и јакој топологији. За униформну то следи из $||A_\lambda B_\lambda - AB|| \le ||A_\lambda||\,||B_\lambda - B|| + ||A_\lambda - A||\,||B|| \to ||A|| \cdot 0 + 0 \cdot ||B|| = 0$. За јаку то следи из Банах-Штајнхаусове теореме, јер из $A_\lambda x \to Ax$ за свако $x \in H$, следи да је фамилија $||A_\lambda||$ ограничена, па је $||A_\lambda B_\lambda x - ABx|| \le ||A_\lambda||\,||B_\lambda x - Bx|| + ||A_\lambda(BX) - A(Bx)||$. Међутим она није непрекидна у слабој топологији. На пример, за низове

$$A_n x = \langle x, e_n\rangle\, e, \qquad B_n x = \langle x, e\rangle\, e_n,$$

где је e_n неки ортонормиран систем, имамо $A_n, B_n \to 0$ слабо, док је $A_n B_n x = \langle x, e\rangle\, e \not\to 0$.

Инволуција $A \mapsto A^*$ је непрекидна у униформној и у слабој топологији, у униформној јер је $||T^*|| = ||T||$, а у слабој, јер је $p_{x,y}(T^*) = |\langle T^*x, y\rangle| = |\langle x, Ty\rangle| = p_{y,x}(T)$. Међутим, инволуција није непрекидна у јакој топологији. Наиме, за већ поменуте низове A_n и B_n важи $A_n \to 0$, јако $B_n = A_n^* \not\to 0$, јако.

Последње је разлог да уведемо још једну топологију, јачу од јаке у којој ће и инволуција бити непрекидна.

Јака-$*$ топологија је најмања топологија за коју су сва пресликавања $A \mapsto Ax$, $A \mapsto A^*x$ непрекидна. Она се може задати и системом базних околина нуле

$$B_{x_1,\dots,x_n,\varepsilon} = \{A \in B(H) \mid \forall j,\ ||Ax_j||, ||A^*x_j|| < \varepsilon\}, \qquad x_j \in H, \varepsilon > 0$$

или системом полунорми

$$p_x(T) = ||Tx||, \qquad p_x^*(T) = ||T^*x||.$$

У односу на јаку-$*$ топологију, и инволуција је непрекидна. У ствари, то је најмања топологија која садржи јаку, и у односу на коју је инволуција непрекидна.

5.23. Ултра „слабашне“ топологије. Предметак „ултра“ у насловљеним топологијама не односи се на придев слаба, јака итд, већ на топологија. Свака од „ултра“ топологија нешто је јача од своје одговарајуће не-ултра топологије.

Ултрајака топологија је топологија задата системом базних околина нуле

$$B_{x_1,\dots,x_n,\dots,\varepsilon} = \{T \in B(H) \mid \sum_j ||Tx_j||^2 < \varepsilon\}, \qquad x_j \in H, \sum_j ||x_j||^2 < \infty, \varepsilon > 0$$

или системом полунорми

$$p_{x_1,\dots,x_n,\dots}(T) = \sum_j ||Tx_j||^2, \qquad \sum_j ||x_j||^2 < +\infty.$$

Ултрајака топологија је јача од јаке јер се у базним околинама нуле узима пребројиво много вектора, а у јакој коначно много. Свака јака базна околина нуле је уједно и ултрајака, бирајући $x_k = 0$ за $k > n$.

Ултраслаба топологија је топологија задата системом базних околина нуле

$$\{T \in B(H) \mid \sum_j |\langle Tx_j, y_j\rangle| < \varepsilon\}, \qquad x_j, y_j \in H, \sum_j ||x_j||^2, \sum_j ||y_j||^2 < +\infty, \varepsilon > 0.$$

или системом полунорми

$$p_{x_1,\dots,x_n,\dots,y_1,\dots,y_n,\dots}(T) = \sum_j |\langle Tx_j, y_j\rangle|, \qquad \sum_j ||x_j||^2, \sum_j ||y_j||^2 < +\infty.$$

Ултраслаба топологија је јача од слабе јер се у базним околинама нуле узима пребројиво много вектора, а у слабој коначно много. Свака слаба базна околина нуле је уједно и ултраслаба, бирајући $x_k = y_k = 0$ за $k > n$.

Нити у ултрајакој топологији инволуција није непрекидна, отуда уводимо још једну.

Ултрајака-$*$ топологија је... хм, нећемо ваљда опет понављати. Читалац нека сам закључи шта је то.

Свих шест новоуведених топологија по дефиницији зависе од амбијенталног простора и (барем за сада) не могу се дефинисати на произвољној C^*-алгебри

5.24. Став [о монотоној ограниченој мрежи]. Нека је T_α, $\alpha \in A$ нека монотона и ограничена мрежа самоадјунгованих оператора у $B(H)$. Тада та мрежа јако конвергира ка неком $T \in B(H)$.

Доказ. Да се подсетимо, скуп индекса је парцијално уређен скуп тако да сваки његов двочлани (тиме и сваки коначан) подскуп има горње ограничење. Мтежа T_α је растућа ако из $\alpha \le \beta$ следи $T_\alpha \le T_\beta$, а опадајућа ако под истим условима важи $T_\alpha \ge T_\beta$. Мрежа је ограничена ако постоје N, $M \in B(H)$ такво да је $N \le T_\alpha \le M$ за све $\alpha \in A$.

Примедба: Разматрање мрежа уместо низова обавезно је када баратамо са неметризабилним топологијама, јер се код таквих топологија појмови као што су затвореност, компактност итд, не дају опистаи низови али се дају описати мрежама.

Нека је наша мрежа растућа. Фиксирамо $x \in H$ и посматрамо мрежу реалних бројева $\langle T_\alpha x, x\rangle$. Она је растућа и ограничена одозго бројем $\langle Mx, x\rangle$, па је према томе конвергентна. Означимо њен лимес са $Q(x)$ и приметимо да је то такође и супремум исте мреже.

На основу поларизационог идентитета $\langle T_\alpha x, y\rangle = \sum_{k=0}^3 i^k \langle T_\alpha(x + i^k y), x + i^k y\rangle$ онда за све $x, y \in B(H)$ постоји и лимес $\lim_{\alpha\in A} \langle T_\alpha x, y\rangle$ и једнак је $\sum_{k=0}^3 i^k Q(x+i^k y)$. Билинеарност последњег израза следи јер се једнакости чувају преласком на лимес, па дакле постоји $T \in B(H)$ са својством $Q(x) = \langle Tx, x\rangle$ за све $x \in H$, односно

$$\lim_{\alpha\in A} \langle T_\alpha x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle\,,$$

за све x, $y \in H$. То значи да мрежа T_α слабо конвергира ка T.

Покажимо сада и да је конвергенција јака. Извешћемо једну релативно једноставну неједнакост. Нека је S произвољан позитиван оператор. Израз $\langle Sx, y\rangle$ је полускаларни производ, па важи Коши Шварцова неједнакост, а из ње изводимо

$$|\langle Sx, y\rangle|^2 \le \langle Sx, x\rangle \langle Sy, y\rangle \le ||S||\, ||y||^2 \langle Sx, x\rangle\,.$$

Стављајући горе $y = Sx$ налазимо

$$||Sx||^4 \le ||S||\, ||Sx||^2 \langle Sx, x\rangle\,, \qquad \text{односно} \qquad ||Sx||^2 \le ||S|| \langle Sx, x\rangle$$

.

Када последњу неједнакост применимо на операторе $T - T_\alpha \ge 0$ видимо да из слабе (у овом случају, не и увек) следује јака конвергенција. □

Задаци

1. Нека је $A^* = A \in B(H)$. Доказати да је $\ker A^n = \ker A$ за сваки природан број n. Примером показати да се може догодити $\operatorname{Im} A^{n+1} \subsetneqq \operatorname{Im} A^n$.

2. Нека је $L^2(D)$ простор квадратно интеграбилних функција на $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ у односу на меру $(1/\pi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Доказати да су функције z^k, $k \geq 0$ ортогоналне у том простору. Нормирати их. Доказати да простор разапет тим функцијама сачињавају искључиво аналитичке функције. (То је Бергманов простор.) Доказати да пројектор на тај потпростор може да се изрази као

$$Pf(z) = \int_D f(\zeta)(1 - z\bar{\zeta})^{-2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

3. а) Доказати да је Кошијев интегрални оператор, дат са

$$(Kf)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$

ограничен оператор на Бергмановом простору.

Ако је $S : L^2(D) \to L^2(D)$ дат са $(Sf)(z) = zf(z)$, доказати да је оператор $KS - SK$ ранга један, те да је $\mathrm{tr}(KS - SK) \neq 0$.

4. а) Нека је на скупу $H \otimes_{alg} H$ дато пресликавање $||\cdot||_{\max}$ са

$$||a||_{\max} = \inf_{a=\sum \lambda_j x_j \otimes y_j} \sum |\lambda_j|,$$

при чему се инфимум узима по свим представљањима $a = \sum \lambda_j x_j \otimes y_j$ где су x_j, y_j јединични вектори. Доказати да је $||\cdot||_{\max}$ једна норма на $H \otimes_{alg} H$ као и да је $||x \otimes y||_{\max} = ||x||\,||y||$;

б) Нека је $||\cdot||$ било која норма на $H \otimes_{alg} H$ за коју важи $||x \otimes y|| = ||x||\,||y||$. Доказати да је $||a|| \leq ||a||_{\max}$ за све $a \in H \otimes_{alg} H$;

в) Нека је $\Phi : H \otimes_{alg} H \to K_0(H)$ изоморфизам ($K_0(H)$ скуп оператора коначног ранга). Доказати да је $||a||_{\max} = ||\Phi(a)||_1$. (Тако је нуклеарна норма највећа међу „пожељним“ нормама на операторима коначног ранга.)

г) Покушајте да откријете шта је најмања „пожељна“ норма.

5. Нека је $H = L^2(X, \mu)$. Доказати да је T Хилберт-Шмитов ако и само ако је облика $(Tf)(x) = \int_X K(x, y)f(y)\,\mathrm{d}\mu(y)$, за неко $K \in L^2(X \times X, \mu \otimes \mu)$. Доказати да је тада $||T||_2^2 = \int_X \int_X |K(x, y)|\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\mu(y)$. (Тако имамо низ изоморфизама $L^2(X) \otimes L^2(Y) \cong L^2(X \times Y) \cong \mathfrak{S}_2(L^2(X))$.

6. Нека је $T \in B(L^2(0, 1))$ интегрални оператор облика $(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y$, где је K непрекидна функција на $[0, 1] \times [0, 1]$.

а) Доказати да је T позитиван ако и само ако је матрица $[K(t_i, t_j)]_{i,j=1}^n$ позитивно дефинитна за сваки избор тачака $t_1, \ldots, t_n$ из $[0, 1]$ (овај услов зовемо позитивна дефинитност језгра K);

б) Нека T има позитивно дефинитно језгро. Доказати да је T нуклеаран и да је $||T||_1 = \int_0^1 K(t, t)\,\mathrm{d}t$. (Упутство: показати да су сопствени вектори оператора T непрекидне функције, а затим искористити спектрално разлагање, а и распитати се по литератури о Мерсеровој теореми (Mercer))

7. Одредити којем од простора $\mathfrak{S}_p$ ($p = 1, 2$) припада Волтерин оператор $V : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ дат са $(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Одредити одговарајућу норму.

8. а) Нека је T позитиван и компактам и λ_n низ његових сопствених вредности. Доказати да је

$$\lambda_n = \inf_{L \in \mathcal{H}_n} \max_{x \in L^\perp \setminus \{0\}} \frac{\langle Tx, x\rangle}{\langle x, x\rangle},$$

где је $\mathcal{H}_n$ ознака за скуп свих n-димензионалних потпростора;

б) Нека је T компактан. Доказати да је $s_{n+1}(T) = d(T, \mathcal{K}_n) = \inf_{K \in \mathcal{K}_n} ||T - K||$, где је $\mathcal{K}_n$ ознака за скуп свих оператора ранга n или мање;

в) Доказати неједнакост $s_{m+n-1}(A + B) \leq s_m(A) + s_n(B)$.

9. Нека је T компактан оператор.

а) Доказати неједнакост

$$\det\left[\langle Ax_j, Ax_k\rangle\right]_{j,k=1}^n \leq s_1(A)^2 s_2(A)^2 \ldots s_n(A)^2 \det\left[\langle x_j, x_k\rangle\right]_{j,k=1}^n,$$

где је x_j било који систем вектора. [Упутство: претражити по литератури уопштења Бине-Кошијеве теореме.]

б) Доказати Хорнову неједнакост

$$\prod_{j=1}^{k} s_j(AB) \le \prod_{j=1}^{k} s_j(A)s_j(B).$$

10. Доказати да је множење неопрекдино у јакој и јакој-$*$ на ограниченим скуповима.

11. Нека је $E \subseteq B(H)$ ограничен скуп. Доказати да се рестрикција слабе и ултраслабе топологије поклапају на E. Доказати и да се поклапају рестрикција јаке и ултрајаке, односно јаке-$*$ и ултрајаке-$*$.

12. Показати да се све „слабашне" и све ултра „слабашне" топологије покалпају на скупу унитарних оператора у $B(H)$.

6. W^*-АЛГЕБРЕ (први део)

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

6.1. Комутант. Нека је $B(H)$ агебра свих ограничених оператора на Хилбертовом простору H и нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ неки непразан скуп.

Дефинишемо *комутант* скупа $\mathcal{M}$ са

$$\mathcal{M}' = \{T \in B(H) \mid \forall S \in \mathcal{M}, ST = TS\},$$

дакле као скуп оних оператора који комутирају са свим операторима из $\mathcal{M}$. *Бикомутант* скупа $\mathcal{M}$, у ознаци $\mathcal{M}''$ је комутант његовог комутанта. Ево неких једноставних особина ових појмова:

• $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}''$ - непосредно следи из дефиниције.

• $\mathcal{M}'$ је увек алгебра. Заиста, ако $T_1, T_2 \in \mathcal{M}'$, онда за све $S \in \mathcal{M}$ налазимо

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)S = \lambda_1 T_1 S + \lambda_2 T_2 S = \lambda_1 S T_1 + \lambda_2 S T_2 = S(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2),$$
$$T_1 T_2 S = T_1 S T_2 = S T_1 T_2.$$

• Алгебра $\mathcal{M}'$ не мора бити самоадјунгована. Међутим, ако је скуп $\mathcal{M}$ затворен за инволуцију, онда је такав и $\mathcal{M}'$. Наиме, ако $T \in \mathcal{M}'$ и $S \in \mathcal{M}$ онда и $S^* \in \mathcal{M}$, па је $T^*S = (S^*T)^* = (TS^*)^* = ST^*$, па и $T \in \mathcal{M}'$.

• Алгебра $\mathcal{M}'$ је увек слабо затворена. Заиста, ако $\mathcal{M}' \ni T_\alpha \to T$, слабо и $S \in \mathcal{M}$, онда за све x, $y \in H$ имамо $\langle T_\alpha Sx, y\rangle = \langle T_\alpha x, S^*y\rangle$, што после узимања лимеса постаје $\langle TSx, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle$ одакле је $TS = ST$.

Дакле, ако је $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ онда је $\mathcal{M}$ слабо затворена алгебра. Неке довољне услове под којима важи обрат даје следећа теорема.

6.2. Теорема [Нојманова о бикомутанту]. Нека је $B(H)$ алгебра свих ограничених оператора на неком Хилбертовом простору H, и нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ нека њена $*$-подалгебра, што значи да је затворена у односу на линеарне комбинације, множење и инволуцију $T \mapsto T^*$, и да садржи I - јединични оператор.

Следећи услови су међусобно еквивалентни:

а) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$;

б) $\mathcal{M}$ је затворена у односу на слабу топологију;

в) $\mathcal{M}$ је затворена у односу на јаку топологију.

Доказ. Импликација б) повлачи в) је тривијална. Импикација а) повлачи б) је једноставна и већ смо је извели.

Једина нетривијална ипликација је в) повлачи а). Доказаћемо незнатно измењено тврђење: ако је $T_0 \in \mathcal{M}''$ и $\mathcal{B}$ произвољна јака базна околина, онда скуп $T_0 + \mathcal{B}$ садржи бар један елемент из $\mathcal{M}$. То је довољно, јер показује да је $\mathcal{M}''$ подскуп јаког затворења алгебре $\mathcal{M}$. Ако је $\mathcal{M}$, већ јако затворена, онда је $\mathcal{M}'' \subseteq \mathcal{M}$. Обратна инклузија је тривијална.

Нека је, за почетак $\mathcal{B}_{x,\varepsilon} = \{T \in B(H) \,|\, ||Tx|| < \varepsilon\}$. За такво x, уочимо скуп $\mathcal{M}x = \{Tx \,|\, T \in \mathcal{M}\}$, и његово затворење $\overline{\mathcal{M}x}$ (у норми Хилбертовог простора H). Лако се види да је $\overline{\mathcal{M}x}$ Хилбертов потпростор од H, као и да је инваријантан за алгебру $\mathcal{M}$. Заиста, ако $y \in \mathcal{M}x$ и $S \in \mathcal{M}$, онда $T_n x \to y$ за неки низ $T_n \in \mathcal{M}$. Међутим, тада је и $ST_n \in \mathcal{M}$, па $ST_n x \to Sy \in \overline{\mathcal{M}x}$. То значи да ортогонални пројектор P на потпростор $\overline{\mathcal{M}x}$ комутира са алгебром $\mathcal{M}$, тј. $P \in \mathcal{M}'$. (На овом месту је пресудно то што је $\mathcal{M}$ затворена за инволуцију, јер из $S(\overline{\mathcal{M}x}) \subseteq \overline{\mathcal{M}x}$ следи само $PSP = SP$. Али како и $S^* \in \mathcal{M}$ то важи и $PS^*P = S^*P$, односно после адјунговања $PSP = PS$.) Отуда $PT_0 = T_0P$, јер $T_0 \in \mathcal{M}''$.

С друге стране $x \in \mathcal{M}x$, јер $I \in \mathcal{M}$, па одатле $T_0x = T_0Px = PT_0x \in \mathcal{M}x$. Дакле, за произвољно $\varepsilon > 0$ постоји $T \in \mathcal{M}$, такво да је $||T_0x - Tx|| < \varepsilon$, односно $T \in T_0 + \mathcal{B}_{x,\varepsilon}$.

Ово наравно није довољно, јер су скупови облика $\mathcal{B}_{x,\varepsilon}$ само предбазне околине нуле, а не и базне. Међутим, прелазак са једног вектора x, на n-торку можемо извршити помоћу следеће досетке. Наиме, посматрајмо Хилбертов простор $K = H \oplus \cdots \oplus H$ (n-копија), и утапање $\mathcal{M} \hookrightarrow B(K)$, дато са

$$T \mapsto \begin{bmatrix} T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T \end{bmatrix} = T \otimes I_n.$$

Слику алгебре $\mathcal{M}$ при овом пресликавању означимо са $\mathcal{M}^{(n)}$. Није тешко видети да се $(\mathcal{M}^{(n)})'$ састоји од оних $n \times n$ матрица чији чланови припадају $\mathcal{M}'$, те да је $(\mathcal{M}^{(n)})''$ скуп свих матрица које на главној дијагонали имају један те исти елемент из $\mathcal{M}''$, а ван ње нуле, то јест скуп $\{T \otimes I_n \mid T \in \mathcal{M}''\}$.

За дате $x_1, \dots, x_n \in H$ посматрајмо $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$ и применимо претходно расуђивање на вектор x, и оператор $T_0 \otimes I_n$. Закључујемо да постоји елемент $T \in \mathcal{M}$ такав да је $||(T_0 \otimes I_n)x - (T \otimes I_n)x|| < \varepsilon$, односно $\sum_{j=1}^n ||T_0x_j - Tx_j||^2 < \varepsilon^2$, одакле је за свако j, $||T_0x_j - Tx_j|| < \varepsilon$.

Доказ је завршен. $\square$

Примедба. Посматрајући директан збир $H \oplus \cdots \oplus H \oplus \dots$ пребројиво много копија простора H, можемо закључити и да се у свакој ултрајакој околини оператора $T_0 \in \mathcal{M}''$ налази неки оператор $T \in \mathcal{M}$. А како је ултраслаба топлогија слабија од ултра јаке, а јача од слабе, то закључујемо да су трима условима из исказа теореме еквивалентни и:

г) $\mathcal{M}$ је затворена у ултраслабој топологији;

д) $\mathcal{M}$ је затворена у ултрајакој топологији.

Друīа ӣримедба. Претходни доказ „ради“ и када претпоставку $I \in \mathcal{M}$ заменимо нешто слабијом да је $\mathcal{M}(H) = \{Sx \mid S \in \mathcal{M}, x \in H\}$ густо у H. Тада кажемо да $\mathcal{M}$ дејствује *недеīенерисано* на H.

6.3. Дефиниција. Подалгебру A алгебре $B(H)$ називамо *фон Нојманова* ако испуњава неки од услова из претходне теореме.

Свака фон Нојаманова алгебра је уједно и C^*-алгебра. Обратно не мора бити тачно. На пример, посматрајмо алгебру A добијену као скуп свих оператора множења M_φ непрекидном функцијом $\varphi \in C[0,1]$, на Хилбертовом простору $H = L^2(0,1)$ задатих као $M_\varphi(f) = \varphi f$. Није тешко видети да је $||M_\varphi||_{B(H)} = ||\varphi||_{C[0,1]}$, па је A једна C^*-алгебра. Међутим, она није затворена у односу на слабу топологију. Њено затворење садржи, барем скуп свих множења функцијама из $L^\infty(0,1)$. Заиста, нека је $\varphi \in L^\infty$. Тада постоји низ φ_n непрекидних функција који тежи ка φ тачка по тачка, и при томе су им норме ограничене. Тада је за све $f, g \in L^2(0,1)$,

$$\langle M_{\varphi_n} f, g \rangle = \int_0^1 \varphi_n f \bar{g} \to \int_0^1 \varphi f \bar{g} = \langle M_\varphi f, g \rangle\,,$$

према теореми о доминантној коневергенцији. Тако $M_{\varphi_n} \to M_\varphi$ у слабој топологији.

Доказаћемо да је алгебра $\mathcal{M}$ свих множења M_φ функцијама $\varphi \in L^\infty(0,1)$ комутатвна фон Нојманова алгебра. Очигледно је реч о $*$-подалгебри алгебре $B(L^2(0,1))$. Уместо да доказујемо да је $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$ доказаћемо да је $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$. Како је $\mathcal{M}$ комутативна, инклузија $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}'$ је тривијална. Покажимо обратну. Нека је $T \in \mathcal{M}'$. Означивши са 1 функцију идентички једнаку 1, имамо за све $f \in L^\infty \subseteq L^2$,

(1) $$T(f) = TM_f(1) = M_fT(1) = fT(1).$$

Означимо $g = T(1)$, и докажимо да је g есенцијално ограничена, јер ће тада доказ бити готов. Нека је $F_\eta = \{t \in [0,1] \mid |g(t)| \geq \eta\}$, и $f = \chi_{F_\eta}$ карактеристична функција датог скупа. Имамо $||f|| = m(F_\eta)^{1/2}$, док је $||fg|| \geq \eta m(F_\eta)^{1/2}$. Тада због (1) налазимо $\eta m(F_\eta)^{1/2} \leq ||fT(1)|| = ||T(f)|| \leq ||T||\,||f|| \leq ||T|| m(F_\eta)^{1/2}$, што је немогуће ако је $\eta > ||T||$ и $m(F_\eta) \neq 0$. Тако је $||g||_{L^\infty} \leq ||T||$, и $T(f) = fg$ за све $f \in L^\infty$, а тиме и за све $f \in L^2$ јер је T ограничен, а L^∞ густ у L^2.

Примедба: Исти доказ може послужити да се докаже да је комутант скупа $\{M_\varphi \mid \varphi \in C[0,1]\}$ једнак $\{M_\varphi \mid \varphi \in L^\infty(0,1)\}$. Такође, Лебегова мера се може заменити ма којом коначном мером. Резултат се може још уопштавати на случај σ-коначних мера или даље на строго локализоване мере, уз нешто пажљивији рачун јер тада $1 \notin L^2$.

Центар фон Нојманове алгебре $\mathcal{M}$ је $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$, дакле скуп свих оператора из $\mathcal{M}$ који комутирају са свим другим из $\mathcal{M}$. Центар увек садржи скаларне умношке јединичног оператора, $\mathbf{C}I$. Ако других нема онда кажемо да је центар тривијалан.

Фон Нојманова алгебра се назива *фактор*, ако јој је центар тривијалан. Фактори чине једну крајност. Другу крајност чине комутативне фон Нојманове алгебре, за које је $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.

Пример комутативне фон Нојманове алгебре је $L^\infty(X,\mu)$ за неки мерљив простор X са коначном мером μ, посматран као скуп оператора множења на простору $L^2(X)$. Видећемо да се остали примери комутативних фон Нојманових алгебри не разликују суштински од овог. Пример фактора је $B(H)$, јер је познато да је $B(H)' = \mathbf{C}I$. Има и других фактора, али такве примере није тако просто конструисати, што ћемо видети касније.

Прва разлика коју уочавамо између комутативних C^*-алгебри и фон Нојманових је што прве не морају имати нетривијланих пројектора - наиме, C^*-алегбра $C(K)$ има само тривијалне пројекторе 1 и 0, кад год је K повезан. С друге стране фон Нојманова алгебра $L^\infty(X)$ има обиље нетривијалних пројектора - то су све карактеристичне функције мерљивих скупова. У наредном ставу видећемо да свака (и некомутативна) фон Нојманова алгебра има много пројектора.

(Подсетимо се да је пројектор, такав елемент p C^*-алгебре A за који важи $p = p^* = p^2$.)

6.4. Став. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра. Тада

а) $\mathcal{M}$ се поклапа са линеарним омотачем свих својих самоадјунгованих елемената;

б) $\mathcal{M}$ се поклапа са линеарним омотачем свих својих унитарних елемената;

в) Оператор $T \in \mathcal{M}$ ако и само ако је $U^*TU = T$ за сваки унитаран $U \in \mathcal{M}'$;

г) Линеарни омотач свих пројектора из $\mathcal{M}$ је густ у A у норми.

Доказ. а) Како је $\mathcal{M}$ затворена за инволуцију, то ако $T \in \mathcal{M}$, онда и $T_1 = (T + T^*)/2$ и $T_2 = (T - T^*)/2i \in \mathcal{M}$, а то су самоадјунговани елементи такви да је $T = T_1 + iT_2$;

б) Довољно је доказати да се сваки самоадјунгован елемент T може приказати као (коначна) линеарна комбинација унитарних. Можемо чак узети и да је $||T|| < 1$ (јер га после можемо помножити бројем $||T||$). Међутим, тада је оператор $U = T + i\sqrt{I - T^2}$ унитаран, јер је $U^* = T - i\sqrt{I - T^2}$, и $UU^* = U^*U = I$, и још је $T = (U + U^*)/2$;

Приметимо да а) и б) важе и за сваку C^*-алгебру A.

в) "само ако" је тривијалан смер; Ако је $U^*TU = T$ за сваки унитаран $U \in \mathcal{M}'$, онда је $TU = UT$ за сваки унитаран $U \in \mathcal{M}'$, а како они разапињу $\mathcal{M}'$, онда је $TS = ST$ и за све $S \in \mathcal{M}'$, па $T \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$;

г) Довољно је доказати да се сваки самоадјунгован оператор T може представити као лимес коначних линеарних комбинација пројектора из алгебре $\mathcal{M}$. Ово, међутим следи из спектралне теореме. Наиме, како је скуп простих функција свуда густ у простору $L^\infty(\sigma(T))$, то је T (равномерни, тј. у норми) лимес коначних линеарних комбинација својих спектралних пројектора. Треба још приметити да спектрални пројектори припадају јаком затворењу алгебре $C^*(T)$. Наиме, ако је $A \subseteq \sigma(T)$ Борелов, тада постоји низ непрекидних функција f_n који тежи ка χ_A тачка по тачка, и тада $f_n(T) \to \chi_A(T) = E(A)$ слабо. □

6.5. Став [Булова алгебра пројектора]. а) Нека су P и Q пројектори на неком Хилбертовом простору H, и нека су $K = PH$, $L = QH$ њихови долазни простори. Тада низ $(PQ)^n$ јако конвергира ка пројектору на $K \cap L$;

б) Скуп $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ свих пројектора у $\mathcal{M}$ је Булова алгебра у односу на операције

$$P \wedge Q = \inf\{P, Q\}, \qquad P \vee Q = \sup\{P, Q\}.$$

в) Нека је $\mathcal{M}$ фон Нојманова алгебра. Булова алгебра $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ је комплетна, односно сваки ограничен скуп има супремум;

Примедба: Ако је P пројектор на потпростор K, а Q на L онда је $P \wedge Q$ пројектор на $K \cap L$, а $P \vee Q$ на $K + L$. Отуда се уместо скупа пројектора $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ може посматрати и скуп одговарајућих потпростора $\mathrm{Gr}(\mathcal{M})$ - Грасманијан алгебре $\mathcal{M}$, са делимичним поретком "бити потпростор", и операцијама $\cap$ и $+$.

Доказ. а) Размотримо прво $\lim(PQP)^n$. Оператор PQP је позитиван и норме мање од 1, следствено томе $\sigma(PQP) \subseteq [0,1]$. Низ функција $f_n(\lambda) = \lambda^n$ конвергира (на сегменту $[0,1]$) тачка по тачка карактеристичној функцији једночланог скупа $\{1\}$. Отуда $(PQP)^n$ слабо конвергира спектралном пројектору $E_{PQP}(\{1\})$. Али како f_n опада, конвергенција је и јака. Како је слика спектралног пројектора на једночлани скуп заправо сопствени потпростор, то ако (за дато x) означимо $y = \lim(PQP)^n x$, имамо $PQPy = y$. Одатле одмах излази $y \in PH = K$. Ако $y \notin QH = L$, онда из $||y||^2 = ||Qy||^2 + ||(I-Q)y||^2$ закључујемо $||Qy|| < ||y||$, па $||y|| = ||PQPy|| = ||PQy|| \leq ||P||\,||Qy|| < ||y||$ доводи до контрадикције. Тако $y \in K \cap L$.

Доказаћемо сада да је $x - y \perp y$. Имамо

$$\langle x-y, y\rangle = \langle x-y, PQPy\rangle = \langle PQP(x-y), y\rangle = \langle PQPx - y, y\rangle$$

и даље индукцијом $\langle x-y, y\rangle = \langle (PQP)^n x - y, y\rangle$, што после узимања лимеса постаје

$$\langle x-y, y\rangle = \lim \langle (PQP)^n x - y, y\rangle = \langle y-y, y\rangle = 0.$$

Тако је $y = P_{K\cap L}x$, јер теорема о ортопројекцији гарантује јединственост ортогоналне пројекције и ортогоналне допуне.

Сада је $\lim(PQ)^n x = \lim(PQP)^{n-1}Qx = P_{K\cap L}Qx = P_{K\cap L}x$;

б) Непосредна провера;

в) Заиста, међу пројекторима се може увести поредак $P \leq Q$ ако и само ако је $PQ = QP = P$, односно, ако је PH потпростор од QH. Сваки двочлани скуп $\{P, Q\}$ пројектора има инфимум у $B(H)$ то је пројектор на $PH \cap QH$, а према тачки а), ако $P, Q \in \mathcal{M}$, онда и $\inf\{P, Q\} \in \mathcal{M}$. Што се тиче супремума приметимо да је $\sup\{P, Q\} = I - \inf\{I-P, I-Q\}$.

И више, индукцијом закључујемо да супремум и инфимум коначно много пројектора из $\mathcal{M}$ опет припада $\mathcal{M}$. С друге стране супремум бесконачне фамилије је јаки растући лимес фамилије супремума коначних подскупова, па резултат следи. □

6.6. Став [поларно разлагање]. Ако је $\mathcal{M}$ фон Нојманова алгебра и $T \in \mathcal{M}$, тада постоје, и јединствени су, позитиван оператор $|T| \in \mathcal{M}$ и делимична изометрија $V \in \mathcal{M}$ такви да је $T = V|T|$. (Подсетимо се да је V делимична изометрија ако су VV^* и V^*V пројектори.)

Доказ. Познато је да такво разлагање постоји у $B(H)$ и да је јединствено, под условом да важе једнакости $VV^* = P_{\overline{\mathrm{Im}\,T}}$ и $V^*V = P_{\overline{\mathrm{Im}\,|T|}}$. Треба доказати да $|T|, V \in \mathcal{M}$. Први оператор није споран, јер је $|T| = \sqrt{T^*T}$ и припада чак $C^*(T^*T) \subseteq \mathcal{M}$. Што се тиче оператора V, поступићемо овако: посматрамо произвољан унитаран $U \in \mathcal{M}'$. Тада је

$$T = U^{-1}TU = U^{-1}VUU^{-1}|T|U.$$

Једноставно закључујемо да су оператори $U^{-1}|T|U$ у $U^{-1}VU$, редом позитиван и делимично изометричан.

Применићемо јединственост поларног разлагања. Приметимо прво да је $P_{\ker|T}= E_{|T|}(\{0\}) \in \mathcal{M}$, јер сви спектрални пројектори припадају $\mathcal{M}$. Отуда и $P_{\overline{\mathrm{Im}\,|T|}} = 1 - P_{\ker|T|} \in \mathcal{M}$. Уочимо још да важи $\ker T^* = \ker|T^*|$ па ако применимо претходно расуђивање на T^* налазимо да VV^*, $V^*V \in \mathcal{M}$.

Ако означимо $V_1 = U^*VU$, онда је $V_1^*V_1 = U^*V^*UU^*VU = U^*V^*VU = U^*P_{\overline{\mathrm{Im}\,T}}U = P_{\overline{\mathrm{Im}\,T}}$, јер последњи пројектор припада $\mathcal{M}$, и слично $V_1V_1^* = P_{\overline{\mathrm{Im}\,|T|}}$. Како је под наведеним условима поларно разлагање јединствено, то следи да је $U^*VU = V$ за свако унитарно $U \in \mathcal{M}'$. Према претходном ставу то значи да $V \in \mathcal{M}$. □

РЕПРЕЗЕНТАЦИЈЕ НЕКИХ КЛАСА ФУНКЦИОНАЛА

6.7. Став. Нека је $\varphi \in B(H)^*$ ограничен функционал. Следећи услови су еквивалентни:

(i) φ је слабо непрекидан;

(ii) φ је јако непрекидан;
(iii) $\varphi(T) = \sum_{j=1}^{n} \langle Tx_j, y_j \rangle$, за неке n-торке вектора $(x_1, \dots, x_n)$, $(y_1, \dots, y_n) \in H^n$.

Доказ. Импликације (i) повлачи (ii), као и (iii) повлачи (i) су тривијалне. Докажимо да важи (ii) повлачи (iii). Нека је $D = \{z \mid |z| < 1\}$ отворени јединични диск у $\mathbf{C}$. Његова инверзна слика $\varphi^{-1}(D)$ садржи неку базну околину нуле, на пример $\mathcal{B}_{x_1,\dots,x_n,\delta} = \{T \in B(H) \mid \sum_{j=1}^{n} ||Tx_j||^2 < \delta^2\}$. Другим речима важи импликација

$$\sum_{j=1}^{n} ||Tx_j||^2 < \delta^2 \Rightarrow |\varphi(T)| < 1. \tag{2}$$

Одатле изводимо закључак

$$\varphi(T) \le \frac{1}{\delta} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} ||Tx_j||^2}. \tag{3}$$

Заиста, у супротном би за бар једно $T \in B(H)$ горе важило „$>$“, односно за неко γ би било

$$\varphi(T) > \gamma \ge \frac{1}{\delta} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} ||Tx_j||^2}.$$

Тада би за оператор $(1/\gamma)T$ важила премиса у (2), али не и закључак.

На основу (3) закључујемо да је линеарно пресликавање $(Tx_1, \dots, Tx_n) \mapsto \varphi(T)$ коректно дефинисано и ограничено на скупу $\{(Tx_1, \dots, Tx_n) \mid T \in B(H)\} \subseteq H^n$ и може се продужити на његово затворење. Отуда, према Рисовој теореми, постоји вектор $(y_1, \dots, y_n)$ такав да је $\varphi(T) = \langle (Tx_j), (y_j) \rangle$, односно важи услов (iii). □

6.8. Став. Нека је $\varphi \in B(H)^*$ ограничен функционал. Следећи услови су еквивалентни:
(i) φ је ултраслабо непрекидан;
(ii) φ је ултрајако непрекидан;
(iii) $\varphi(T) = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle Tx_j, y_j \rangle$, за неке низове вектора $(x_j)_{j=1}^{+\infty}$, $(y_j)_{j=1}^{+\infty} \in H^\infty$, то јест за које важи $\sum_j ||x_j||^2, \sum_j ||y_j||^2 < +\infty$;
(iv) $\varphi(T) = \mathrm{tr}(TA)$ за неко $A \in \mathfrak{S}_1$.

Доказ. Еквиаваленција услова (i), (ii) и (iii) доказује се на исти начин као и у претходном ставу. Докажимо $(iii) \Leftrightarrow (iv)$.

Нека важи (iii). Посматрајмо оператор $A = \sum_j x_j \otimes \bar{y}_j$. Овај ред је апсолутно конвергентан у норми простора $\mathfrak{S}_1$, јер је

$$\sum_j ||x_j \otimes \bar{y}_j||_1 = \sum_j ||x_j||\,||y_j|| \le \left(\sum_j ||x_j||^2\right)^{1/2} \left(\sum_j ||y_j||^2\right)^{1/2} < +\infty,$$

а како је траг непрекидан у $\mathfrak{S}_1$ норми, имамо

$$\mathrm{tr}(TA) = \sum_j \mathrm{tr}(Tx_j \otimes \bar{y}_j) = \sum_j \langle Tx_j, y_j \rangle .$$

Обратно, нека важи (iv) и нека је $A = \sum_j s_j \psi_j \otimes \bar{\varphi}_j$ Шмитов развој оператора A. Тада је

$$\mathrm{tr}(TA) = \sum_j s_j \,\mathrm{tr}(T\psi_j \otimes \bar{\varphi}_j) = \sum_j s_j \langle T\psi_j, \varphi_j \rangle ,$$

па се може узети да је $x_j = \sqrt{s_j}\psi_j$, $y_j = \sqrt{s_j}\varphi_j$, јер је $\sum_j s_j < +\infty$, а φ_j и ψ_j ортонормирани. □

Примедба: У оба претходна става 6.7 и 6.8, скуп $B(H)$ се може без икаквх ограничења заменити произвољном фон Нојмановом алгебром $\mathcal{M}$.

6.9. Последице. а) Ултраслаба топологија на $B(H)$ поклапа се са слабом-$*$ топологијом која проистиче из идентификације $\mathfrak{S}_1^* \cong B(H)$;

б) Затворени конвексни скупови у слабој и јакој топологији се поклапају. Слично, затворени конвексни скупови се поклапају у ултраслабој и ултрајакој топологији;

в) Ако је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра, онда постоји Банахов простор X са својством $X^* \cong \mathcal{M}$. И више, за X се може узети скуп свих $\varphi \in \mathcal{M}^*$ који су непрекидни у ултраслабој топологији.

Напомена: Тај преддуал фон Нојманове алгебре означаваћемо са $\mathcal{M}_*$.

Доказ. а) Ова тврдња је непосредна последица претходног става. С једне стране слаба-$*$ топологија је генерисана функционалима облика (iv), то јест најмања је у односу на коју су такви функционали непрекидни. С друге стране, ултраслаба топологија је генерисана функционалима облика (iii);

б) Следи на основу опште тврдње да се затворени конвексни скупови поклапају у топологијама које имају исти дуални простор;

в) Доказаћемо прво једну општу тврдњу у теорији Банахових простора:

Нека је $Y \cong X^*$ и $M \subseteq Y$ слабо-$*$ затворен потпростор. Тада је $(X/M_\circ)^* \cong M$, где је

$$M_\circ = \{x \in X \mid \forall \Lambda \in M \; \Lambda(x) = 0\}$$

такозвани преданихилатор *скупа M.*

Прво ћемо доказати да ако $\varphi \in Y$ поништава $M_\circ$ онда φ припада M. (Обратно је тако по дефиницији.) Претпоставимо супротно $\varphi \notin M$ и $\varphi(M_\circ) = 0$. Уочимо неку слабу-$*$ базну околину тачке φ, рецимо $\mathcal{B} = \{\Lambda \in X^* \mid |\Lambda(x_j) - \varphi(x_j)| < \varepsilon$, за $1 \leq j \leq k\}$ и посматрајмо пресликавање $F : X^* \to \mathbf{C}^k$ дато са

$$F(\Lambda) = (\Lambda x_1, \dots, \Lambda x_k).$$

Скуп $F(M)$ је векторски простор (јер је такав M) па је конвексан и затворен. Претпоставимо да $F(\varphi) \notin F(M)$. Тада се скуп $F(M)$ и тачка $F(\varphi)$ могу раздвојити неком хиперравни, односно постоје $\lambda_j \in \mathbf{C}$ и $\gamma \in \mathbf{R}$ такви да за све $\Lambda \in M$ важи

$$\sum_j \lambda_j \Lambda(x_j) \leq \gamma < \sum_j \lambda_j \varphi(x_j), \qquad \text{односно} \qquad \Lambda(y) \leq \gamma < \varphi(y),$$

где је $y = \sum_j \lambda_j x_j$. Ако би бар за једно $\Lambda \in M$ било $\Lambda(y) \neq 0$ претходна неједнакост би била неодржива јер је M линеаран простор па заједно са Λ садржи и $t\Lambda$ за све $t \in \mathbf{R}$. Дакле $y \in M_\circ$. Али тада $\varphi(y) > \gamma \geq 0$ што чини контрадикцију.

Дакле $F(\varphi) \in F(M)$ па постоји $\Lambda \in M$ такво да је $\varphi(x_j) = \Lambda(x_j)$ за $1 \leq j \leq k$, то јест $\Lambda \in \mathcal{B}$. Тиме је еквиваленција $\varphi(M_\circ) = 0 \Leftrightarrow \varphi \in M$ доказана. Сада се лако довршава доказ, јер ако $\psi \in (X/M_\circ)^*$ и ако је $\pi : X \to X/M_\circ$ канонска пројекција, онда је $\psi \circ \pi \in X^*$ и поништава $M_\circ$, односно $\Lambda = \psi \circ \pi \in M$. Обратно, ако $\Lambda \in M$, онда је са $x + M_\circ \mapsto \Lambda x$ коректно задат функционал на $X/M_\circ$, па је придруживање $\psi \leftrightarrow \psi \circ \pi$ бијекција. Ствар је рутине проверити једнакост норми.

Тиме је завршен доказ опште тврдње. Посебно, фон Нојманова алгебра $\mathcal{M}$ је ултраслабо затворена, па како се ултраслаба топологија поклапа са слабом-$*$, то следи да је $\mathcal{M}$ дуални простор простора $\mathfrak{S}_1/\mathcal{M}_\circ$. И више, количник $\mathfrak{S}_1/\mathcal{M}_0$ се може поистоветити са скупом ултраслабо непрекидних функционала на $\mathcal{M}$. Наиме, ако је $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbf{C}$ ултраслабо непрекидан, тада се он према Хан-Банаховој теореми може продужити до ултраслабо непрекидног функционала на $B(H)$. Обратно је лако, јер рестрикција ултраслабо непрекидног функционала са $B(H)$ на $\mathcal{M}$ остаје непрекидна. Јасно, произвољан ултраслабо непрекидан φ анулира се на $\mathcal{M}$ ако и само ако припада преданихлатору $\mathcal{M}_\circ$. $\square$

6.10. Нормалност и потпуна адитивност. Нека је φ позитиван функционал на $\mathcal{M}$. Кажемо да је φ *нормалан* ако за сваку ограничену растућу мрежу $T_\alpha \in \mathcal{M}$ важи

$$\varphi(\sup_\alpha T_\alpha) = \sup_\alpha \varphi(T_\alpha).$$

Кажемо да је φ *потпуно адитиван* ако за сваку фамилију $P_\alpha \in \mathcal{M}$ међусобно ортогоналних пројектора важи

$$\varphi(\oplus_\alpha P_\alpha) = \sum_\alpha \varphi(P_\alpha).$$

Нормалност повлачи потпуну адитивност, јер је $\oplus_\alpha P_\alpha$ супремум фамилије коначних сума пројектора P_α, то јест $\oplus_\alpha P_\alpha = \sup_{A_0\subseteq A}\oplus_{\alpha\in A_0} P_\alpha$. Обе дефиниције имају смисла тек у контексту фон Нојманових алгебри. Наиме, тек тада се може гарантовати да супремум остаје у алгебри и то тиме што растућа ограничена мрежа јако конвергира ка свом супремуму, а $\mathcal{M}$ је затворена за јаке лимесе.

На сличан начин дефинишемо и нормалност, односно потпуну адитивност позитивног пресликавања $\rho : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ две фон Нојманове алгебре. Оно је нормално, ако је

$$\rho(\sup_\alpha T_\alpha) = \sup_\alpha \rho(T_\alpha),$$

а потпуно адитивно, ако је

$$\varphi(\oplus_\alpha P_\alpha) = \oplus_\alpha \varphi(P_\alpha).$$

6.11. Техничка лема. Нека је ψ позитиван функционал на фон Нојмановој алгебри $\mathcal{M}$, и нека је $\omega_\xi : \mathcal{M} \to \mathbf{C}$ пресликавање дато са $\omega_\xi(T) = \langle Tx, x\rangle$. Ако је $\psi \le \omega_\xi$, тада је $\psi = \omega_{S\xi}$ за неки позитиван S норме не веће од 1.

Доказ. На простору $\mathcal{M}\xi$ дефинишимо билинеарну форму са $\langle T\xi, S\xi\rangle_\psi = \psi(S^*T)$. На основу Коши Шварцове неједнакости, имамо

$$|\langle T\xi, S\xi\rangle_\psi|^2 = |\psi(S^*T)|^2 \le \psi(S^*S)\psi(T^*T) \le \omega_\xi(S^*S)\omega_\xi(T^*T) = ||S\xi||^2||T\xi||^2,$$

па је форма $\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi$ коректно дефинисана, и ограничена са 1. Она се може продужити по непрекидности до затворења простора $\mathcal{M}\xi$, а на ортокомплементу нулом. Отуда постоји оператор C норме не веће од 1, са својством $\psi(S^*T) = \langle T\xi, S\xi\rangle_\psi = \langle CT\xi, S\xi\rangle$. Оператор C комутира са $\mathcal{M}$ (бар на простору $\mathcal{M}\xi$ који садржи ξ јер $I \in \mathcal{M}$), јер имамо

$$\langle CRT\xi, S\xi\rangle = \psi(S^*RT) = \psi((R^*S)^*T) = \langle CT\xi, R^*S\xi\rangle = \langle RCT\xi, S\xi\rangle .$$

Тако је

$$\psi(T) = \langle CT\xi, \xi\rangle = \left\langle T\sqrt{C}\xi, \sqrt{C}\xi\right\rangle,$$

што је и требало доказати. □

6.12. Последица. Нека је φ позитиван функционал.

а) Ако је $\varphi(T) = \langle Tx, y\rangle$ за неке $x, y \in H$, тада постоји ξ са својством $\varphi(T) = \langle T\xi, \xi\rangle$;

б) Ако φ испуњава неки од услова става 6.7, онда се у услову (iii) истог става може узети $x_j = y_j$;

в) Ако φ испуњава неки од услова става 6.8, онда се у услову (iii) истог става може узети $x_j = y_j$, а у услову (iv) важи $A \ge 0$.

Доказ. а) Ако је $\langle Tx, y\rangle \ge 0$ за $T \ge 0$, онда је и $\langle x, Ty\rangle \ge 0$, па је (све време за $T \ge 0$)

$$\varphi(T) = \langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\right) \le \frac{1}{4}\langle T(x+y), x+y\rangle ,$$

па можемо применити лему 6.11;

б) Нека је φ позитиван и нека испуњава неки од услова става 6.7. Тада испуњава и услов (iii) који се, пак, може записати као $\varphi(T) = \left\langle T^{(n)}x, y\right\rangle$, где је $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in H^n$, и $T^{(n)} = T \oplus \cdots \oplus T$. Применимо сада претходно;

в) На исти начин као и у претходној тачки доказујемо да се може узети $x_j = y_j$. Оператор $\sum_j x_j \otimes \bar{x}_j$ је позитиван, јер је

$$\left\langle \sum_j x_j \otimes \bar{x}_j z, z\right\rangle = \sum_j \langle z, x_j\rangle \langle x_j, z\rangle \ge 0.$$

Како је оператор A у услову (iv) јединствен, то је $A \ge 0$. □

6.13. Став. Нека је φ позитиван функционал на фон Нојмановој алгебри $\mathcal{M} \subseteq B(H)$. Еквивалентни су услови:

(i) φ је облика $\varphi(T) = \sum_j \langle Tx_j, y_j\rangle$ за неке фамилије x_j, y_j такве да је $\sum_j ||x_j||^2, \sum_j ||y_j||^2 < +\infty$. (тиме је φ и ултраслабо и ултрајако непрекидан, и облика $\mathrm{tr}(TA)$ због става 6.8);

(ii) φ је нормалан;

(iii) φ је потпуно адитиван.

Доказ. Имликација (ii) повлачи (iii) је лака, и већ смо је извели. Импликација (i) повлачи (ii) такође. Наиме, растућа мрежа јако конвергира свом супремуму, а на ограниченим скуповима се јака и ултрајака топологија поклапају.

Докажимо да (iii) повлачи (i). То ћемо учинити у неколико корака.

1° корак. Претпоставимо да су φ_1 и φ_2 потпуно адитивни позитивни функционали. Ако је $\varphi_1(P) < \varphi_2(P)$ за неки пројектор P, онда постоји пројектор $P_1 \le P$ такав да је $\varphi_1(T) \le \varphi_2(T)$ за сваки позитиван T за који је $P_1TP_1 = T$ (тј. за T који „живи“ у $P_1(H)$).

Нека је $\{P_\alpha \mid \alpha \in A\}$ максимална фамилија (по инклузији) међусобно ортогоналних „лоших“ пројектора $P_\alpha \le P$, то јест оних за које је $\varphi_1(P_\alpha) > \varphi_2(P_\alpha)$. (Егзистенцију такве максималне фамилије гарантује Цорнова лема.) Због потпуне адитивности, имамо онда и $\varphi_1(\oplus_\alpha P_\alpha) > \varphi_2(\oplus_\alpha P_\alpha)$, па је $P_1 = P - \oplus_\alpha P_\alpha \neq 0$. Ако је $Q \le P_1$ било који пројектор, онда мора бити $\varphi_1(Q) \le \varphi_2(Q)$ јер у супротном фамилија P_α, $(\alpha \in A)$ не би била максимална. Како је сваки позитиван T са својством $T = P_1TP_1$ униформни лимес низа линеарних комбинација својих спектралних пројектора (који сви живе у P_1H), и φ_1 и φ_2 непрекидни, то је и $\varphi_1(T) \le \varphi_2(T)$.

2° корак. Увек можемо пронаћи делић на коме се φ изражава преко скаларног производа. Прецизније, за сваки пројектор $P \in \mathcal{M}$ постоји $P_1 \le P$ такво да је $\varphi(T) = \langle T\xi, \xi\rangle$ за неко $\xi \in P_1H$ и све $T \in P_1\mathcal{M}P_1$, тј. за које важи $T = P_1TP_1$.

Заиста, уочимо вектор $\eta \in PH$ за својством $||\eta||^2 > \varphi(P)$, тада је, јасно $\varphi(P) \le \omega_\eta(P)$, где је $\omega_\eta(T) = \langle T\eta, \eta\rangle$. Како је ω_η (очигледно) потпуно адитиван, то према првом кораку, онда постоји пројектор $P_1 \le P$ такво да за $T \in P_1\mathcal{M}P_1$ важи $\varphi(T) \le \omega_\eta(T)$. Према леми 6.11, на потпростору P_1H, тј. за $T = P_1TP_1$ важи $\varphi(T) = \langle T\eta, \eta\rangle = \langle P_1TP_1\eta, \eta\rangle = \langle T\xi, \xi\rangle$, за $\xi = P_1\eta \in P_1H$.

3° корак. Мали делићи запремају читав H. Прецизније, постоји фамилија међусобно ортогоналних пројектора P_α, таква да је $\oplus_\alpha P_\alpha = I$ и

$$\varphi(P_\alpha TP_\alpha) = \langle T\xi_\alpha, \xi_\alpha\rangle\,, \qquad \text{за неке } \xi_\alpha \in P_\alpha(H). \tag{4}$$

При томе је $\varphi(P_\alpha) \neq 0$ за највише пребројиво много индекса α, као и $\sum_\alpha ||\xi_\alpha||^2 < +\infty$.

Заиста, уочимо максималну фамилију међусобно ортогоналних пројектора P_α за коју важи (4). Таква максимална фамилија постоји према Цорновој леми. Ако би, евентуално, било $\oplus_\alpha P_\alpha < I$, онда би могли да применимо други корак на пројектор $I - \oplus_\alpha P_\alpha$, одакле би се фамилији P_α могао придодати још један пројектор, што се противи њеној максималности.

Како је, због потпуне адитивности $\varphi(I) = \sum_\alpha \varphi(P_\alpha)$, то је $\varphi(P_\alpha) \neq 0$ за највише пребројиво много индекса α. Даље, $||\xi_\alpha||^2 = \langle P_\alpha\xi_\alpha, \xi_\alpha\rangle = \varphi(P_\alpha)$, па ред $\sum_\alpha ||\xi_\alpha||^2$ конвергира.

4° корак (и последњи), којим ћемо прикупити све делиће на гомилу. На основу Коши-Шварцове неједнакости (за позитиван функционал φ) имамо

$$|\varphi(TP_\alpha)|^2 \le \varphi(P_\alpha T^*TP_\alpha)\varphi(P_\alpha) = \varphi(P_\alpha)\,\langle P_\alpha T^*TP_\alpha\xi_\alpha, \xi_\alpha\rangle \le \varphi(P_\alpha)||TP_\alpha\xi_\alpha||^2 = \varphi(P_\alpha)||T\xi_\alpha||^2.$$

То значи да је пресликавање $T\xi_\alpha \mapsto \varphi(TP_\alpha)$ простора $\mathcal{M}\xi_\alpha$ у $\mathbf{C}$ коректно дефинисано и ограничено константом $\varphi(P_\alpha)^{1/2}$. Према Рисовој теореми, постоји вектор η_α, $||\eta_\alpha|| \le \varphi(P_\alpha)^{1/2}$ (и тиме наравно $\sum_\alpha ||\eta_\alpha||^2 = \sum_\alpha \varphi(P_\alpha) = \varphi(I) < +\infty$) са својством $\varphi(TP_\alpha) = \langle T\xi_\alpha, \eta_\alpha\rangle$.

Нека је сада A_0 коначан скуп индекса за који важи $\varphi(I) - \varphi(\oplus_{\alpha\in A_0}) < \varepsilon$. Тада из Коши-Шварцове неједнакости имамо

$$|\varphi(T) - \sum_{\alpha\in A_0} \varphi(TP_\alpha)|^2 = |\varphi(T(I - \oplus_{\alpha\in A_0}P_\alpha))|^2 \le \varphi(I - \oplus_{\alpha\in A_0}P_\alpha)\varphi(T^*T) < \varepsilon\varphi(T^*T),$$

па је

$$\varphi(T) = \sum_{\alpha\in A}\varphi(TP_\alpha) = \sum_\alpha \langle T\xi_\alpha, \eta_\alpha\rangle\,.$$

Најзад, због последице 6.12, може се узети $\xi_\alpha = \eta_\alpha$. □

6.14. Став. а) Нека је $\varphi \in B(H)^*$. Тада постоје јединствени самоадјунговани функционали φ_1 и φ_2 (а то значи $\varphi_j(T) \in \mathbf{R}$, кад год је $T = T^*$) такви да је $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. При томе, ако је φ слабо (односно ултраслабо) непрекидан, онда су такви и φ_1 и φ_2;

б) Ако је φ самоадјунгован, онда се може приказати као разлика $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ два позитивна функционала, таква да је $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$. И овде, ако је φ слабо (односно ултраслабо) непрекидан, онда су такви и φ_1 и φ_2.

Доказ. а) Овај део је једноставан, јер се може формирати функционал φ^* са $\varphi^*(T) = \overline{\varphi(T^*)}$ за који се једноставно показује непрекидност у истој топологији у којој је и φ непрекидан, и затим ставити $\varphi_1 = (\varphi + \varphi^*)/2$, односно $\varphi_2 = (\varphi - \varphi^*)/(2i)$;

б) Ако је φ слабо (или ултраслабо) непрекидан, онда разлагање непосредно добијамо из репрезентације таквог фунцкионала и поларизационог идентитета. Наиме, према ставу 6.7 (или 6.8), φ је облика $\varphi(T) = \sum_{j=1}^{\omega} \langle Tx_j, y_j\rangle$, где $\omega \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Тада је $\varphi = f_0 - \varphi_2 + i(\varphi_1 - \varphi_3)$, где је $\varphi_k = \sum_{j=1}^{\omega} \left\langle T(x_j + i^k y_j), x_j + i^k y_j\right\rangle$.

У случају норма топологије, то је доста теже. Претпоставимо за почетак да је $||\varphi|| = 1$. Скуп S свих стања је затворен подскуп јединичне лопте у дуалном простору, па је компактан према Алаоглуовој теореми. Посматрајмо скуп

$$S' = \{t\psi_1 - (1-t)\psi_2 \mid t \in [0,1], \psi_1, \psi_2 \in S\}. \tag{5}$$

И тај скуп је компактан, као непрекидна слика пресликавања $[0,1] \times S \times S \ni (t, \psi_1, \psi_2) \mapsto t\psi_1 - (1-t)\psi_2 \in S'$. Осим тога S' је и конвексан. Наиме, ако $t\psi_1 - (1-t)\psi_2$ и $s\chi_1 - (1-s)\chi_2 \in S'$ онда је њихова конвексна комбинација једнака

$$\theta(t\psi_1 - (1-t)\psi_2) + (1-\theta)(s\chi_1 - (1-s)\chi_2) = (\theta t\psi_1 + (1-\theta)s\chi_1) - (\theta(1-t)\psi_2 + (1-\theta)\chi_2)$$

некој разлици позитивних функционала. Остаје још да се провери да је збир вредности у тачки I та два фунционала једнака 1, па се добија да је S' конвексан.

Доказаћемо да је $\varphi \in S'$ (наравно, ако је самоадјунгован и норме 1). Претпоставимо супротно. Како је S' затворен тада постоји базна околина тачке φ (у слабој-$*$, τ топологији) која не сече S'. Нека је то $\mathcal{B}_{T_1,\dots,T_k,\varepsilon} = \{\psi \,|\, |\psi(T_j) - \varphi(T_j)| < \varepsilon\}$. Можемо чак претпоставити да су T_j самоадјунговани, јер се лако проверава да је $\mathcal{B}_{\mathrm{Re}\,T_1,\mathrm{Im}\,T_1,\dots,\mathrm{Re}\,T_k,\mathrm{Im}\,T_k,\varepsilon} \subseteq \mathcal{B}_{T_1,\dots,T_k,\varepsilon\sqrt{2}}$. Уочимо пресликавање $F : \mathcal{M}^*_{sa} \to \mathbf{R}^k$ дато са $F(\psi) = (\psi(T_1), \dots, \psi(T_k))$. Скуп $F(S')$ је конвексан, а $F(\varphi)$ је на растојању барем ε од њега, па се они могу освојити неком хиперравни. После одговарајуће ротације, налазимо самоадјунгован елемент T, такав да за све $\psi \in S'$ имамо

$$\psi(T) \le \gamma < \varphi(T). \tag{6}$$

Сад, ако је $\psi \in S$, то јест стање, онда $\psi, -\psi \in S'$, јер можемо узети $t = 0$, односно $t = 1$ у (5), па је $\psi(T), -\psi(T) \le \gamma$, односно за све $\psi \in S$ је $|\psi(T)| \le \gamma$. Између осталог то важи и за векторско стање $T \mapsto \langle T\xi, \xi\rangle$ ($||\xi|| = 1$) које је непрекидно у свакој од три посматране топологије. Другим речима $|\langle T\xi, \xi\rangle| \le \gamma$ за сваки јединични вектор ξ. Отуда је $||T|| \le \gamma$, одакле је $|\varphi(T)| \le ||\varphi||\,||T|| \le \gamma$, па неједнакост (6) не може да се одржи.

Једнакост норми следи јер је $||\varphi|| = 1$, док је $||\varphi_1|| + ||\varphi_2|| = \varphi_1(1) + \varphi_2(1) = t\psi_1(1) + (1-t)\psi_2(1) = 1$. □

Примедба: Може се на овом месту доказати и јединственост овог разлагања, али нам то није неопходно. То разлагање се назива (очекивано) *Жорданово* разлагање - према аналогији са разлагањем мера.

6.15. Последице. а) Ако је $\varphi \in \mathcal{M}_*$ ултраслабо непрекидан функционал, он је линеарна комбинација највише четири нормална функционала;

б) Ако је $\Phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ хомоморфизам фон Нојманових алгебри, посматраних као C^*-алгебре, тада је ρ нормално ако и само ако је непрекидно у односу на ултраслабе топологије у $\mathcal{M}_1$, односно $\mathcal{M}_2$.

Доказ. а) Према ставу 6.14, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + i\varphi_3 - i\varphi_4$, где су φ_j ултраслабо непрекидни и позитивни. Они су, пак, према ставу 6.13 нормални;

б) Докажимо прво да је Φ ултраслабо непрекидно, ако и само ако за све $\varphi \in \mathcal{M}_{2*}$ фукнционал $\varphi \circ \rho \in \mathcal{M}_{1*}$. Директан смер је тривијалан (своди се на то да је композиција непрекидних функција непрекидна). Докажимо обратан. Претпоставимо да $\varphi \circ \rho \in \mathcal{M}_{1*}$ за све $\varphi \in \mathcal{M}_{2*}$ и уочимо произвољну предбазну околину нуле V у $\mathcal{M}_2$. Скуп V је облика $V = \{T \in \mathcal{M}_2 \mid |\varphi(T)| < \varepsilon\} = \varphi^{-1}(\varepsilon D)$, где је D јединични диск у комплексној равни. Због тога је $\rho^{-1}(V) = \rho^{-1}(\varphi^{-1}(\varepsilon D)) = (\varphi \circ \rho)^{-1}(\varepsilon D)$, што је отворен скуп у $\mathcal{M}_1$. Ово је довољно, јер су остале предбазне околине транслати предбазних околина нуле.

Друго, докажимо да је ρ нормално, ако и само ако $\varphi \circ \rho \in \mathcal{M}^+_{1*}$ за све $\varphi \in \mathcal{M}^+_{2*}$. Опет је директан смер тривијалан. Што се тиче обратног, приметимо за почетак да је ρ позитивно чим је хомоморфизам, јер тиме чува спектар. Нека је за свако нормално позитивно φ и сваку растућу ограничену мрежу T_α испуњено

$$\varphi(\rho(\sup T_\alpha)) = \sup \varphi(\rho(T_\alpha)) \tag{7}$$

За десну страну у (7) важи $\sup \varphi(\rho(T_\alpha)) = \varphi(\sup \rho(T_\alpha))$, јер је φ нормално. Такође, како је увек $T_\alpha \leq \sup T_\alpha$, а ρ позитивно, имамо $\sup \rho(T_\alpha) \leq \rho(\sup T_\alpha)$. Према томе довољно је доказати да из $S \leq T$ и $\varphi(S) = \varphi(T)$ за све нормалне позитивне φ важи $S = T$, односно да из $T \geq 0$ и $\varphi(T) = 0$ за све нормалне φ излази $T = 0$. Последње је, међутим, лако, јер ако $T \neq 0$, онда постоји вектор x са својством $\langle Tx, x\rangle > 0$, а пресликавање $T \mapsto \langle Tx, x\rangle$ је нормално.

Сада је еквиваленција јасна јер је $\varphi \circ \rho$ ултралсабо непрекидно за све $\varphi \in \mathcal{M}_{2*}$ ако и само ако је $\varphi \circ \rho$ нормално за све $\varphi \in \mathcal{M}_{2*}^+$. Директна импликација следи јер $\mathcal{M}_{2*} \supseteq \mathcal{M}_{2*}^+$, а обратна јер је $\mathcal{M}_{2*}$ једнак линеарном омотачу скупа $\mathcal{M}_{2*}^+$. □

МОРФИЗМИ ФОН НОЈМАНОВИХ АЛГЕБРИ

6.16. Дефиниција. У категорији фон Нојманових алгебри дефинишемо *морфизме* као нормалне хомоморфизме. Разлог смо већ поменули, а то је да ако су две фон Нојманове алгебре изоморфне, онда је изоморфизам међу њима нормално пресликавање. Нормалност у односу на ултраслабу непрекидност, има ту предност што се може дефинисати искључиво помоћу унутрашњих својстава алгебри, док ултраслаба непрекидност зависи од амбијенталног простора где дата алгебра живи.

За морфизам Φ фон Нојманових алгебри $\mathcal{M}_1 \subseteq B(H_1)$ и $\mathcal{M}_2 \subseteq B(H_2)$ кажемо да је *просторни* или *унитарни* ако постоји унитарно пресликавање $V : H_2 \to H_1$ такво да је $V\Phi(T)x = TVx$. Ако је V само ограничено (не мора бити инвертибилно) лако установљавамо да је пресликавање Φ нормално.

Морфизам фон Нојманове алгебре $\mathcal{M}_1 \subseteq B(H_1)$ у $\mathcal{M}_2 \subseteq B(H_2)$, специјалан је случај репрезентације алгебре $\mathcal{M}_1$ (посматране као C^*-алгебра) на простору H_2.

Међу свим репрезентацијама, један од једноставнијих примера је тзв. *амплификација*. Наиме, ако је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ и K прозивољан Хилбертов простор, формирамо пресликавање $\Phi : \mathcal{M} \to B(H \otimes K)$ са $\Phi(T) = T \otimes I_K$, где је I_K јединични оператор на K, а $T \otimes I_K$ дефинисан са $(T \otimes I_K)(x \otimes y) = Tx \otimes y$. Једноставно се проверава да је овакво пресликавање нормално. Слику пресликавања Φ означаваћемо са $\mathcal{M}^K$.

6.17. Став. Нека је $\Phi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ морфизам фон Нојамanових алгебри $\mathcal{M}_j \subseteq B(H_j)$. Тада је фон Нојманова алгебра $\Phi(\mathcal{M}_1)$ просторно еквивалентна са неком подалгебром алгебре $\mathcal{M}_1^K$ за неки довољно велики Хилбертов простор.

Доказ. Претпоставимо, прво, да алгебра $\Phi(\mathcal{M}_1)$ има циклични вектор, односно да постоји $\xi \in H_2$ такво да је $\Phi(\mathcal{M}_1)\xi$ густо у H_2. Посматрајмо пресликавање $\psi : \mathcal{M}_1 \to \mathbf{C}$ дато са $\psi(T) = \langle \Phi(T)\xi, \xi\rangle$. Пресликавање је позитивно и нормално, као композиција таквих. Стога, према ставу 6.13, постоје вектори $x_j \in H_1$ такво да је

$$\langle \Phi(T)\xi, \xi\rangle = \psi(T) = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle Tx_j, x_j\rangle .$$

Пресликавање $V : \Phi(\mathcal{M}_1) \to H_1 \otimes l^2(\mathbf{N})$, дато са $V(\Phi(T)\xi) = (Tx_1, Tx_2, \dots)$ је коректно дефинисано и изометрично, јер важи

$$||V(\Phi(T)\xi)||^2 = ||(Tx_j)||^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} ||Tx_j||^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle T^*Tx_j, x_j\rangle = \langle \Phi(T^*T)\xi, \xi\rangle = ||\Phi(T)\xi||^2,$$

па се може продужити до целог H_2. Даље, за векторе из густог скупа $\Phi(\mathcal{M}_1)\xi$ имамо

$$V(\Phi(T)\Phi(S)\xi) = V(\Phi(TS)\xi) = (TSx_j)_j = (T \otimes I_K)V(\Phi(S)\xi),$$

па и на затворењу имамо $V\Phi(T) = (T \otimes I_K)V$. Одавде следи нормалност

Ако $\Phi(\mathcal{M}_1)$ нема циклични вектор, онда као и свака репрезентација $\Phi(\mathcal{M}_1)$ се може разложити на директну суму цикличних. Тада ћемо $\mathcal{M}_1^K$ даље степеновати још већим Хилбертовим простором да обухватимо све циличне суманде. □

6.18. Став. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ комутативна фон Нојманова алгебра, и нека постоји циклични вектор, то јест такав вектор $\xi \in H$ за који је $\mathcal{M}\xi = \{T\xi \mid T \in \mathcal{M}\}$ густ у H. Тада постоји компактан тополошки простор X и вероватносна Борелова мера μ на Xтакви да је $\mathcal{M}$ изометрички изоморфна алгебри $L^\infty(X, \mu)$.

Доказ. Алгебра $\mathcal{M}$ је, уједно, и комутативна C^*-алгебра са јединицом. Према Гељфанд Најмарковој теореми постоји изоморфизам C^*-алгебри $\Phi : \mathcal{M} \to C(X)$, где је X компактан тополошки простор. За дати циклични вектор ξ, пресликавање $C(X) \ni \Phi(T) \mapsto \langle T\xi, \xi\rangle$ је један позитиван функционал, па према Рисовој теореми постоји вероватносна Борелова мера μ на X таква да је $\langle T\xi, \xi\rangle = \int_X \Phi(T)\,\mathrm{d}\mu$. Даље, пресликавање $V : \mathcal{M}\xi \to L^2(X, \mu)$ дато са $V(T\xi) = \Phi(T)$ је изометрично. Заиста,

$$||\Phi(T)||^2 = \int_X |\Phi(T)|^2\,\mathrm{d}\mu = \int_X \Phi(T^*T)\,\mathrm{d}\mu = \langle T^*T\xi, \xi\rangle = ||T\xi||^2,$$

па се може продужити до изометричног оператора $V : H \to L^2(X, \mu)$. Слика оператора V садржи све непрекидне функције, које су густе у $L^2(X, \mu)$, па је тиме V унитаран.

Пресликавање $\mathcal{M} \to B(L^2(X, \mu))$ дато са $T \mapsto M_{\Phi(T)}$ множење функцијом $\Phi(T)$ је такође изометрија. И више, она се остварује путем унитарног оператора V, Наиме, $M_{\Phi(T)} = VTV^*$. Заиста, за $X\xi, Y\xi \in \mathcal{M}\xi$ је $V(X\xi) = \Phi(X)$ и $V(Y\xi) = \Phi(Y)$, па је

$$\left\langle M_{\Phi(T)}V(X\xi), V(Y\xi)\right\rangle = \int_X \Phi(T)\Phi(X)\overline{\Phi(Y)}\,\mathrm{d}\mu = \int_X \Phi(TX)\overline{\Phi(Y)}\,\mathrm{d}\mu = \langle TX\xi, Y\xi\rangle,$$

одакле следи тражено. То значи да $\mathcal{M}$ можемо видети као подалгебру алгебре $B(L^2(X, \mu))$ уместо као подалгебру од $B(H)$. Тако је и $\{M_{\Phi(T)} \mid \Phi(T) \in \mathbf{C}(X)\}$ затворена у односу на слабу топологију, па је према Нојмановој теореми о бикомутанту, и Примеру 6.3 $\mathcal{M} \cong C(X) = C(X)'' = L^\infty(X, \mu)$. □

6.19. Последица. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ комутативна фон Нојманова алгебра. Тада постоји простор X са мером μ, такав да се X може изразити као дисјунктна унија (макар и непребројива) скупова коначне мере, и $\mathcal{M}$ изоморфна некој подалгебри алгебре $L^\infty(X)$.

Доказ. Утапање $\mathcal{M} \hookrightarrow B(H)$ је једна репрезентација алгебре $\mathcal{M}$ посматране као C^*-алгебра. Она је директна сума цикличних. Што значи да постоји разлагање $H = \bigoplus_\alpha H_\alpha$, и подалгебре $\mathcal{M}_\alpha \subseteq B(H_\alpha)$, такве да је $\mathcal{M} = \bigoplus_\alpha \mathcal{M}_\alpha$, и у H_α постоји циклични вектор ξ_α за $\mathcal{M}_\alpha$. На сваки сумaнд $\mathcal{M}_\alpha$ применимо претходни Став. □

ОДНОС C^* И ФОН НОЈМАНОВЕ АЛГЕБРЕ

6.20. Теорема [Каплански]. Нека су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ две алгебре у $B(H)$ такве да је $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ је густа у $\mathcal{B}$ у јакој операторној топологији. Тада је:

(i) $\mathcal{A}_{sa}$ је јако густ у $\mathcal{B}_{sa}$ ($\mathcal{A}_{sa}$ је ознака за скуп самоадјунгованих елемената алгебре $\mathcal{A}$);

(ii) Јединична лопта у $\mathcal{A}_{sa}$ је јако густа у јединичној лопти у $\mathcal{B}_{sa}$;

(iii) Јединична лопта у $\mathcal{A}$ је јако густа у јединичној лопти у $\mathcal{B}$.

Теоремом Капланског се назива трећа тврдња која представља побољшање теореме о бикомутанту. Наиме према теореми о бикомутанту сваки елемент из $\mathcal{A}''$ се може јако апроксимирати елементима из $\mathcal{A}$. Али приликом узимања лимеса у некој од „слабашних“ топологија норма може ефективно да се смањи. Према теореми Капланског то се може избећи. Прва и друга тврдња наведене су не само зато да би се доказ рашчланио, већ и зато што ћемо се на њих позивати.

Доказ. (i) Нека је $T = T^* \in \mathcal{B}$. Тада постоји мрежа $S_\alpha \in \mathcal{A}$ која јако конвергира ка T, с тим што не знамо да ли су S_α самоадјунговани. Али знамо да S_α^* слабо конвергира ка T^*. Тако $\mathcal{B}_{sa}$ припада слабом затворењу скупа $\mathcal{A}_{sa}$. Међутим, то слабо затворење је затворен и конвексан скуп (јер је реалан линеаран простор), а јако и слабо непрекидни функционали се поклапају, па је он затворен и у јакој топологији. Тиме је прва тврдња доказана;

(ii) Нека је $T = T^* \in \mathcal{B}$, $||T|| \leq 1$. Посматрајмо функцију $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(\lambda) = 2\lambda/(1 + \lambda^2)$. Она је по модулу увек мања од један, а на сегменту $[-1, 1]$ је бијекција. Отуда постоји $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$ са својством $g(f(\lambda)) = f(g(\lambda)) = \lambda$ за $\lambda \in [-1, 1]$. Оператор $g(T)$ је коректно дефинисан и такође је самоадјунгован, па постоји мрежа самоадјунгованих елемената $S_\lambda \to g(T)$, јако. Остаје још да се докаже да $f(S_\lambda) \to f(g(T)) = T$ (јер је $||f(S_\lambda)|| \le 1$ због $|f(\lambda)| \le 1$). То се у суштини своди на равномерну непрекидност функције f. Дакле, за $X, Y \in B(H)$ имамо

$f(X) - f(Y) = (1+X^2)^{-1}2X - 2Y(1+Y^2)^{-1} = (1+X^2)^{-1}(2X(1+Y^2) - (1+X^2)2Y)(1+Y^2)^{-1}$.

Како је $||(1+X^2)^{-1}||$, $||(1+Y^2)^{-1}|| \le 1$ довољно је оценити средњи чинилац. Имамо

$$X(1+Y^2) - (1+X^2)Y = X + XY^2 - X^2Y - Y = (X-Y) - X(X-Y)Y,$$

што је довољно за доказ друге тврдње;

(iii) Нека је $T \in \mathcal{B}$, $||T|| \le 1$ произвољан. Послужићемо се триком преласка у 2×2 блок матрице. Лако се проверава да је $M_2(\mathcal{A})$ јако густа алгебра у $M_2(\mathcal{B})$. Оператор

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{bmatrix}$$

је самоадјунгован и норма му је $\max\{||T||, ||T^*||\} \le 1$, па постоји фамилија S_λ, $||S_\lambda|| \le 1$,

$$S_\lambda = \begin{bmatrix} S_{11}^{(\lambda)} & S_{12}^{(\lambda)} \\ S_{21}^{(\lambda)} & S_{22}^{(\lambda)} \end{bmatrix}$$

која јако конвергира ка $\tilde{T}$. Када се то примени на вектор облика $(0, x)$ добијамо да

$$||(T - S_{12}^{(\lambda)})x|| \le ||(Tx - S_{12}(\lambda)x, S_{21}^{(\lambda)}x)|| \to 0.$$

За крај доказа приметимо још да је $||S_{12}|| \le 1$. $\square$

6.21. Теорема [Кадисон-Педерсен]. Нека је $\mathcal{A} \subseteq B(H)$ нека C^*-алгебра. Ако $I \in \mathcal{A}$ и ако $\mathcal{A}$ заједно са сваком ограниченом растућом мрежом садржи и њен супремум, онда је $\mathcal{A}$ фон Нојманова алгебра.

Резултат је очекиван. Ако смо могли да помоћу супремума растућих ограничених мрежа опишемо нормалност, а тиме у ултраслабу непрекидност и морфизме фон Нојманових алгебри, онда је логично да затвореност за супремуме повлачи и затвореност у ултраслабој топологији.

Доказ. Доказујемо да $\mathcal{A}$ садржи довољну количину пројектора.

1° корак. Ако је $T \in \mathcal{A}$ позитиван, онда $\mathcal{A}$ садржи пројектор на слику оператора T. Заиста, низ функција $f_n : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$, дат са $f_n(\lambda) = n\lambda$ за $\lambda \in [0, 1/n]$ и $f_n(\lambda) = 1$ иначе, растуће тежи ка $f(\lambda) = \chi_{(0,+\infty)}(\lambda)$. Отуда $P_{\overline{\operatorname{Im} T}} = f(T) \in \mathcal{A}$.

2° корак. Ако су $P, Q \in \mathcal{A}$, онда и $P \vee Q \in \mathcal{A}$. Доказаћемо да је $\operatorname{Im}(P \vee Q) = \operatorname{Im}(P+Q)$. Заиста, ако $y \in \operatorname{Im}(P+Q)$, онда је $y = Px + Qx \in \operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q$. С друге стране, користећи $P \le P+Q$, ако $x \in \ker(P+Q)$, онда је $||Px||^2 = \langle Px, x\rangle \le \langle (P+Q)x, x\rangle = 0$ па $x \in \ker P$. Слично добијамо и да из $(P+Q)x = 0$ излази $Qx = 0$, па имамо $\ker(P+Q) \subseteq \ker P \cap \ker Q = (\operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q)^\perp$. Преласком на ортокомплемент добијамо $\operatorname{Im}(P+Q) \supseteq \operatorname{Im} P + \operatorname{Im} Q$. Сада применимо претходно.

3° корак (опште место). Ако је $\mathcal{B}$ нека $*$-алгебра, онда пројектор на потпростор $\overline{\mathcal{B}\xi}$ ($\xi \in H$) припада комутанту $\mathcal{B}'$. Ово смо у ствари већ доказивали код теореме о бикомутанту. Означимо тај пројектор са Q. Лако се изводи да је QH инваријантно за произвољно $S \in \mathcal{B}$, тиме и за S^*, па је $QS = SQ$.

4° корак. Сада идемо обратно. Пројектор P на потпростор $\overline{\mathcal{A}'\xi}$ припада алгебри $\mathcal{A}$. Према претходном тај пројектор припада бикомутанту $\mathcal{A}''$. Стога се може, на основу теореме Капланског, јако апроксимирати самоадјунгованим елементима из $\mathcal{A}$ норме не веће од 1. Може се чак апроксимирати и позитивним узимајући квадрате самоадјунгованих. Дакле, ако уочимо вектор $\eta \perp \mathcal{A}'\xi$, биће $P\xi = \xi$ и $P\eta = 0$, па постоји оператор $S_k \in \mathcal{A}$ такав да је $||\xi - S_k\xi|| < 1/n$ и $||S_k\eta|| < 1/k2^k$. Такви оператори, бар на векторима ξ и η апроксимирају P, али је потребна много боља апроксимација.

За дати јединични вектор $\eta \perp \mathcal{A}'\xi$, конструсиаћемо позитиван оператор Y_η такав да је $Y_\eta\xi = \xi$ и $Y_\eta\eta = 0$ на следећи начин. Уочимо операторе

$$T_{m,n} = \left(I + \sum_{k=m}^{n} kS_k\right)^{-1} \sum_{k=m}^{n} kS_k.$$

Очигледно важи $0 \le T_{m,n} \le I$, а како је пресликавање $\lambda \mapsto \lambda/(1+\lambda) = 1 - 1/(1+\lambda)$ оператор растуће, то је фамилија $T_{m,n}$ растућа по n (и ограничена $\le I$). Стога постоји њен јаки лимес, и по претпосатвци припада $\mathcal{A}$. Означимо га са X_m. Фамилија $T_{m,n}$ је опадајућа по m за свако n, па је преласком на јаки лимес X_m такође опадајућа фамилија (и ограничена ≥ 0), па постоји и њен јаки лимес и припада $\mathcal{A}$. Тај лимес означимо са Y_η.

Доказујемо сада да је $Y_\eta\eta = 0$. Имамо $T_{m,n} \leq \sum_{k=m}^{n} kS_k \leq \sum_{k=m}^{+\infty} kS_k$ и отуда

$$\langle T_{m,n}\eta, \eta\rangle \leq \sum_{k=m}^{+\infty} k\,\langle S_k\eta, \eta\rangle \leq \sum_{k=m}^{+\infty} 1/2^k = 1/2^{m-1},$$

одакле после узимања лимеса кад $n \to +\infty$ налазимо $\langle X_m\eta, \eta\rangle \leq 1/2^{m-1}$, а после још једног лимеса, овог пута кад $m \to +\infty$ налазимо и $\langle Y_\eta\eta, \eta\rangle \leq 0$, односно $Y_\eta\eta = 0$, јер је Y_η позитиван.

Доказујемо сада да је $Y_\eta\xi = \xi$. Како је $\sum_{k=m}^{n} kS_k \geq mS_m$ и како је пресликавање $\lambda \mapsto 1/\lambda$ оператор опадајуће, то је $I - T_{m,n} = (I + \sum_{k=m}^{n} kS_k)^{-1} \leq (I + mS_m)^{-1}$. Треба некако да пребацимо ово S_m у бројилац. Функција $\lambda \mapsto 1/(1 + m\lambda)$ је конвексна, па је мања од линеарне која спаја тачке $(0, 1)$ и $(1, 1/m)$, то јест важи

$$\frac{1}{1 + m\lambda} \leq \frac{1}{m+1}(1 + m(1 - \lambda)),$$

па водећи рачуна о томе да је $0 \leq S_m \leq I$, имамо и

$$(I + mS_m)^{-1} \leq \frac{1}{m+1}(I + m(I - S_m)),$$

што када се примени на вектор ξ постаје

$$\left\langle (I + mS_m)^{-1}\xi, \xi\right\rangle \leq \frac{1}{m+1}\,\langle \xi + m(\xi - S_m\xi), \xi\rangle = \frac{1}{m+1}(||\xi||^2 + m\,\langle \xi - S_m\xi, \xi\rangle) \leq \frac{||\xi||^2 + 1}{m+1},$$

одакле је и $\langle (I - T_{m,n})\xi, \xi\rangle \leq (||\xi||^2{+}1)/(m{+}1)$. После узимања два лимеса добијамо $\langle (I - Y_\eta)\xi, \xi\rangle \leq 0$, однсоно $Y_\eta\xi = \xi$, јер је $Y_\eta \leq I$ и тиме $I - Y_\eta \geq 0$.

Довршавамо (најзад) доказ четвртог корака. Слика оператора Y_η садржи простор $\mathcal{A}'\xi$, јер ако $y \in \mathcal{A}'\xi$ онда $y = R\xi$ за неко $R \in \mathcal{A}'$ па је $Y_\eta R\xi = RY_\eta\xi = R\xi = y$. Према првом кораку $\mathcal{A}$ садржи пројектор Q_η на $\overline{\operatorname{Im} Y_\eta}$. Међутим $P = \inf_{\eta\perp\mathcal{A}'\xi} Q_\eta$. Наиме, како $\operatorname{Im} Y_\eta$ садржи $\mathcal{A}'\xi$ то је $P \leq Q_\eta$ за све η и тиме $P \leq \inf Q_\eta$. С друге стране, ако је $P\eta = 0$ онда је и $Q_\eta\eta = 0$, одакле је и $\inf Q_\eta\eta = 0$, што завршава доказ, имајући у виду други корак, односно да $\mathcal{A}$ садржи инфимуме и супремуме произвољних фамилија пројктора.

5° корак, којим завршавамо доказ. Нека је $P \in \mathcal{A}''$. Тада је $P = \sup_{\xi=P\xi} C_\xi$, где је C_ξ пројектор на затворење простора $\mathcal{A}'P\xi$. Заиста $\mathcal{A}'P\xi = P\mathcal{A}'\xi \subseteq \operatorname{Im} P$, па је увек $C_\xi \leq P$. С друге стране, ако је $P\xi = \xi$, онда је и $C_\xi\xi = \xi$, па је $\sup C_\xi \geq P$. Овиме је доказ завршен, јер је свака фон Нојманова алгебра генерисана својим пројекторима. □

6.22. Алгебра $W^*(T)$. Нека је $T \in B(H)$ произвољан оператор. Алгебру $W^*(T)$ дефинишемо као најамњу (по инклузији) фон Нојманову алгебру (у $B(H)$) која садржи T. Јасно је да је $W^*(T) = \{T, T^*\}''$ бикомутант двочланог скупа.

Ако је T нормалан елемент, онда је због Фаглид-Патнемове теореме, $W^*(T) = \{T, T^*\}'' = \{T\}''$. Показаћемо да се у случају када је H сепарабилан Хилбертов простор, $W^*(T)$ добија као слика Бореловог функционалног рачуна алгебре $L^\infty(\sigma(T))$. Наиме, спектралном теоремом установљен је хомоморфизам $\Psi : L^\infty(\sigma(T)) \to B(H)$ дат помоћу спектралног интеграла

$$\Psi(f) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_T(\lambda).$$

Доказано је и да је Ψ изометрично, као и да из $ST = TS$ следује да S комутира са спектралном мером, па отуда S комутира и за $f(T) = \Psi(f)$ за све $f \in L^\infty(\sigma(T))$. Тако је $\Psi(L^\infty(\sigma(T))) \subseteq \{T\}''$. Да бисмо доказали обратну инклузију довољно је показати да је $\Psi(L^\infty(\sigma(T)))$ фон Нојманова алгебра, а због Кадисон-Педерсенове теореме довољно је да је она затворена за супремуме и инфимуме монотоних фамилија.

У случају сепарабилног простора H, постоји скаларна позитивна (чак вероватносна) мера μ еквивалентна са спектралном мером E. (Ту еквиваленцију схватамо као обострану апсолутну непрекидност, то јест као $\mu(F) = 0 \Leftrightarrow E(F) = 0$.) Тада је $L^\infty(\sigma(T), \mathrm{d}E) = L^\infty(\sigma(T), \mu)$ јер L^∞ не зависи од мере већ само од скупова мере нула. Како је већ доказано да је L^∞ фон Нојманова алгебра она има својство да свака растућа ограничена мрежа има супремум. Дакле, ако је f_α растућа ограничена мрежа есенцијално ограничених функција, онда постоји $f \in L^\infty$ њен супремум. Важно упозорење:

Овде се не може тврдити да је $\sup_\alpha f_\alpha(x) = f(x)$ тачка по тачка, нарочито ако скуп индекса није пребројив јер тада тачка по тачка супремум не мора уопште бити мерљива функција. Функција f је супремум, у смисли да је за све α, $f_\alpha(x) \le f(x)$ скоро свуда и да је f најмања функција са тим својством.

Нека је сада $x \in H$. Види се (а видети и задатак број 8) да је $\mu_x \preceq \mu$, односно да из $E(F) = 0$, излази $\mu_x(F) = \langle E(F)x, x\rangle = 0$. Према Радон-Никодимовој теореми постоји L^1 функција $h = \mathrm{d}\mu_x/\,\mathrm{d}\mu$. При томе је $h \ge 0$, па $\sqrt{h} \in L^2$. Како је L^∞ фон Нојманова алгебра управо посматрана као алгебра оператора множења функцијама, то је $\int_{\sigma(T)} f\,\mathrm{d}\mu_x = \int_{\sigma(T)} fh\,\mathrm{d}\mu = \left\langle M_f\sqrt{h}, \sqrt{h}\right\rangle$, а како је последњи израз нормалан функционал, то је $\sup_\alpha \left\langle M_{f_\alpha}\sqrt{h}, \sqrt{h}\right\rangle = \left\langle M_f\sqrt{h}, \sqrt{h}\right\rangle$, односно $\sup_\alpha \int_{\sigma(T)} f_\alpha\,\mathrm{d}\mu_x = \int_{\sigma(T)} f\,\mathrm{d}\mu_x$.

Ако је $S_\alpha \in \Psi(L^\infty)$ растућа фамилија, онда је $S_\alpha = f_\alpha(T)$ за неку фамилију функција $f_\alpha \in L^\infty$. Нека је $f = \sup_\alpha f_\alpha \in L^\infty$ и $S = \varphi(T)$. Тада је за све $x \in H$, $\sup\langle S_\alpha x, x\rangle = \sup\langle f_\alpha(T)x, x\rangle = \int_{\sigma(T)} \varphi_\alpha\,\mathrm{d}\mu_x = \langle Sx, x\rangle$. Отуда је $S \in \Psi(L^\infty)$ горње ограничење фамилије S_α. Ако је R неко друго горње ограничење те фамилије, онда је, јасно $R \ge S$, па је овиме доказ завршен.

6.23. Теорема [Сакаи]. а) Нека је $\mathcal{A}$ нека C^*-алгебра, нека је $\mathcal{A} \cong X^*$ за неки Банахов простор X и нека је $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ репрезентација алгебре $\mathcal{A}$ добијена као директан збир свих ГНС репрезентација (π_φ, H_φ), $\varphi \in X^+$. Тада је π верна репрезентација и $\pi(\mathcal{A})$ је фон Нојманова алгебра;

б) Ако је, при томе и $X_1^* \cong \mathcal{A}$, онда је $X_1 \cong X$.

Примедба: Како се X утапа у $X^{**} \cong \mathcal{A}^*$, то се може говорити о позитивним функционалима из X. Скуп позитивних функционала из X означавамо са X^+.

Доказ. а) План доказа је у следећем. Из идентификације $\mathcal{A} \cong X^*$, на $\mathcal{A}$ постоји слаба-$*$ топологија у којој је јединична лопта компактна. То ћемо да искористимо да бисмо показали да свака монотона ограничена мрежа има лимес у слабој-$*$ топологији, а онда ћемо се позвати на Кадисон-Педерсенову теорему. Али идемо редом, поново у неколико корака.

1° корак. Доказаћемо елементарне неједнакости $||\operatorname{Re} a||, ||\operatorname{Im} a|| \le ||a||$ за свако $a \in A$. Заиста, нека је $a = b + ic$, где су $b = b^* = \operatorname{Re} a$ и $c = c^* = \operatorname{Im} a$, редом реални и имагинарни део елемента a. Тада из идентитета

$$2b^2 + 2c^2 = (b + ic)(b - ic) + (b - ic)(b + ic),$$

налазимо $2b^2 \le aa^* + a^*a$, односно $2||b||^2 = ||2b^2|| \le ||aa^*|| + ||a^*a|| = ||a^*||^2 + ||a||^2 = 2||a||^2$, и слично за c.

2° корак. Скуп $\{a \in \mathcal{A}^+ \mid ||a|| \le 1\}$ је затворен у слабој-$*$ топологији и тиме компактан због Алаоглуове теореме. Заиста нека је $a = b + ic$ (слаби-$*$) лимес мреже позитивних елемената a_α, $||a_\alpha|| \le 1$. због компактности јединичне лопте, имамо $||a|| \le 1$, па треба још доказати $c = 0$ и $b \ge 0$. За произвољно реално t, мрежа $a_\alpha + it \to b + i(c + t)$. Како је $||a_\alpha + it|| \le \sqrt{1 + t^2}$ (рецимо јер је $a_\alpha + it$ нормалан и $\sigma(a_\alpha + it) \subseteq \{\lambda + it \mid \lambda \in [0, 1]\}$), и како је и лопта полупречника $\sqrt{1 + t^2}$ компактна, то је и $||b + i(c + t)|| \le \sqrt{1 + t^2}$, а тиме и $||c + t|| \le \sqrt{1 + t^2}$. За произвољно $\lambda \in \sigma(c)$ је онда

$$|\lambda + t|^2 \le ||c + t||^2 \le 1 + t^2,$$

што је неодрживо, осим ако је $\lambda = 0$. Тако је $\sigma(c) = \{0\}$ и тиме $c = 0$, јер је c самоадјунгован.

Како је и $||1 - a_\alpha|| \le 1$, то је и $||1 - b|| \le ||1 - a|| \le 1$, па је $b \ge 0$.

3° Простор X се може посматрати и као $\mathcal{A}^*$ али не у односу на норму на $\mathcal{A}$, већ у односу на слабу-$*$ топологију на $\mathcal{A}$. Подсетимо се да је слаба-$*$ топологија локално конвексна, као и да X раздваја тачке у $\mathcal{A}$. Показаћемо нешто више, наиме да X^+ раздваја тачке из $\mathcal{A}^+$, односно да је $a \in \mathcal{A}^+$ једнак нули ако и само ако за све $\varphi \in X^+$ важи $\varphi(a) = 0$.

За нетривијалан смер, уочимо $0 \ne a \in \mathcal{A}^+$. Тада је $-a$ негативно, а $\mathcal{A}^+ \cap \{||a|| \le 1\}$ је компактан и конвексан и не садржи $-a$, па се према Хан-Банаховој теореми може одвојити од $-a$ функционалом, то јест, постоји $\varphi \in X$, такав да је $\varphi(b) \ge 0$ за све $b \in \mathcal{A}^+$ и $\varphi(-a) < 0$. Тако је φ позитиван, и $\varphi(a) \ne 0$.

Одавде, посебно, следи да је репрезентација π верна. Наиме, ако $a \in \mathcal{A}$, онда постоји $\varphi \in X^+$ такво да је $\varphi(a^*a) > 0$, и тиме $||\pi(a)||^2 = ||\pi(a^*a)|| \ge ||\pi_\varphi(a^*a)|| > 0$. Тако је π инјективна, и тиме изометрична.

4° корак. Доказаћемо да свака монотона ограничена мрежа $a_\alpha \in \mathcal{A}$ конвергира у слабој-$*$ топологији свом супремуму $a = \sup_\alpha a_\alpha$, као и да онда $x^* a_\alpha x$ конвергира ка $x^* a x$.

Мрежа a_α је ограничена, и можемо претпоставити да се састоји се од позитивних елемената (у супротном посматрамо $a_\alpha - a_{\alpha_0}$). Према првом кораку, та мрежа има тачку нагомилавања - означимо је са a. Тај елемент a је супремум мреже a_α. То се види овако: За фиксирано α, мрежа $a_\beta - a_\alpha$, има (по β) $a - a_\alpha$ за тачку нагомилавања, а како је за $\beta \geq \alpha$, $a_\beta - a_\alpha \geq 0$ то је и $a - a_\alpha \geq 0$. Отуда је a горње ограничење мреже a_α. Ако је b неко друго горње ограничење наше мреже, онда је $b - a_\alpha \geq 0$, а та за тачку нагомилавања има $b - a \geq 0$. Тако је $a = \sup a_\alpha$.

Пртходно важи за било коју тачку нагомилавања мреже a_α, па како је супремум увек јединствен, то је он уједно и једина тачка нагомилавања мреже a_α. (Да ли је и лимес?)

Лако налазимо да је $x^* a_\alpha x$ растућа и ограничена, па конвергира свом супремуму, означимо га, рецимо, са b. Треба доказати да је $x^* a x = b$. Јасно је да је $x^* a x$ горње ограничење мреже $x^* a_\alpha x$, али није јасно да је најмање, осим када је x инвертибилно, јер тада можемо претходно применити на мрежу $(x^{-1})^* a_\alpha x^{-1}$ и тако заменити улоге a и b.

Нека сада x није инвертибилан. Доказујемо прво да за све $\varphi \in X^+$ важи $\varphi(a_\alpha x) \to \varphi(ax)$ и $\varphi(x^* a_\alpha) \to \varphi(x^* a)$. Прву релацију имамо на основу Коши-Шварцове неједнакости

$$\begin{aligned}(8)\quad |\varphi(ax) - \varphi(a_\alpha x)|^2 = |\varphi((a - a_\alpha)^{1/2}(a - a_\alpha)^{1/2} x)|^2 &\leq \varphi(a - a_\alpha)\varphi(x^* a x - x^* a_\alpha x)\\ &\to (\varphi(a) - \varphi(a))(\varphi(x^* a x) - \varphi(b)) = 0.\end{aligned}$$

Другу добијамо зато што је сваки позитиван функционал из A^* реалан, па тиме и сваки позитиван из $X \subseteq X^{**} \cong A^*$, па је $\varphi(x^* a_\alpha) = \overline{\varphi(a_\alpha x)}$.

Сада уочимо било које λ из резолвентног скупа елемента x. С једне стране

$$(9)\qquad \varphi((x-\lambda)^* a_\alpha (x-\lambda)) \to \varphi((x-\lambda)^* a (x-\lambda)) = \varphi(x^* a x) - \lambda\varphi(x^* a) - \bar\lambda\varphi(ax) + |\lambda|^2\varphi(a),$$

јер је $x - \lambda$ инвертибилан. С друге стране

$$\begin{aligned}(10)\quad \varphi((x-\lambda)^* a_\alpha (x-\lambda)) = \varphi(x^* a_\alpha x) - \lambda\varphi(x^* a_\alpha) - \bar\lambda\varphi(a_\alpha x) + |\lambda|^2\varphi(a_\alpha)&\\ \to \varphi(b) - \lambda\varphi(x^* a) - \bar\lambda\varphi(ax) + |\lambda|^2\varphi(a).&\end{aligned}$$

Упоређујући последње две истакнуте формуле (9) и (10), видимо да за све $\varphi \in X^+$ важи $\varphi(b) = \varphi(x^* a x)$, одакле је $b = x^* a x$ због трећег корака.

Одавде посебно следи да је $\mathcal{A}$ унитална. Наиме, ако је e_α произвољна апроксимативна јединица, онда $e_\alpha \to e = \sup e_\alpha$ у слабој-$*$ топологији. Уочимо произвољно $x \in \mathcal{A}$ и λ из његовог резолвентног скупа. Тада за све $\varphi \in X^+$ имамо $\varphi((x-\lambda)^* e_\alpha (x-\lambda)) \to \varphi((x-\lambda)^* e (x-\lambda))$. С друге стране, важи и $\varphi((x-\lambda)^* e_\alpha (x-\lambda)) \to \varphi((x-\lambda)^*(x-\lambda))$, јер $(x-\lambda)^* e_\alpha (x-\lambda) \to (x-\lambda)^*(x-\lambda)$ у норми, а конвергенција у норми је јача од слабе-$*$. Тако је $(x-\lambda)^* e (x-\lambda) = (x-\lambda)^*(x-\lambda)$, а $(x-\lambda)^*$ можемо да скратимо, па је $ex = x$. Слично се добија и $xe = x$.

Примедба: Овде би могла да се изнесе примедба да смо користили појмове *инвертибилан* и *резолвентни скуп* пре него што смо доказали да $\mathcal{A}$ има јединицу. Међутим, резолвентни скуп и инвертибилност схватамо као појмове у унитализацији алгебре $\mathcal{A}$, а како знамо да је $\mathcal{A}$ увек двострани идеал у својој унитализацији, онда смемо да пишемо $x - \lambda$ и да га скраћујемо, докле год не стоји само, већ увек множено или с лева или с десна неким другим елементом. Инспекцијом доказа, може се утврдити да је све коректно, осим можда једног места при самом крају који захтева дораду.

5° корак и завршни. Како смо показали да је $\mathcal{A}$ унитална, и π верна репрезентација, остаје још да се докаже (имајући у виду Кадисон-Педерсенову теорему) да је $\pi(\mathcal{A})$ затворена за супремуме растућих ограничених мрежа.

Дакле, нека је a_α растућа ограничена мрежа у $\mathcal{A}$. Нека је a њен супремум у $\mathcal{A}$, и уједно $\lim a_\alpha = a$ у слабој-$*$ топологији. С друге стране, $\pi(a_\alpha)$ је растућа ограничена мрежа у $B(H)$, и нека је x њен супремум. За произвољно $b \in \mathcal{A}$, и произвољно $\varphi \in S(\mathcal{A}) \cap X$ имамо

$$\langle x\pi(b)1_\varphi, \pi(b)1_\varphi\rangle = \lim\langle \pi(a_\alpha b)1_\varphi, \pi(b)1_\varphi\rangle = \lim\langle a_\alpha b + N_\varphi, b + N_\varphi\rangle = \lim\varphi(b^* a_\alpha b) = \varphi(b^* a b),$$

према четвртом кораку. Слично

$$\langle \pi(a)\pi(b)1_\varphi, \pi(b)1_\varphi\rangle = \langle \pi(ab)1_\varphi, \pi(b)1_\varphi\rangle = \langle ab + N_\varphi, b + N_\varphi\rangle = \varphi(b^* a b),$$

па је $\langle (x - \pi(a))\pi(b)1_\varphi, \pi(b)1_\varphi\rangle = 0$. Због поларизационог идентитета онда важи и за све b, $c \in \mathcal{A}$, $\langle (x - \pi(a))\pi(b)1_\varphi, \pi(c)1_\varphi\rangle = 0$. Како је 1_φ циклични вектор за директни суманд (π_φ, H_φ) то је

$x - \pi(a) = 0$ на H_φ, а како је φ било произвољно, то је $x - \pi(a) = 0$, то јест $x \in \pi(\mathcal{A})$. Овиме је доказ (коначно) завршен.

б) Нека је сада $\mathcal{M}$ фон Нојманова алгебра и $\theta : X^* \to \mathcal{M}$ изоморфизам. Тада је и $\theta^* : \mathcal{M}^* \to X^{**}$, дат са $(\theta^*(\Lambda^*))(\psi) = \Lambda^*(\theta\psi)$ такође изоморфизам. Доказаћемо да је $(\theta^*)^{-1}(X) \subseteq \mathcal{M}_*$. Заиста, ако је $\varphi \in X$ произвољан, онда је према четвртом кораку претходног доказа $\varphi(\sup a_\alpha) = \lim \varphi(a_\alpha)$ за сваку растућу ограничену мрежу у $\mathcal{A}$. Отуда је φ нормалан, па $(\theta^*)^{-1}(\varphi) \in \mathcal{M}_*$. Требало би да је то довољно због Хан-Банахове теорема. Али зашто? $\square$

6.24. W^***-алгебре.** Дефиниција W^*-алгебре је аксиоматско заснивање теорије фон Нојманових алгебри, без позивања на амбијентални Хилбертов простор.

Дефиниција. За C^*-алгебру $\mathcal{A}$ кажемо да је W^*-алгебра, ако постоји њена репрезентација $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ таква да је $\pi(\mathcal{A})$ фон Нојманова алгебра у $B(H)$.

Према Сакаијевој теореми, C^*-алгебра је W^* ако и само ако има преддуал, односно ако постоји Банахов простор X такав да је $X^* \cong \mathcal{A}$. Такође, X се може, у том случају, идентификовати са скупом свих нормалних (или ултраслабо или ултрајако непрекидних или потпуно адитивних) функционала.

Дефиниција. *W^*-овојница дате C^*-алгебре* $\mathcal{A}$ је бикомутант њене универзалне репрезентације. Односно, ако је $\pi : \mathcal{A} \to B(H)$ универзална репрезентација, то јест она која потиче од свих стања, онда је $W^*(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A})''$.

Онда када је $\mathcal{A}$ већ W^*-алгебра, показује се да је и $\pi(\mathcal{A})$ фон Нојманова алгебра, па је $\pi(\mathcal{A})'' = \pi(\mathcal{A})$. Другим речима, функтор W^* је пројекција. Такође доказује се и да је $W^*(\mathcal{A})(= \pi(\mathcal{A})'') \cong \mathcal{A}^{**}$, односно да је $W^*(\mathcal{A})$ изоморфно другом дуалу алгебре $\mathcal{A}$. Неки пут тај изоморфизам није „природан“. Рецимо $\mathfrak{S}_\infty^{**} \cong B(H)$, и ту је изоморфизам природан, јер је $\mathfrak{S}_\infty$ свуда густ (у јакој, слабој итд. топологији) подскуп скупа $B(H)$. Али, на примеру алгебре $C[0,1]$ ствафри стоје другачије, јер јр $(C[0,1])'' = L^\infty$ (репрезнтације на $L^2(0,1)$, али није $C[0,1]^{**} \cong L^\infty(0,1)$. То се збило, јер репрезентација на $L^2(0,1)$ није универзална.

Задаци

1. Нека су H и K Хилбертови простори, и $\mathcal{M} \subseteq B(H \otimes K)$, $\mathcal{M} = B(H) \otimes I_K$, односно $T \in \mathcal{M}$ ако и само ако је $T(x \otimes y) = T_0 x \otimes y$ за неко $T_0 \in B(H)$. Доказати да је $\mathcal{M}$ фон Нојманова алгебра, као и да је $\mathcal{M}' = I_H \otimes B(K)$. Написати експлицитне формуле за матрице из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ ако је $H = \mathbf{C}^2$, $K = \mathbf{C}^3$.

2. Нека је G дискретна група, то јест група са дискретном топологијом. Нека $l^2(G)$ означава скуп свих функција $x : G \to \mathbf{C}$, таквих да $\sum_{g\in G} |x(g)|^2 < +\infty$.

а) Доказати да је $l^2(G)$ Хилбертов простор са скаларним производом $\langle x, y\rangle = \sum_{g\in G} x(g)\overline{y(g)}$;

б) Доказати да су за фиксирано $h \in G$ пресликавања L_h, $R_h : l^(G) \to l^2(G)$, дата са $(L_h x)(g) = x(hg)$ и $(R_h x)(g) = x(gh)$ унитарна. Доказати да L_{h_1} и R_{h_2} комутирају. Доказати да су пресликавања $h \mapsto L_h$, и $h \mapsto R_{h^{-1}}$ унитарне репрезентације групе G на $l^2(G)$;

в) Нека је $\mathcal{M}_L = \{L_h \mid h \in G\}''$ и $\mathcal{M}_R = \{R_h \mid h \in G\}''$. Доказати да је $(\mathcal{M}_L)' = \mathcal{M}_R$ и $(\mathcal{M}_R)' = \mathcal{M}_L$;

г) За дато $C \in B(l^2(G))$, нека је $C_{g,h} = \langle Cg, h\rangle$. Доказати да $C \in \mathcal{M}_L$ ако и само ако $C_{ug,uh} = C_{g,h}$, односно $C \in \mathcal{M}_R$ ако и само ако $C_{gu,hu} = C_{g,h}$. Исписати конкретну форму матрица оператора C у случајевима $G = Z_n$, $G = Z_2 \times Z_2$ и $G = D_3$ (диедарска група);

д) Доказати да је $Z(\mathcal{M}_L)$ тривијалан ако и само ако су све класе конјугација (осим, наравно, $\{1_G\}$ бесконачне. Наћи нетривијалан елемент центра у случају већ наведених коначних група. Обратно, ако је G комутативна, тада су $\mathcal{M}_L$ и $\mathcal{M}_R$ комутативне. Важи ли обрат?

3. Нека је $\Phi : L^\infty(X, \mu) \to \mathcal{M}$, $\mu(X) < +\infty$ изоморфизам фон Нојманових алгебри. Ако низ $g_n \in L^\infty$ тачка по тачка конвергира ка g, и ако је g_n униформно ограничен, онда $\Phi(g_n)$ конвергира ка $\Phi(g)$ у ултраслабој топологији.

4. Нека је $\mathcal{M}$ фон Нојманова алгебра. Доказати да су следећа четири услова међусобно еквивалентна:

(1) $\mathcal{M}_*$ је сепарабилан Банахов простор;

(2) Јединична лопта у $\mathcal{M}$ је метризабилна у ултраслабој топологији;

(3) Постоји пребројив ултраслабо густ скуп у $\mathcal{M}$ пребројива фамилија цикличних репрезентација алгебре $\mathcal{M}$ чија је директна сума верна;

(4) $\mathcal{M}$ има верну репрезентацију на сепарабилном Хилбертовом простору.

5. Нека је $\mathcal{M}$ фон Нојманова алгебра и $P \in \mathcal{M}$ пројектор. Доказати да је $P\mathcal{M}P$ такође фон Нојманова алгебра и $(P\mathcal{M}P)' = \mathcal{M}'P$.

6. а) Нека је $\Phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ изоморфизам фон Нојманових алгебри $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ и $\mathcal{N} \subseteq B(K)$. Доказати да постоји Хилбертов простор W и унитарно пресликавање $U : K \otimes W \to H \otimes W$, такво да је $\Phi(T) \otimes I_W = U(T \otimes I_W)U^*$;

б) Ако је $\Phi : B(H) \to B(H)$ $*$-аутоморфизам, онда је $\Phi(T) = UTU^*$ за неки унитаран оператор $U \in B(H)$;

в) Ако је $\Phi : B(H) \to B(H)$ $*$-ендоморфизам, онда је $\Phi(T) = \sum_\alpha V_a T V_\alpha^*$, где је V_α фамилија изометрија, за коју важи $V_\alpha^* V_\alpha = I$, $\sum_\alpha V_\alpha^* V_\alpha = I$.

7. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра и $\xi \in H$ јединични вектор, ω_ξ функционал дат са $\omega_\xi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$. Носач позитивног функционала $\psi : \mathcal{M} \to \mathbf{C}$ је минималан пројектор S_ψ такав да је $\psi(T) = \psi(TS_\psi)$ за све $T \in \mathcal{M}$.

а) Доказати да је $S_{\omega_\xi} = \inf\{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \mid P\xi = \xi\}$;

б) Показати да су следећи услови еквивалентни:

(1) ξ је цикличан за $\mathcal{M}'$ (то јест $\mathcal{M}'\xi$ је густо у H);

(2) ξ раздваја $\mathcal{M}$, то јест за $T \in \mathcal{M}^+$ важи $T\xi = 0 \Rightarrow T = 0$;

(3) $S_{\omega_\xi} = I$;

(4) ω_ξ је веран функционал на $\mathcal{M}$, то јест $\omega_\xi(T) = 0 \Rightarrow T = 0$ за $T \in \mathcal{M}^+$.

Наредна три задатка баве се теоријом спектралне вишеструкости.

8. За нормалан $T \in B(H)$ кажемо да има *прост спектар* ако постоји циклични вектор, тј. $x \in H$ такав да је $W^*(T)x$ густо у H.

а) Ако T има прост спектар доказати да је T унитарно еквивалентан оператору множења са z на простору $L^2(\sigma(T))$, то јест да постоји унитарно пресликавање из $V : H \to L^2(\sigma(T), \mu_x)$ (за погодно x) такво да је $VT = M_z V$, где је M_z оператор множења са z;

б) Ако T има бар једну сопствену вредност вишеструкости бар 2, онда T нема прост спектар - доказати.

9. Нека је H сепарабилан Хилбертов простор, $T \in B(H)$ нормалан оператор, E његова спектрална мера, $\mathcal{M} = W^*(T)$ и нека је за $x \in H$, потпростор H_x дат са $H_x = \overline{\mathcal{M}x}$. Најзад, нека је $\mu_x = \langle Ex, x \rangle$ одговарајућа скаларна мера.

а) Доказати да за x, $y \in H$ важи: (i) $H_x \le H_y \Leftrightarrow x \in H_y$ (тада пишемо $x \preceq y$); (ii) $H_x \le H_y$ повлачи $\mu_x \preceq \mu_y$;

б) Кажемо да су x и y спектрално ортогонални и пишемо $x \perp_T y$ ако је $H_x \perp H_y$. Доказати да постоји највише пребројива фамилија спектрално ортогоналних вектора x_j таква да је $H = \oplus_j H_{x_j}$;

в) Ако је $x \perp_T y$ онда је x, $y \preceq x + y$;

г) Доказати да постоји $x \in H$ такав да је за свако друго $y \in H$, $y \preceq x$. Доказати да је тада μ_x еквивалентна са спектралном мером, то јест $\mu_x(F) = 0$ ако и само ако $E(F) = 0$ (за такав x кажемо да је *максималног типа*;

д) Доказати да постоји највише пребројива фамилија спектрално ортогоналних вектора x_j таква да је $H = \oplus_j H_{x_j}$, затим $x_{j+1} \preceq x_j$, као и да је x_j максималног типа за рестрикцију оператора T на $(\oplus_{j=1}^{n-1} H_{x_j})^\perp$;

ђ) Ако је x_j фамилија из претходне тачке, $h_j = \mathrm{d}\mu_{x_j} / \mathrm{d}\mu_{x_{j-1}}$ и $Y_j = \{\lambda \in \sigma(T) \mid h_j(\lambda) > 0\}$. Доказати да је $T_j = T|_{H_j}$ унитарно еквивалентан са оператором M_z множења са z на простору $L^2(Y_j, \mu_{x_j})$. Доказати да је $\sigma(T_j)$ једнако есенцијалној слици идентичког пресликавања на скупу Y_j. Доказати и да је низ скупова $\sigma(T_j)$ опадајући;

е) Ако се скупови Y_j за два различита оператора T поклапају (до на скуп мере нула) показати да су такви оператори унитарно еквивалентни.

10. За тачку $\lambda \in \sigma(T)$ кажемо да има спектралну вишеструкост $m \in \mathcal{M} \cup \{\infty\}$ ако $\lambda \in \sigma(T_j) \Leftrightarrow j \leq m$. Нека је $T : L^2(-1,1) \to L^2(-1,1)$ оператор множења функцијом f, где је: (i) $f(x) = x$; (ii) $f(x) = |x|$; (iii) $f(x) = \sin(1/x)$.

а) Одредити који од ових оператора има прост спектар, а који не;

б) За сваки од ових оператора одредити разлагање у тачки д) претходног задатка, одредити скупове Y_j;

в) Одредити спектралну вишеструкост сваке тачке λ;

г) Да ли било који од ових оператора има сопствених вредности?

д) Ако је λ сопствена вредност нормалног оператора S вишеструкости m, онда је спектрална вишеструкост тачке λ већа или једнака од m - доказати. Навести пример оператора где је спектрална вишеструкост строго већа од m.

7. W^*-АЛГЕБРЕ (други део)

МАРЕЈ ФОН НОЈМАНОВА ЕКВИВАЛЕНЦИЈА

7.1. Дефиниција. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра, нека је $K \leq H$ затворен потпростор и P_K пројектор на K. Кажемо да је K *придружен* алгебри $\mathcal{M}$, у ознаци $K\eta\mathcal{M}$ ако $P_K \in \mathcal{M}$. Скуп свих потпростора придружених алгебри $\mathcal{M}$ називамо *Грасманијан* и обележавамо са $\mathrm{Gr}(\mathcal{M})$. Придруживање $\mathrm{Gr}(\mathcal{M}) \ni K \leftrightarrow P_K \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ је узајамно једнозначно и убудуће не морамо да правимо разлику између затворених потпростора и одговарајућих пројектора.

Како смо већ видели, скуп $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ образује комплетну Булову алгебру у односу на операције $\wedge$, $\vee$ и $P \mapsto I - P$. Одговарајуће операције у скупу $\mathrm{Gr}(\mathcal{M})$ су $K, L \mapsto K \cap L$, затим $K, L \mapsto K + L$ и најзад $K \mapsto K^{\perp}$. (Важно је напоменути да овде $K + L$ не означава алгебарски збир потпростгора K и L, већ затворење тог збира.)

За $P, Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ кажемо да су *еквивалентни у Мареј фон Нојмановом смислу* и пишемо $P \sim Q$, ако постоји оператор $V \in \mathcal{M}$ такав да важи

$$V^*V = P, \quad VV^* = Q. \tag{1}$$

(Узгред, вреди напоменути да само из првог услова у (1) следи да је V делимична изометрија, као и да је VV^* пројектор. Наиме за $x \in \operatorname{Im} P$ имамо $\langle Vx, Vx\rangle = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle Px, x\rangle = \langle x, x\rangle$, док за $x \perp \operatorname{Im} P$ важи $||Vx||^2 = \langle V^*Vx, x\rangle = \langle Px, x\rangle = 0$. То значи да је V делимична изометрија, то јест оператор који је на неком потпростору изометричан, а на његовом комплементу једнак нули. Посебно, одатле имамо да је $V(I - P) = 0$, одакле је $V = VP$ и тиме $(VV^*)^2 = VV^*VV^* = VPV^* = VV^*$, док је једнакост $(VV^*)^* = VV^*$ тривијална. Отуда је VV^* пројектор.)

Једноставно се проверава да је релација $\sim$ једна релација еквиваленције. Заиста узимајући $V = P$ налазимо да је $P \sim P$. Да из $P \sim Q$ излази $Q \sim P$ видимо узимајући V^* уместо V. Најзад ако је $P \sim Q$ и $Q \sim R$ онда је $P = V^*V$, $Q = VV^*$, $Q = U^*U$, $R = UU^*$ за неке $U, V \in \mathcal{M}$. Тади и $UV \in \mathcal{M}$ и имамо $(UV)^*UV = V^*U^*UV = V^*QV = V^*VV^*V = PP = P$, и $UV(UV)^* = UVV^*U^* = UQU^* = UU^*UU^* = RR = R$.

Као и у свакој Буловој алгебри, и у $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ (односно у $\mathrm{Gr}(\mathcal{M})$) постоји поредак. Јасно, тај поредак је одређен у $\mathrm{Gr}(\mathcal{M})$ обичном инклузијом, а у $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ са $P \leq Q$ ако и само ако $PQ = QP = P$. Проширићемо тај поредак на количнички скуп $\mathcal{P}(\mathcal{M})/\sim$ на следећи начин: Рећи ћемо да је $P \preccurlyeq Q$ ако и само ако постоји $P_1 \sim P$ са својством $P_1 \leq Q$, или другачије изречено, ако постоји $V \in \mathcal{M}$ такво да је $V^*V = P$ и $VV^* \leq Q$.

Није тешко проверити да је $\preccurlyeq$ рефлексивна и транзитивна релација на количнику $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Заиста, рефлексивност је тривијална, а за транзитивност, ако је $V^*V = P$, $VV^* \leq Q = U^*U$, $UU^* \leq R$, уочимо UV и имамо $(UV)^*UV = V^*U^*UV = V^*QV = V^*V = P$, и $UV(UV)^* = UVV^*U^* \leq UQU^* = UU^*UU^* \leq R$.

У случају када је $\mathcal{M} = B(H)$ пуна фон Нојманова алгебра, тада су пројектори P и Q еквивалентни ако и само ако њихови долазни потпростори имају исту димензију. У општем случају важи само један смер јер се захтева да делимична изометрија V припада $\mathcal{M}$, па се може догодити да $P(H)$ и $Q(H)$ имају исту димензију али да нису еквивалентни јер делимична изометрија која преводи $P(H)$ у $Q(H)$ не припада $\mathcal{M}$.

7.2. Став. а) Ако је $T \in \mathcal{M}$ тада $\overline{\operatorname{Im} T}$, $\overline{\operatorname{Im} T^*} \eta \mathcal{M}$ и $P_{\overline{\operatorname{Im} T}} \sim P_{\overline{\operatorname{Im} T^*}}$;

б) [идентитет Капланског] Нека су P, $Q \in \mathcal{M}$ прозвољни пројектори. Тада је $P \vee Q - Q \sim P - P \wedge Q$;

в) Ако је $P_\alpha \sim Q_\alpha$ за све индексе $\alpha \in J$, и ако је $P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$, $Q_\alpha Q_\beta = Q_\beta Q_\alpha = 0$ за све $\alpha \neq \beta$ онда је и $\oplus_\alpha P_\alpha \sim \oplus_\alpha Q_\alpha$.

Доказ. а) Ако је $T = V|T|$ поларно разлагање оператора T онда, како је познато $V \in \mathcal{M}$ и $V^*V = P_{\overline{\operatorname{Im} T^*}}$ и $VV^* = P_{\overline{\operatorname{Im} T}}$ одакле следи закључак;

б) Посматрајмо оператор $T = (I - P)Q$. Важи $\ker T = \ker Q \oplus (\operatorname{Im} Q \cap \operatorname{Im} P)$. Заиста, ако x припада десној страни претходне једнакости, онда је $x = x_1 + x_2$, при чему $Qx_1 = 0$ и $x_2 = Qy$, $Px_2 = x_2$. Тада је $(I - P)Qx_1 = 0$ и $(I - P)Qx_2 = (I - P)Qy = (I - P)x_2$, па важи да је десна страна подскуп леве. Ако $x \in \ker T$ разложимо га као $x = (I - Q)x + Qx$. Како је $T(I - Q) \equiv 0$, то из $Tx = 0$ следи $TQx = 0$ то јест $(I - P)Qx = 0$, односно $Qx = PQx$, па $Qx \in \operatorname{Im} P$. Тако је лева страна подскуп десне.

Према претходној тачки важи $P_{(\ker T)^\perp} \sim P_{(\ker T^*)^\perp}$. Остаје још да израчунамо

$$(\ker T)^\perp = (\ker Q \oplus (\operatorname{Im} Q \cap \operatorname{Im} P))^\perp = \operatorname{Im} Q \cap (\operatorname{Im} Q \cap \operatorname{Im} P)^\perp = \operatorname{Im} Q \cap (\operatorname{Im}(Q \wedge P))^\perp = \operatorname{Im}(Q - Q \wedge P).$$

Како је $T^* = Q(I - P) = (I - (I - Q))(I - P)$ то заменом P са $I - Q$ и Q са $I - P$ добијамо

$$(\ker T^*)^\perp = \operatorname{Im}(I - P - (I - P) \wedge (I - Q)) = \operatorname{Im}(I - P - (I - P \vee Q)) = \operatorname{Im}(P \vee Q - P),$$

према де Моргановим обрасцима;

в) Ако је V_α делимична изометрија која преводи $\operatorname{Im} P_\alpha$ у $\operatorname{Im} Q_\alpha$, онда је $V = \sum_\alpha V_\alpha$ делимична изометрија која преводи $\oplus_\alpha \operatorname{Im} P_\alpha$ у $\oplus_\alpha \operatorname{Im} Q_\alpha$. $\square$

7.3. Став. Релација $\preccurlyeq$ је антисиметрична на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, и тиме наравно релација поретка.

Доказ. У суштини, овај доказ се не разликује битно од доказа Кантор-Бернштајнове теореме о кардиналним бројевима. И више, разлика је само у запису. Дакле, нека је $P \sim Q_1 \leq Q$ и $Q \sim P_1 \leq P$. Нека је V делимична изометрија која пребацује $\operatorname{Im} P$ у $\operatorname{Im} Q_1$, и U делимична изометрија која преводи Q у P_1, односно $V^*V = P$, $VV^* = Q_1$ и $U^*U = Q$, $UU^* = P_1$. Како је долазни простор делимичне изометрије V садржан у полазном простору делимичне изометрије U, то је и композиција $W = UV$ такође делимична изометрија. При томе је $W^*W = V^*U^*UV = V^*QV = V^*V = P$, јер $\operatorname{Im} V = \operatorname{Im} Q_1 \subseteq \operatorname{Im} Q$. Дефинишемо сада опадајући низ потпростора са $K = \operatorname{Im} P$, $K_1 = \operatorname{Im} P_1$ и $K_{n+2} = W(K_n)$, и одговарајући низ пројектора $P_n = P_{K_n}$. Усвојимо такође ознаке $P_0 = P$, $K_0 = K$.

Показаћемо да је $K_n \eta \mathcal{M}$, односно $P_n \in \mathcal{M}$ као и да је $P_{n-1} - P_n \sim P_{n+1} - P_{n+2}$. За почетак је

$$\begin{gathered} (WPP_n)^*WP_n = P_nW^*WP_n = P_nPP_n = P_n \\ WP_n(WP_n)^* = WP_nP_nW^* = P_{n+2}, \end{gathered} \tag{2}$$

јер је $WP_n(K_n) = W(K_n) = K_{n+2}$, односно WP_n изометрично пресликава K_n на K_{n+2}. Отуда, ако $P_n \in \mathcal{M}$ онда $P_{n+2} \in \mathcal{M}$, а како P_0, $P_1 \in \mathcal{M}$ то је први део наше тврдње доказан. Што се тиче друге, показаћемо да је $W(P_n - P_{n-1})$ делимична изометрија којом се остварује $P_{n-1} - P_n \sim P_{n+1} - P_{n+2}$. На основу (2) имамо

$$(W(P_{n-1} - P_n))^*W(P_{n-1} - P_n) = (P_{n-1} - P_n)W^*W(P_{n-1} - P_n) = (P_{n-1} - P_n)P(P_{n-1} - P_n) = P_{n-1} - P_n$$

а такође и

$$W(P_{n-1} - P_n)(W(P_{n-1} - P_n))^* = W(P_{n-1} - P_n)W = WP_{n-1}W^* - WP_nW^* = P_{n+1} - P_{n+2}.$$

Сада лако завршавамо доказ. Ако означимо $P_\infty = \bigwedge_{n\geq 0} P_n$, онда због $P_{2k} - P_{2k+2} \sim P_{2k+2} - P_{2k+4}$ имамо

$$P = \left(\bigoplus_{n=0}^{+\infty}(P_n - P_{n+1})\right) \oplus P_\infty = \left(\bigoplus_{k=0}^{+\infty}(P_{2k} - P_{2k+2})\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=0}^{+\infty}(P_{2k-1} - P_{2k+1})\right) \oplus P_\infty \sim$$
$$\left(\bigoplus_{k=1}^{+\infty}(P_{2k} - P_{2k+2})\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=0}^{+\infty}(P_{2k-1} - P_{2k+1})\right) \oplus P_\infty = \left(\bigoplus_{n=1}^{+\infty}(P_n - P_{n+1})\right) \oplus P_\infty = P_1 \sim Q$$

□

ПРОЈЕКТОРИ НА ФАКТОРИМА

Подразумева се да је у оквиру ове целине $\mathcal{M}$ увек фактор.

У општем случају $\preccurlyeq$ је релација делимичног поретка на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Међутим у посебном случају када је $\mathcal{M}$ фактор може се доказати да је $\preccurlyeq$ тада релација линеарног поретка. У ту сврху потребна нам је једна техничка лема.

7.4. Основна лема о факторима. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фактор, и нека $A \in \mathcal{M}$, $A' \in \mathcal{M}'$. (Подсетимо се да је $\mathcal{M}'$ ознака за комутант.) Тада из $AA' = 0$ излази $A = 0$ или $A' = 0$.

Доказ. Посматрајмо векторски потпростор $L = \{x \in H \mid \forall B \in \mathcal{M},\ ABx = 0\}$ и P пројектор на $\overline{L}$. Показаћемо да P припада центру алгебре $\mathcal{M}$.

Нека је $x \in L$ и $C \in \mathcal{M}$. Тада за свако $B \in \mathcal{M}$ и $BC \in \mathcal{M}$, па је $ABCx = 0$. Отуда је L инваријантан за $\mathcal{M}$, а тиме и $\overline{L}$, па $P \in \mathcal{M}'$. Нека је, сада $C' \in \mathcal{M}'$. Тада је за све $B \in \mathcal{M}$, $ABC' = C'AB$, па је $ABC'x = C'ABx = 0$, одакле, аналогно претходном, закључујемо да $P \in \mathcal{M}$. Како је $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbf{C}I$, то је или $P = 0$, или $P = I$.

У првом случају је $L = \{0\}$. За произвољно $x \in H$, $A'x \in L$, јер за све $B \in \mathcal{M}$ имамо $ABA'x = AA'Bx = 0$, па је отуда $A' = 0$.

У другом случају је L густ у H. Међутим, због $I \in \mathcal{M}$, за све $x \in L$ имамо $Ax = AIx = 0$, па је $A = 0$ (прво на L, а због ограничености и на његовом затворењу H). □

7.5. Став. Ако је $\mathcal{M}$ фактор, онда је релација $\preccurlyeq$ на количничком скупу $\mathcal{P}(\mathcal{M})/\sim$ релација линеарног поретка. Другим речима, за свака два пројектора P, $Q \in \mathcal{M}$ је или $P \preccurlyeq Q$ или $Q \preccurlyeq P$. Тврдња, наравно не мора бити тачна ако $\mathcal{M}$ није фактор.

Доказ. Нека су P и $Q \in \mathcal{M}$ произвољни пројектори. Ако је бар један од та два пројектора 0 тврђење је тривијално. Ако оба нису нула, онда ћемо за почетак доказати да постоје међусобно еквивалентни $P_0 \leq P$ и $Q_0 \leq Q$.

За произвољно $0 \neq x \in \operatorname{Im} Q$, посматрајмо простор $L = \mathcal{M}x = \{Tx \mid T \in \mathcal{M}\}$. Тај простор је (видели смо то више пута) инваријантан за $\mathcal{M}$. Стога пројектор $P_{\bar{L}}$ на његово затворење припада комутанту $\mathcal{M}'$. Очигледно $0 \neq x \in L$, па $P_{\bar{L}} \neq 0$. На основу основне леме налазимо $PP_{\bar{L}} = P_{\bar{L}}P \neq 0$. Слика $\operatorname{Im}(PP_{\bar{L}})$ садржана је у $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} P_{\bar{L}}$, те је последњи потпростор нетривијалан.

Одаберимо $y \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} P_{\bar{L}}$, $||y|| = 1$. Како је $\operatorname{Im} P_{\bar{L}} = \bar{L}$, налазимо да постоји $T \in \mathcal{M}$ такво да је $||y - Tx|| < 1$. Како је $x \in \operatorname{Im} Q$, то јест $Qx = x$, и $y \in \operatorname{Im} P$, то јест $Py = y$, то имамо $||y - PTQx|| = ||Py - PTx|| \leq ||P||\,||y - Tx|| \leq ||y - Tx|| < 1$. Одатле би $PTQx = 0$ имало за последицу $||y|| < 1$, што је немогуће, па $PTQ \neq 0$.

Нека је $S = V|S|$ поларно разлагање оператора $S = PTQ$. Делимична изометрија V припада $\mathcal{M}$ и она преводи потпростор $\overline{\operatorname{Im} S^*}$ у $\overline{\operatorname{Im} S}$. Означимо пројекторе на та два простора са Q_0 и P_0 редом. Они су нетривијални, јер $S \neq 0$. Из $Q_0 = V^*V$, $P_0 = VV^*$ налазимо да P_0, $Q_0 \in \mathcal{M}$ и $P_0 \sim Q_0$. Најзад из $S = PTQ$ видимо да је $\operatorname{Im} S \subseteq \operatorname{Im} P$, одакле је $P_0 \leq P$, и слично, из $S^* = QT^*P$ налазимо $\operatorname{Im} S^* \subseteq \operatorname{Im} Q$, па је $Q_0 \leq Q$.

Сада једноставно завршавамо доказ применом Цорнове леме. Уочимо фамилију $\mathcal{F}$ свих парова (P_α, Q_α) са својством $P \geq P_\alpha \sim Q_\alpha \leq Q$, и уређењем $(P_\alpha, Q_\alpha) \leq (P_\beta, Q_\beta)$ ако и само ако је $P_\alpha \leq P_\beta$ и $Q_\alpha \leq Q_\beta$. У овој фамилији сваки ланац (P_α, Q_α) има горње ограничење $(\vee P_\alpha, \vee Q_\alpha)$, па постоји максималан елемент. Означимо га рецимо са (P_0, Q_0) Ако је $P = P_0$ или $Q = Q_0$ доказ је завршен.

Уколико није, онда можемо применити први корак на операторе $P - P_0$ и $Q - Q_0$ и закључити да постоје нетривијални $P_1 \leq P - P_0$ и $Q_1 \leq Q - Q_0$ такви да је $P_1 \sim Q_1$. Међутим, тада пар $(P_0 + P_1, Q_0 + Q_1) \in \mathcal{F}$ и строго је већи од пара (P_0, Q_0) што се противи његовој максималности. $\square$

7.6. Став [о целобројном дељењу]. а) Нека P, $Q \in \mathcal{M}$. Тада постоји међусобно ортоганалан фамилија $P_\alpha \leq P$ и $R \in \mathcal{M}$ са својством

$$P = (\oplus_{\alpha\in J} P_\alpha) \oplus R, \qquad P_\alpha \sim Q \text{ за све } \alpha, R \precnsim Q. \tag{3}$$

б) Ако је скуп индекса J бескначан, може се у (3) узети да је $R = 0$;

Кардинални број скупа J означавамо са $\left[\dfrac{P}{Q}\right]$, а нешто касније ћемо доказати да не зависи од представљања (3);

в) Важе неједнакости

$$\left[\frac{P}{Q}\right]\left[\frac{Q}{R}\right] \leq \left[\frac{P}{R}\right] \leq \left(\left[\frac{P}{Q}\right]+1\right)\left(\left[\frac{Q}{R}\right]+1\right). \tag{4}$$

$$\left[\frac{P}{R}\right] + \left[\frac{Q}{R}\right] \leq \left[\frac{P\oplus Q}{R}\right] \leq \left[\frac{P}{R}\right] + \left[\frac{Q}{R}\right] + 1 \qquad P \leq Q \Rightarrow \left[\frac{P}{R}\right] \leq \left[\frac{Q}{R}\right]. \tag{5}$$

Доказ. а) Ако је $P \precnsim Q$ можемо узети празну фамилију ($J = \emptyset$) и $R = P$. Ако је $P \sim Q$ онда узимамо једночлану фамилију $J = \{1\}$, $P_1 = P$ и $R = 0$. У нетривијалном случају $Q \precnsim P$, постоји $P_0 \leq P$, $P_0 \sim Q$, и тада $P = P_0 + (P - P_0)$. Ако је $P - P_0 \precnsim Q$ доказ је завршен. У супротном примењујемо већ описани поступак на $P - P_0$ уз примену Цорнове леме. Формално, посматрамо скуп $\mathcal{F}$ свих фамилија $(P_\alpha)_\alpha$ међусобно ортогоналних пројектора за које важи $\oplus_\alpha P_\alpha \leq P$, $P_\alpha \sim Q$, уређених инклузијом. Сваки ланац има горње ограничење, па постоји максимална фамилија са наведеним својством. Претпоставка $P - \oplus_\alpha P_\alpha \succcurlyeq Q$ доводи до постојања још једног сабирка $P_0 \sim Q$, $P_0 \leq P - \oplus P_\alpha P_\alpha$ супротно максималности фамилије. Отуда $R = P - \oplus_\alpha P_\alpha \precnsim Q$;

б) Заиста, ако је J бесконачан, онда су скупови J и $J' = J \setminus \{j_0\}$ исте кардиналности и важи $\oplus_{\alpha\in J} P_\alpha \sim \oplus_{\alpha\in J'} P_\alpha$, па имамо

$$P = (\oplus_{\alpha\in J} P_\alpha) \oplus R \sim (\oplus_{\alpha\in J'} P_\alpha) \oplus R \preccurlyeq (\oplus_{\alpha\in J'} P_\alpha) \oplus Q \sim \oplus_{\alpha\in J} P_\alpha \preccurlyeq (\oplus_{\alpha\in J} P_\alpha) \oplus R = P,$$

па на основу антисиметричности релације $\preccurlyeq$ налазимо $P \sim \oplus_{\alpha\in J} P_\alpha$. Ако делимична изометрија V остварује претходну релацију, и ако означимо $V^* P_\alpha V$ са P'_α биће $P = \oplus_{\alpha\in J} P'_\alpha$;

в) Нека је $P = (\oplus_{\alpha\in J} P_\alpha) \oplus S$ и $Q = (\oplus_{\beta\in K} Q_\beta) \oplus T$, где је $P_\alpha \sim Q$, $S \precnsim Q$, $Q_\beta \sim R$, $T \precnsim R$. Ако је V_α делимична изометрија која преводи Q у P_α, онда је $W_{a,\beta} = V_\alpha Q_\beta$ делимична изометрија која преводи Q_β у неки пројектор $P'_{\alpha,\beta} \leq P_\alpha$ еквивалентан са R, па је

$$P = (\oplus_{\alpha\in J} P_\alpha) \oplus S = \oplus_{\alpha\in J}(\oplus_{\beta\in K} P'_{\alpha,\beta} \oplus T_\alpha) \oplus S = (\oplus_{\alpha,\beta\in J\times K} P'_{\alpha,\beta}) \oplus (\oplus_{\alpha\in J} T_\alpha) \oplus S,$$

одакле следи прва неједнакост. Неједнакост ће бити строга ако је $(\oplus_{\alpha\in J} T_\alpha) \oplus S \succcurlyeq R$.

Формуле (5) су једноставне. $\square$

7.7. Бесконачни пројектори. Пројектор $P \in \mathcal{M}$ називамо *бесконачним* ако постоји $P_1 \lneqq P$ такав да је $P \sim P_1$, односно ако је еквивалентан свом правом потпројектору. У супротном, кажемо да је P *коначан*.

Следе једноставна правила са бесконачним пројекторима:

• Ако је P бесконачан, онда се P може приказати као

$$P = \oplus_{\alpha\in J} P_\alpha, \tag{6}$$

при чему је $P_\alpha \sim P_\beta$ и скуп индекса J бесконачан (да ли пребројив или непребројив небитно).

Заиста, нека је V делимична изометрија таква да је $V^*V = P$ и $VV^* = P_1 \lneqq P$. Дефинишимо низ Q_n са $Q_1 = P - P_1$ и $Q_{n+1} = VQ_nV^*$. Како је $\operatorname{Im} V = \operatorname{Im} P_1 \subseteq \operatorname{Im} P$ и $(\ker V)^\perp = \operatorname{Im} P$, имамо $VP = V$, $PV^* = V^*$, $PV = P_1V = V$ и $V^*P = V^*P_1 = V^*$. Одатле је $Q_nP = VQ_nV^*P = Q_n$ и $PQ_n = PVQ_nV^* = P$, па је увек $Q_n \leq P$. Такође из $V^*Q_1 = V^*P - V^*P_1 = 0$, односно $Q_1V = PV - P_1V = 0$, за $n < m$ имамо

$$Q_mQ_n = V^{m-1}Q_1(V^*)^{m-n}Q_1(V^*)^{n-1} = 0 \qquad Q_nQ_m = V^{n-1}Q_1V^{m-n}Q_1(V^*)^{m-1} = 0,$$

па је $Q_m \perp Q_n$. Нека је $Q_\infty = \wedge_{n\geq 1} Q_n$. Тада је

$$P = (\oplus_{n=1}^{\infty} Q_n) \oplus Q_\infty$$

па резултат следи ако целобројно поделимо Q_∞ са Q_1.

• Ако је P бесконачан, онда постоји $R \leq P$ такав да је $P \sim R \sim P - R$.

Ово непосредно следује из (6), јер се сваки скуп бесконачне кардиналности може разложити на дисјунктну унију два скупа исте кардиналности као и полазни.

• Ако је P бесконачан и $Q \succcurlyeq P$, онда је и Q бесконачан. Посебно, или је I бесконачан или су сви пројектори коначни. Још једна последица је да из $P \sim Q$ и P бесконачан следи да је и Q бесконачан.

Заиста, нека је $P \sim Q_1 \preccurlyeq Q$. Тада је наравно и Q_1 бесконачан, односно $Q_1 \sim Q_2 \lneqq Q_1$. Но тада је и $Q = Q_1 \oplus (Q - Q_1) \sim Q_2 \oplus (Q - Q_1)$ и очигледно $Q_2 \oplus (Q - Q_1) \lneqq Q$.

7.8. Став. Нека су P и Q коначни пројектори. Тада је коначан и пројектор $P \vee Q$. Наравно одавде одмах следи да је супремум коначне фамилије коначних пројектора такође коначан.

Доказ. Доказ ћемо извести у случају када је $P \vee Q = I$. То је довољно, јер у супротном, можемо прећи на фон Нојманову алгебру $R\mathcal{M}R$ (која је реализована на Хилбертовом простору RH), где је $R = P \vee Q$. Претпоставићемо (за сада) и да је $P \perp Q$, то јест $P \vee Q = P \oplus Q = I$.

Претпоставимо супротно. Тада постоји пројектор R такав да је $I \sim R \sim I - R$. Упоредимо пројекторе $P \wedge R$ и $Q \wedge (I - R)$. Како је $\mathcal{M}$ фактор један од њих је мањи, а други већи.

1° случај. Нека је $P \wedge R \preccurlyeq Q \wedge (I - R)$. На основу формуле Капланског имамо

$$R = (R - R \wedge P) \oplus R \wedge P \sim (R \vee P - P) \oplus R \wedge P \preccurlyeq (R \vee P - P) \oplus Q \wedge (I - R).$$

За који тренутак објаснићемо зашто у последњем изразу имамо право да напишемо $\oplus$. На основу де Моргановых правила други сабирак је $Q \wedge (I - R) = (I - P) \wedge (I - R) = I - P \vee R$. Отуда је други сабирак ортогоналан на $P \vee R$, док је први мањи од $P \vee R$. Осим тога одатле је

$$R \preccurlyeq (R \vee P - P) \oplus (I - P \vee R) = I - P = Q,$$

што је контрадикција, јер би онда и Q морао бити бесконачан ($Q \succcurlyeq R \sim I$).

1° случај. Нека је $Q \wedge (I - R) \preccurlyeq P \wedge R$. Ако означимо $R_1 = I - R$, $P_1 = Q$, $Q_1 = P$, онда је последња релација записана као $P_1 \wedge R_1 \preccurlyeq Q_1 \wedge (I - R_1)$, односно свели смо на први случај.

Ослободимо се још претпоставке $P \perp Q$. Према формули Капланског имамо $P \vee Q - P \sim Q - P \wedge Q \leq Q$. Нека је $Q_1 = P \vee Q - P$. Тада је $Q_1 \leq Q$ коначно, али и $P \vee Q = P \oplus Q_1$. □

7.9. Последице. а) Нека је Q коначан. Тада је P бесконачан ако и само ако је $[P/Q]$ бесконачан;
б) Ако је Хилбертов простор H сепарабилан и $P, Q \in \mathcal{M} \subseteq B(H)$ бесконачни, онда је $P \sim Q$.

Доказ. а) Ако је $J = [P/Q]$ бесконачан, онда су J и $J' = J \setminus \{j_0\}$ исте каридналности, па је $P = \oplus_{j\in J} Q_\alpha \sim \oplus_{j\in J'} Q_\alpha \lneqq P$. Ако је $J = [P/Q]$ коначан, онда је $P = \oplus_{j=1}^{n} P_j + R \preccurlyeq \oplus_{j=1}^{n} P_j + Q$, што је коначна сума коначних;

б) Нека је, на пример $Q \preccurlyeq P$. Тада је $P = \oplus_{k\in K} P_k + R$, где је $P_k \sim Q$ и $R \not\succsim Q$, при чему је скуп K непразан и највише пребројив (због претпоставке о сепарабилности). Како је Q бесконачан, то је $Q = \oplus_{j\in J} Q_j$, где је $Q_j \sim Q_0$ и J пребројив. Како је $P_k \sim Q$, то се он може приказати као $P_k = \oplus_{j\in J} P_{k,j}$, $P_{k,j} \sim Q_0$. Тако је

$$P = \oplus_{j\in J, k\in K} P_{k,j} + R.$$

Како је скуп $J \times K$ пребројив, може се сматрати да је $R = 0$ и отуда $P \sim Q$. □

КЛАСИФИКАЦИЈА ФАКТОРА

Током овог одељка сматрамо да је H сепарабилан Хилбертов простор и да је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фактор.

7.10. Дефиниција. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фактор.
а) Кажемо да је $\mathcal{M}$ фактор типа I, ако у њему постоји минималан нетривијалан ($\neq 0$) пројектор;
б) Кажемо да је $\mathcal{M}$ фактор типа II, ако у њему постоје коначни пројектори, али нема минималног;
в) Кажемо да је $\mathcal{M}$ фактор типа III, ако у њему не постоје коначни пројектори.

У случају фактора типа III, уређен скуп $\mathcal{P}(\mathcal{M})/\sim$ је двочлан и еквивалентан је (до на растуће рпесликавање) са скупом $\{0,\infty\}$. Наиме, чим $0 \neq P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ одмах је P бесконачан, а сви су они еквивалентни.

Историјска напомена: Марej и фон Нојман који су развили ову теорију од 1936 до 1941 нити су располагали примером фактора типа III нити су могли да докажу да их нема. Први пример фактора типа III конструисао је Пауерс тек 1967, затим су Араки и Вудс 1969 развили поступак који омогућава конструкцију врло широке класе фактора. Кон је током седамдесетих доста учинио на класификацији фактора типа III, којих миа непребројиво много неизоморфних.

7.11. Фактори типа I. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фактор типа I и нека је $P_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ минимални пројектор. Сваки други пројектор се може поделити без остатка са P_0. Заиста из $P = \oplus_{j\in J} P_j + R$, $P_j \sim P_0$, $R \not\succsim P_0$ следује $R = 0$ јер је P_0 минималан. Даље, ако је $P = \oplus_{j\in J} P_j$ и $P' = \oplus_{j\in J'} P_j'$, $P_j \sim P_j' \sim P_0$ следује да је $P \sim P'$ ако и само ако су J и J' исте кардиналности, односно ако је $[P/P_0] = [P'/P_0]$, и наравно, $P \preccurlyeq P'$ ако и само ако је J мање или једнаке кардиналности од J'. Како радимо на сепарабилном Хибетровом простору скуп $[I/P_0]$ је највише пребројив. Отуда је у случају фактора типа I, уређен скуп $\mathcal{P}(\mathcal{M})/\sim$ или еквивалентан са $\mathbf{N}$ (у случају када је I бесоначан) или еквивалентан са $\{0,1,2,\dots,n\}$ за неко $n \in \mathbf{N}$ (у случају када је I коначан). У првом случају кажемо да је тада $\mathcal{M}$ фактор типа I_∞, а у другом да је $\mathcal{M}$ фактор типа I_n.

За дато $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, број $[P/P_0]$ зваћемо *уопштена димензија* или само *димензија* пројектора P, и означаваћемо са $D(P)$. Јасно, скуп вредности функције D је скуп $\{0,1,2,\dots,\omega\}$, $\omega \in \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ ако је $\mathcal{M}$ фактор типа I_ω. Није тешко проверити да функција димензије D има следећа својства:

(i) $D(P) \in [0, D(I)] \subseteq [0,+\infty]$, $D(P) = 0$ ако и само ако је $P = 0$, $D(P) = +\infty$ ако и само ако је P бесконачан;

(ii) $D(P) = D(Q)$ ако и само ако је $P \sim Q$;

(iii) $D(P) \leq D(Q)$ ако и само ако је $P \preccurlyeq Q$;

(iv) Ако је $P_i \perp P_j$ онда је $D(\sum_{j=1}^{+\infty} P_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} D(P_j)$, односно функција D је потпуно адитивна.

Код фактора типа I кардиналност скупа $[I/P_0]$ потпуно одређује фактор. Наиме важи следећа тврдња:

7.12. Став. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фактор типа I_ω, $\omega \in \mathbf{N}\cup\{\infty\}$. Тада је H унитарно еквивалентан са $K_1 \otimes K_2$, $\dim K_2 = \omega$, и $\mathcal{M} \cong I \otimes B(K_2)$. Другим речима $B(K)$ је једини пример фактора типа I.

Доказ. Нека је P_0 минималан пројектор у $\mathcal{M}$, и нека је $I = \oplus_{j=1}^{\omega} P_j$, $P_j \sim P_0$ разлагање јединице. Нека је $A \in \mathcal{M}$ и $A = [A_{ij}]_{i,j=1}^{\omega}$ њена матрица у односу на разлгање простора $H = \oplus_{j=1}^{\omega} P_j(H)$, односно прецизније, нека је $A_{ij} = P_i A P_j$. Лако се види да је $A_{ij} = \lambda_{ij} V_{ij}$ где је $V_{ij} : P_j(H) \to P_i(H)$ делимична изометрија путем које је $P_i \sim P_j$. Заиста, у супротном би спектар оператора $V_{ij}^* A_{ij}$ садржавао бар две тачке, те би се нашао нетривијалан пројектор $\lneqq P_j$ што је немогуће. (Ово за $A = A^*$ што је довољно, јер је $\mathcal{M}$ генерисана самоадјунгованим.) Другим речима $A = [\lambda_{ij}]_{i,j=1}^{\infty}$, односно $A = I \otimes A_2$, где је $A_2 \in B(K_2)$ произвољан и K_2 Хилбертов простор са (формалном) базом P_j. $\square$

7.13. Фактори типа II. И у овом случају ћемо дефнисати функцију димензије као релативни однос два пројектора. За почетак конструисаћемо низ коначних пројектора $R_1 \geq R_2 \geq \dots$ са својством $[R_n/R_{n+1}] \geq 2$. Такав низ називамо *инфимитезималним низом.*

За егзистенцију таквог низа довољно је доказати да за сваки коначан P постоји $R \leq P$ са својством $[P/R] \geq 2$, јер полазећи од било ког коначног R_1 индукцијом налазимо R_2, па онда R_3 итд. У реду, ако је P коначан, онда постоји $0 \lneqq R \lneqq P$, јер у фактору типа II не постоје минимални пројектори. Претпоставимо, рецимо, да је $R \preccurlyeq P - R$. Ослањајући се на (5) налазимо

$$\left[\frac{P}{R}\right] = \left[\frac{R + (P-R)}{R}\right] \geq \left[\frac{R}{R}\right] + \left[\frac{P-R}{R}\right] \geq 1 + \left[\frac{R}{R}\right] = 2.$$

А, ако је обратно $P - R \preccurlyeq R$, онда заменимо улоге пројекторима R и $P - R$.

7.14. Став. Нека је R_n инфитиземални низ.

а) За произвољан коначан пројектор P важи $[P/R_n] \to +\infty$;

б) За било која два коначна пројектора постоји коначан лимес

$$\frac{P}{Q} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]}{\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]}. \tag{7}$$

Ако је P бесконачан, а Q коначан, онда је лимес у (7) једнак $+\infty$. Ако је обратно P коначан, а Q бесконачан, онда је лимес у (7) једнак нули;

в) Важе следеће релације:

$$\left[\frac{P}{Q}\right] \le \frac{P}{Q} \le \left[\frac{P}{Q}\right] + 1, \qquad \frac{P}{Q}\frac{Q}{R} = \frac{P}{R}, \qquad \frac{P\oplus Q}{R} = \frac{P}{R} + \frac{Q}{R};$$

г) Лимес у (7) не зависи од избора инфитиземалног низа.

Доказ. а) Следи из

$$\left[\frac{P}{R_n}\right] \ge \left[\frac{P}{R_1}\right]\left[\frac{R_1}{R_2}\right]\dots\left[\frac{R_{n-1}}{R_n}\right] \ge 2^{n-1}\left[\frac{P}{R_1}\right];$$

б) За произвољне m и n имамо

$$\frac{\left[\dfrac{P}{R_{m+n}}\right]}{\left[\dfrac{Q}{R_{m+n}}\right]} \le \frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]+1}{\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]}\frac{\left[\dfrac{R_n}{R_{m+n}}\right]+1}{\left[\dfrac{R_n}{R_{m+n}}\right]} \le \frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]+1}{\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]}\left(1+\frac{1}{2^m}\right),$$

па пролазом горњим лимесом кад $m\to+\infty$ налазимо

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]}{\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]} \le \frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]+1}{\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]},$$

одакле је тај лимес коначан. Још једним проласком, сада доњим лимесом кад $n\to+\infty$, имајући у виду $[Q/R_n]\to+\infty$ добијамо тражено.

Ако је P бесконачан, а Q коначан, онда је за све n, $[P/R_n] = +\infty$, $[Q/R_n] < +\infty$ одакле је $P/Q = +\infty$ и слично ако је P коначан, а Q бесконачан;

в) На основу (4) и (5) имамо

$$\frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]}{\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]+1} - 1 \le \left[\frac{P}{Q}\right] \le \frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]}{\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]}, \qquad \frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]}{\left[\dfrac{R}{R_n}\right]} = \frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]}{\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]}\frac{\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]}{\left[\dfrac{R}{R_n}\right]},$$

$$\frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]+\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]}{\left[\dfrac{R}{R_n}\right]} \le \frac{\left[\dfrac{P\oplus Q}{R_n}\right]}{\left[\dfrac{R}{R_n}\right]} \le \frac{\left[\dfrac{P}{R_n}\right]+\left[\dfrac{Q}{R_n}\right]+1}{\left[\dfrac{R}{R_n}\right]}$$

одакле лимесом добијамо резултат;

г) Ако је R_n' неки други инфитиземални низ, онда је према претходном $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{P/R_n'}{Q/R_n'}$, као и

$$\frac{\left[\dfrac{P}{R_n'}\right]}{\left[\dfrac{Q}{R_n'}\right]+1} \le \frac{\dfrac{P}{R_n'}}{\dfrac{Q}{R_n'}} \le \frac{\left[\dfrac{P}{R_n'}\right]+1}{\left[\dfrac{Q}{R_n'}\right]}.$$

□

7.15. Став [функција димензије]. Нека је $\mathcal{M}$ фактор типа II и $P_0 \in \mathcal{M}$ фиксирани пројектор. Функција $D : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to [0, +\infty]$ дата са $D(P) = P/P_0$ (функција димензије) има следећа својства:

(i) $D(P) = 0$ ако и само ако је $P = 0$, $D(P) = +\infty$ ако и само ако је P бесконачан;

(ii) $D(P) = D(Q)$ ако и само ако је $P \sim Q$;

(iii) $D(P) \leq D(Q)$ ако и само ако је $P \preccurlyeq Q$;

(iv) Ако је $P_i \perp P_j$ онда је $D(\sum_{j=1}^{+\infty} P_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} D(P_j)$, односно функција D је потпуно адитивна.

Доказ. (i) Већ смо доказали да је P/P_0 коначан број ако и само ако је P коначан, што доказује другу тврдњу. Обратно, ако је P коначан и $\neq 0$ онда је P_0/P коначан број, а тиме $P/P_0 > 0$ као његова реципрочна вредност. Обратно, ако је $P = 0$ онда је тривијално $P/P_0 = 0$;

(ii) и (iii) Најпре, ако је $P \sim Q$, онда је за све n $[P/R_n] = [Q/R_n]$, одакле је $P/P_0 = Q/P_0$ што доказује обратан смер у (ii). Ако је $P \preccurlyeq Q$, онда је $[P/R_n] \leq [Q/R_n]$, одакле је $P/P_0 \leq Q/P_0$ па је и у (iii) доказан обратан смер.

Нека је сада $P \precnsim Q$. Тада је $P \sim P_1$ и $P_1 \oplus Q_2 = Q$. Према тачки в) претходног става, имамо $D(P_1) + D(Q_2) = D(Q)$. Тако је $D(P) = D(Q)$ ако и само ако је $D(Q_2) = 0$ а то се дешава једино ако је $Q_2 = 0$ што је контрадикција. Тако је доказан и директан смер у (ii). Одатле тривијално следује и директан смер у (iii);

(iv) Током доказа претходних тачака (ii) и (iii) већ смо извели ову формулу за два сабирка, одакле индукцијом лако закључујемо да она важи и за све природне бројеве n, то јест имамо коначну адитивност. Докажимо и пребројиву. Како је увек $\sum_1^n P_j \preccurlyeq \sum_1^\infty P_j$ и D коначно адитивна, налазимо да је $\sum_1^n D(P_j) \leq D(\sum_1^\infty P_j)$, па преласком на лимес

$$\sum_{j=1}^{+\infty} D(P_j) \leq D\left(\sum_{j=1}^{+\infty} P_j\right).$$

Претпоставимо да важи строга неједнакост. Тада ред на левој страни конвергира и посебно $D(P_j) \to 0$. Дакле постоји неко фиксирано k са својством

$$D(P_k) < \eta = D\left(\sum_{j=1}^{+\infty} P_j\right) - \sum_{j=1}^{+\infty} D(P_j).$$

Због коначне адитивности, тада је и за све m

$$D(P_k) < D\left(\sum_{j=m}^{+\infty} P_j\right) - \sum_{j=m}^{+\infty} D(P_j) < D\left(\sum_{j=m}^{+\infty} P_j\right). \tag{8}$$

С друге стране због конвергенције реда, постоји l такво да је

$$\sum_{j=l}^{+\infty} D(P_j) < D(P_k), \qquad \text{и посебно} \qquad D(P_l) < D(P_k). \tag{9}$$

Тада је $P_l \preccurlyeq P_k$, па постоји $Q_l \leq P_k$ такво да је $P_l \sim Q_l$. Тако је $D(P_k) = D(Q_l) + D(P_k - Q_l) = D(P_l) + D(P_k - Q_l)$, па после скраћивања налазимо

$$\sum_{j=l+1}^{+\infty} D(P_j) < D(P_k - Q_l).$$

Настављајући у истом маниру налазимо низ пројектора Q_n, $n \geq l$ таквих да је $\oplus_{n=l}^{\infty} Q_n \leq P_k$ и

$$\sum_{j=l+p}^{+\infty} D(P_j) < D(P_k - Q_l - \cdots - Q_{l+p}).$$

Међутим, тада је и $\oplus_{n=l}^{+\infty} P_n \sim \oplus_{n=l}^{+\infty} Q_n \leq P_k$, односно $D(\oplus_{n=l}^{+\infty} P_n) \leq D(P_k)$, што је у контрадикцији са (8). $\square$

7.16. Став [скуп вредности функције D]. Нека је $\mathcal{M}$ фактор типа II на сепарабилном Хилбертовом простору H. Тада је скуп вредности функције D једнак интервалу $[0, D(I)]$.

Доказ. Означимо тај скуп вредности са S. Редом изводимо својства скупа S.

(i) Скуп S садржи нулу и $D(I)$ и не садржи негативне вредност - тривијално.

(ii) Заједно са α и β, скуп S садржи и $\alpha - \beta$ (наравно ако је $\alpha > \beta$). Заиста, ако је $D(P) = \alpha > \beta = D(Q)$, онда је $Q \preccurlyeq P$, па је $D(Q - P_1) = \alpha - \beta$, ако је $Q \geq P_1 \sim P$.

(iii) Ако S садржи бројеве α_k, α и $\sum_1^\infty \alpha_k \leq \alpha$ онда и $\sum_1^\infty \alpha_k \in S$. Заиста, тада постоје Q, $P_j \in \mathcal{M}$ тђ. $D(Q) = \alpha$, $D(P_j) = \alpha_j$ и важи (9) (уз измене у ознакама). Понављајући наставак доказа после те формуле, налазимо $Q_0 \leq Q$ са својством $D(Q_0) = \sum \alpha_j$.

(iv) Скуп S садржи произвољно мали позитиван број. Заиста, у супротном би за све $P \neq 0$ било $D(P) \geq \gamma > 0$, и нашло би се такво P за које је при томе и $D(P) < 2\gamma$. Како у $\mathcal{M}$ не постоји минималан пројектор, то је $P = P_1 \oplus P_2$ и тада $2\gamma \leq D(P_1) + D(P_2) = D(P) < 2\gamma$ што је контрадикција.

(v) Скуп S је свуда густ у $[0, D(I)]$. Заиста, нека је $(\alpha, \beta) \subseteq [0, D(I)]$. Тада постоји пројектор P такав да је $D(P) = \delta < \beta - \alpha$. Тада је за неки природан број n важи $\alpha < n\delta < \beta$, па на основу својства (iii) $n\delta \in S$. (Својство (iii) користимо за $\alpha = \beta$, $\alpha_k = \delta$ за $k \leq n$ и $\alpha_k = 0$, иначе.)

(vi) $S = [0, D(I)]$. Нека $\gamma \in [0, D(I)]$. Према претходном својству (v), постоји растући низ $\beta_n \in S$ такав да $\beta_n \to \gamma$. Сада тај низ претворимо у ред стављајући $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 - \beta_1, \ldots,$ $\alpha_n = \beta_n - \beta_{n-1}$. Бројеви α_j припадају S на основу својства (ii), и важи $\sum_1^n \alpha_j = \beta_n \to \gamma$, па $\gamma \in S$ на основу својства (iii). □

7.17. Став. Функција D, одређена је условима Става 7.15 до на рескалирање. Прецизније, ако је $D' : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to [0, +\infty]$ нека друга функција која испуњава те услове, онда је $D_1 = \alpha D$ за неко $\alpha \in (0, +\infty)$.

Доказ. Првим условом, одређено је да је $D'(P) = +\infty$ кад год је P бесконачан и доказ је тада завршен у случају фактора типа III.

Нека је у питању фактор типа I, и нека је P_0 минималан пројектор. Ако је P било који коначан пројектор, тада је $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_k$, $P_j \sim P_0$, па због четвртог услова мора бити $D'(P) = kD'(P_0) = D'(P_0)D(P)$ и доказ је завршен узимајући $\alpha = D'(P_0)$.

Најзад, претпоставимо да је $\mathcal{M}$ фактор типа II. Нека је R_n неки инфинитезимални низ, и P прозивољан коначан пројектор. Ако целобројно поделимо P са R_n добијамо $P = \oplus_j P_j + S$, $P_j \sim R_n$, $S \precnsim R_n$, па је $D'(P) = [P/R_n]D'(R_n) + D'(Q)$, односно

$$[P/R_n] \leq D'(P) < [P/R_n] + 1.$$

Поделивши последњи систем неједнакости, истим таквим, само за неки други пројектор Q добијамо

$$\frac{[P/R_n]}{[Q/R_n]} \leq \frac{D'(P)}{D'(Q)} \leq \frac{[P/R_n] + 1}{[Q/R_n]},$$

односно, после узимања лимеса

$$D'(P)/D'(Q) = P/Q = D(P)/D(Q),$$

одакле следи резултат. □

ТРАГОВИ

7.18. Дефиниција. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра, и нека је $\mathcal{M}^+$ скуп позитивних елемената из $\mathcal{M}$. Пресликавање $\tau : \mathcal{M}^+ \to [0, +\infty]$ назива се *тежина* ако је линеарно, онда када линеарна комбинација има смисла. Прецизније, ако важи:

(i) $\tau(\lambda T + \mu S) = \lambda\tau(T) + \mu\tau(S)$, за $\lambda, \mu \geq 0$ и $T, S \in \mathcal{M}^+$. (Може се казати и да је τ позитивно хомоген и адитиван.)

Тежина се назива *трагом* ако при томе још испуњава и услов:

(ii) $\tau(TT^*) = \tau(T^*T)$ за све $T \in \mathcal{M}$.

Непосредна последица овог услова је унитарна инваријантност трага. Наиме, за $\mathcal{M} \ni T \geq 0$ и $U \in \mathcal{M}$ унитаран важи $\tau(UTU^*) = \tau(T)$, за $T \geq 0$, што се види примењујући услов (ii) на оператор $UT^{1/2}$.

За траг τ кажемо да је веран ако важи

(iii) $\tau(T) = 0$ повлачи $T = 0$,

односно да је нормалан, ако је испуњено

(iv) $\tau(\sup T_a) = \sup \tau(T_\alpha)$ за сваку растућу ограничену мрежу из $\mathcal{M}^+$.

У овом одељку, бавићемо се искључиво нормалним, верним траговима, па зарад скраћивања термина, када се каже траг мисли се на нормалан веран траг.

За траг кажемо да је *коначан* ако је $\tau(T) < +\infty$ за све $T \in \mathcal{M}^+$, или што је еквивалентно, ако је $\tau(I) < +\infty$. Ако је τ коначан траг, онда се може проширит са $\mathcal{M}^+$ до целе $\mathcal{M}$ по лионеарности. Детаљи су једноставни па их изостављамо.

За траг, пак, кажемо да је *полуконачан* ако важи услов

(v) $\tau(T) = \sup\limits_{S \le T, \tau(S) < \infty} \tau(S)$.

7.19. Трагови на комутативним фон Нојмановим алгебрама. Нека је $\mathcal{M}$ комутативна фон Нојманова алгебра са цикличним вектором. Како је познато, постоји компактан Хаусдорфов простор X и вероватносна Борелова мера μ таква да је $\mathcal{M} \cong L^\infty(X, \mu) \cong C(X)$. Сваки позитиван функционал према Рисовој теореми, представља се помоћу неке друге регуларне Борелове мере λ. Отуда, ако је τ коначан траг на $\mathcal{M}$, онда је $\tau(f) = \int_X f \, \mathrm{d}\lambda$ (уместо $\mathcal{M}$ посматрамо $L^\infty(X, \mu)$. При томе је $\lambda \ll \mu$ (λ апсолутно непрекидна у односу на μ), јер ако је $\mu(F) = 0$, онда је $\lambda(F) = \tau(\chi_F) = \tau(0) = 0$. Ако је траг веран, онда имамо и обрат $\mu \ll \lambda$. Нормалност следује из теореме о монотоној конвергенцији.

Неки од услова у овом извођењу су прејаки и наведени су да би се скратило излагање. Претходни пример оправдава схватање теорије фон Нојманових алгебри као некомутативну теорију мере.

На комутативним фон Нојмановим алгебрама, под разумним условима постоји обиље различитих трагова - свака мера еквивалентна полазној μ дефинише неки траг. На факторима ситуација стоји дијаметрално супротно - трагова или нема или су јединствени.

7.20. Став. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фактор.

а) Ако је $\mathcal{M}$ фактор типа III, онда на $\mathcal{M}$ не постоји полуконачан траг;

б) Ако је $\mathcal{M}$ фактор типа I или II и τ полуконачан траг на $\mathcal{M}^+$. Онда је рестрикција $D = \tau|_{\mathcal{P}(\mathcal{M})}$ функција димензије, односно функција која задовољава услове Става 7.15;

в) Ако је $\mathcal{M}$ фактор типа I или II, онда на $\mathcal{M}$ постоји највише један полуконачан траг, до на скаларни умножак. Прецизније, ако су τ_1 и τ_2 полуконачни трагови, онда је $\tau_2 = \alpha\tau_1$,з а неко $0 < \alpha < +\infty$;

Доказ. Пре свега, примењујући услов траговитости (ii) на делимичне изометрије, налазимо да је $\tau(P) = \tau(Q)$ за еквивалентне пројекторе P и Q. Даље, нека је $P \lneqq Q$, онда је $Q = P + Q_1$ и $Q_1 \neq 0$. Отуда је $\tau(Q_1) > 0$ (услов верности), па је $\tau(P) < \tau(Q)$, уколико је $\tau(Q) < +\infty$. Отуда, ако је $P \in \mathcal{M}$ бесконачан пројектор, онда мора бити $\tau(P) = +\infty$. Ово је потребно у свми тачкама доказа. Сада доказујемо редом, једну по једну.

а) Нека је $\mathcal{M}$ фактор типа III. Тада је за све $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\tau(P) = +\infty$. Даље за било који $T \in \mathcal{M}^+$ и било који његов спектрални пројектор P важи $\alpha P \le T$ за погодно одабран број $\alpha > 0$. Тада је $\tau(T) \ge \alpha\tau(P) = +\infty$. Тако било који траг на фактору типа III има форму

$$\tau(T) = \begin{cases} 0, & T = 0 \\ +\infty, & T > 0. \end{cases}$$

Такав траг, јасно, не испуњава услов полуконачности;

б) Нека је τ полуконачан траг на фактору $\mathcal{M}$ типа I или II. Постоји оператор $T \in \mathcal{M}^+$ такав да је $0 < \tau(\mathcal{M}) < +\infty$ јер иначе траг не би био полуконачан. Као и малопре налазимо спектрални пројектор P_0 са својством $\alpha P_0 \le T$, и тада $0 < \tau(P_0) < +\infty$. Дакле, постоји пројектор P_0 са коначним трагом.

Нека је P коначан пројектор (у смислу да није еквивалентан свом правом потпројектору). Целобројно поделимо P са P_0 и добијамо $P = \oplus_j P_j + S$, где је $P_j \sim P_0$ и $S \precnsim P_0$. Скуп индекса j је коначан (иначе би P био бесконачан пројектор), рецимо кардиналности $N \in \mathbf{N}$, па је због адитивности трага и већ показаног $\tau(P) = n\tau(P_0) + \tau(S)$, односно $n\tau(P_0) \le \tau(P) < (n+1)\tau(P_0)$. Отуда је $\tau(P) < +\infty$ ако и само ако је P коначан. Еквиваленција $\tau(P) = 0$ ако и само ако је $P = 0$ је садржана у услову верности.

Остаје још да се покаже потпуна адитивност, али она је непосредна последица услова нормалности;

в) Следи из б) и става 7.17. $\square$

7.21. Став. Ако је $\mathcal{M}$ фактор типа I или II, онда на $\mathcal{M}$ постоји полуконачан траг.

Доказ. Нажалост, доказ неће бити комплетан.

Нека је $T \in \mathcal{M}$ позитиван, и E_T његова спектрална мера. Тада је $\sigma(T) \subseteq [0, +\infty)$ и $E_T(A) \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ за сваки мерљив скуп $A \subseteq \sigma(T)$. На $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ постоји функција димензије D, и ако сачинимо композицију $D \circ E_T$, она ће бити једна позитивна мера на $\sigma(T)$; означимо је са μ. Заиста, позитивност је очита, $D(E_T(\emptyset)) = D(0) = 0$, а σ-адитивност следује из σ-адитивности спектралне мере и потпун адитивности функције D. Стога дефинишемо траг τ са

$$\tau(T) := \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}(D \circ E_T)(\lambda) = \int_0^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}\mu(\lambda), \tag{10}$$

где сматрамо да је спектрална мера E_T продужема нулом на $[0, +\infty) \setminus \sigma(T)$.

Позитивна хомогеност је очигледна.

Да бисмо доказали својство (ii) у дефиницији 7.18, уочимо, за почетак, позитиван S и унитаран U. Ако је E_S спектрална мера оператора S, онда је $USU^* = U \int_0^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_S(\lambda) U^* = \int_0^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}UE_S(\lambda)U^*$, па је $E_{USU^*} = UE_SU^*$, због јединствености спектралне мере. Отуда је

$$\tau(USU^*) = \int_0^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}D(E_{USU^*}(\lambda)) = \int_0^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}D(UE_S(\lambda)U^*) = \int_0^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}D(E_S(\lambda)) = \tau(S),$$

због познатог својства $D(UPU^*) = D(P)$. Сада претходно применимо на $S = |T|^2$ и унитаран U из поларног разлагања $T = U|T|$.

Својство (iii) (верност) се лако види. Наиме, у супротном би било $0 = \mu(0, +\infty) = D(E_T(0, +\infty))$, односно $E_T(0, +\infty) = 0$, па $T = 0$.

Својство (v) полуконачности доказујемо овако. Нека је $\tau(T) = +\infty$. Из ТМК налазимо

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}\mu(\lambda) = \tau(T) = +\infty,$$

па за дато $M > 0$ постоји $\varepsilon > 0$ са својством $\int_\varepsilon^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}\mu(\lambda) > M||T||$. Али, како је комплемент скупа $[0, ||T||]$ мере нула, то је $\int_\varepsilon^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}\mu(\lambda) \leq ||T||\mu(\varepsilon, +\infty)$, па добијамо

$$\tau(E_T(\varepsilon, +\infty)) = D(E_T(\varepsilon, +\infty)) > M.$$

Означимо $P = E_T(\varepsilon, +\infty)$. Размотримо два случаја. Најпре, ако је $D(P) = +\infty$, онда је и $D(\varepsilon P) = +\infty$, па постоји пројектор $Q \leq P$ са својством $D(Q) > \varepsilon M$. Тада је, међутим, $\varepsilon Q \leq \varepsilon P \leq T$ и $\tau(Q) > M$.

У другом случају је $D(P) < +\infty$. Уочимо оператор $T_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_T(\lambda)$ - реч је о оператору чија је спектрална мера $E_{T_\varepsilon}(A) = E_T(A \cap [\varepsilon, +\infty))$. Како је на носачу мере E_{T_ε} испуњено $\varepsilon \leq \lambda \leq ||T||$ то је, с једне стране $\tau(T_\varepsilon) = \int_\varepsilon^{+\infty} \mathrm{d}\mu(\lambda) \leq ||T||D(P) < +\infty$, док је, с друге стране, $\tau(T_\varepsilon) = \int_\varepsilon^{+\infty} \mathrm{d}\mu(\lambda) \to \tau(T)$.

Упутство за доказ својства (iv) налази се у задатку ????. Адитивност је овде највећи проблем, и то зато што за спектралну меру E_{T+S} оператора T и S који не комутирају не можемо ништа паметно да кажемо. Релативно једноставан приступ може се наћи у чланку Педерсена - $Mathematica$ $Scandinavica$ 37(1975) 142--144. $\square$

7.22. Пример фактора типа II_1. Нека је G дискретна група и $W^*(G) = \mathcal{M}_L \cong \mathcal{M}_R$ фон Нојманова алгебра из задатка 2, претходног одељка. Подсетимо се кључних момената. Када група G има бесконачне класе конјугације тада је $W^*(G)$ фактор. Уочимо пресликавање $\tau : \mathcal{M}_L \to \mathbf{C}$ дато са $\tau(T) = \langle T\delta_e, \delta_e \rangle$, где је $\delta_e \in l^2(G)$ базна функција $\delta_e(g) = 1$ за $g = e$, односно $\delta_e(g) = 0$ за $g \neq e$. Приметимо да је тада и $\tau(T) = \langle T\delta_g, \delta_g \rangle$, где је δ_g карактеристична функција скупа $\{g\}$.

Доказаћемо да је τ коначан траг на $W^*(G)$. Заиста τ је коначно и линеарно. Затим то пресликавање је и слабо непрекидно (по дефиницији) и отуда ултраслабо непрекидно, односно нормално.

Докажимо услов верности. Нека је $\tau(T) = 0$. Тада је $T_{e,e} = \langle T\delta_e, \delta_e \rangle = 0$. Али тада је и $T_{g,g} = \langle T\delta_g, \delta_g \rangle = 0$, а како због Коши Шварцове неједнакости (примењене на пресликавање $(f,g) \mapsto \langle Tf, g \rangle$) имамо

$$|\langle T\delta_g, \delta_h \rangle|^2 \leq \langle T\delta_g, \delta_g \rangle \langle T\delta_h, \delta_h \rangle = 0,$$

то је $T = 0$, јер функције δ_g чине ортонормирану базу.

Докажимо најзад услов траговитости. Имамо

$$\tau(T^*T) = \langle T\delta_e, T\delta_e \rangle = \sum_{g \in G} \langle T\delta_e, \delta_g \rangle \overline{\langle T\delta_e, \delta_g \rangle} = \sum_{g \in G} \left\langle T\delta_{g^{-1}}, \delta_e \right\rangle \overline{\left\langle T\delta_{g^{-1}}, \delta_e \right\rangle} =$$

$$= \sum_{g \in G} \left\langle \delta_{g^{-1}}, T^*\delta_e \right\rangle \overline{\left\langle \delta_{g^{-1}}, T^*\delta_e \right\rangle} = \langle T^*\delta_e, T^*\delta_e \rangle = \tau(TT^*).$$

Примедба: Претходно не важи за било које T, већ само за $T \in \mathcal{M}_L(G)$ и то зато што су ти оператори „транслаторно инваријантни“.

Дакле, ако је G група са бесконачним класама конјугације, тада је $\mathcal{M}$ коначан фактор, јер има коначан траг. Сада докажимо да е реч о фактору типа II_1. Показаћемо да функција димензије $D = \tau|_{\mathcal{P}(\mathcal{M})}$ може узети ма коју вредност $\alpha \in [0,1]$. У ту сврху проучићемо прво алгебру $W^*(\mathbf{Z})$.

Дакле, нека је $U = L_1$ помак у десно на простору $l^2(\mathbf{Z})$. Фон Нојманова алгебра $W^*(\mathbf{Z})$ једнака је $\{U\}''$, јер је $L_n = (L_1)^n$ за $n \in \mathbf{Z}$. Посматрајмо Фуријеову трансформацију $F : l^2(\mathbf{Z}) \to L^2(-\pi, \pi)$ дату са

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) e^{inx}.$$

Познато је из теорије Фуријеових редова да је реч о унитарном пресликавању (Парсевалова једнакост). Пресликавање $B(l^2(G)) \to B(L^2(-\pi,\pi))$ дато са $T \mapsto FTF^{-1}$ трансформише U у оператор множења са e^{-ix}. Наиме, ако је $g \in L^2(-\pi,\pi)$, онда је $F^{-1}g = F^*g$ једнако низу Фуријеових коефицијената $\hat{g}(n) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-pi}^{+\pi} g(t) e^{-int}\,\mathrm{d}t$. Тако је

$$\tilde{T}g = FTF^{-1}g = FT\hat{g}(n) = F\hat{g}(n+1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{g}(n+1) e^{inx} = e^{-ix} g.$$

Тиме се U^n трансформише у множење са e^{-inx} за $n \in \mathbf{Z}$.

Како су тригонометријски полиноми свуда густи у $\max$-норми у простору $\tilde{C}[-\pi,\pi]$, а $\max$ норма исто што и норма оператора множења, то су множења функцијама из $\tilde{C}$ садржана у слици фон Нојманове алгебре $W^*(\mathbf{Z})$ пресликавањем $T \mapsto FTF^{-1}$. Како је $(\tilde{C})'' = L^\infty$, то је $W^*(\mathbf{Z})$ на овај начин изоморфна са $L^\infty(-\pi,\pi)$.

Погледајмо сада у шта се трансформише траг $\tau(T) = \langle T\delta_e, \delta_e \rangle$ (Сада је јединични елемент $e = 0$). Пре свега $F\delta_0 = 1/\sqrt{2\pi} = c(x)$ - константна функција. Имамо

$$\tau(T) = \langle T\delta_0, \delta_0 \rangle = \left\langle FTF^{-1}F\delta_0, F\delta_0 \right\rangle = \left\langle \tilde{T}c, c \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{T}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Дакле, у питању је интеграл по нормализованој Лебеговој мери.

Вратимо се алгебри $W^*(G)$ где је G нека група са бесконачним класама конјугације. Претпоставимо још да у G постоји елемент a бесконачног реда. Тада је $H = \{a^n \mid n \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}$ подгрупа групе G, и $G = \cup_{g \in G} Hg$ разлагање на косете, и $l^2(G) = \oplus L^2(Hg)$ одговарајуће разлагање Хилбертових простора. Потпростори $l^2(Hg)$ су инваријантни за оператор L_a, па тиме и за $\{L_a\}'' \cong W^*(\mathbf{Z})$. Отуда је рестрикција трага τ са $W^*(G)$ на $W^*(H)$ такође траг задат на исти начин. Како је $H \cong \mathbf{Z}$, τ се на $W^*(H)$ може добити формулом (11). Пројекторима у $W^*(H)$ одговарају карактеристичне функције скупова, а за скуп погодне мере може се онда добитри вреднбост трага која је ма који број из $[0,1]$.

Дакле, у овом случају је $W^*(G)$ фактор типа II_1.

ЗАВРШНЕ НАПОМЕНЕ

7.23. Директан интеграл. Фактори су крајњи случај фон Нојманових алгебри - најнекомутативнији. Комутативне фон Нојманове алгебре чине другу крајност. Помоћу та два крајња типа могуће је под одређеним условима описати сваку фон Нојманову алгебру.

Уколико W^*-алгебра $\mathcal{M}$ задовољава услов сепарабилности (не значи да је $\mathcal{M}$ сепарабилна, него да испуњава неки од услова задатка **4.** претходног одељка), она се може приказати на следећи начин: Њен центар $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$ изоморфан је са $L^\infty(X)$ за неки погодно одабран стандардан простор са мером X. Свакој тачки $x \in X$ могуће је придружити погодно одабран Хулбертов простор H_x, и фактор $\mathcal{M}_x \subseteq B(H_x)$. Тада се конструише тзв. *директан интеграл Хилбертових простора*

$$H = \int^{\oplus} H_x \, \mathrm{d}\mu(x),$$

и директан интеграл фамилије фактора

$$\int^{\oplus} \mathcal{M}_x \, \mathrm{d}\mu(x) \cong \mathcal{M}.$$

Међутим, да би се ово извело и доказало, потребна је широка, мада не и претерано неразумљива, припрема. Елементи простора H су наравно функције $f : X \to \cup_{x \in X} H_x$ са својством $f(x) \in H_x$, али наравно очекујемо да те функције буду мерљиве, и управо то, дефинисање појма мерљивости чини први проблем. Када се то превазиђе, онда иде ортогоналност, питање база, затим оператора итд.

За оне које конструкција више занима, могу је наћи у Бирман-Соломјак - глава 7.

Задаци

1. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ коначан фактор, то јест фактор без бесконачних пројектора. За дати $T \geq 0$ дефинишемо функцију

$$\varepsilon_T(\alpha) = \inf_{D(E_T(-\infty,\lambda]) \geq \alpha} .$$

а) Ако је H коначне димензије, $\mathcal{M} = B(H)$, и $D = \dim$ функција димензије, доказати да је ε_T део по део константна функција и да има скокове у целобројним тачкама. Установити везу између функције ε_T и сопствених вредности оператора T;

б) Доказати да важи:

$$\varepsilon_T(\alpha) = \inf_{D(P) \geq \alpha} \sup_{||x||=1, Px=x} \langle Tx, x \rangle ;$$

в) Доказати да за траг дефинисан формулом (10) важи

$$\tau(T) = \int_0^{D(I)} \varepsilon(\alpha) \, \mathrm{d}\alpha,$$

и одатле закључити да из $S \leq T$ следи $\tau(S) \leq \tau(T)$;

г) Показати својство (iv) - да је траг τ нормалан. [Може се претпоставити да је адитиван.]

2. Нека је $\mathcal{M} \subset B(H)$ фактор типа II_1, и нека је K произвољан сепарабилан Хилбертов простор. Доказати да је $\mathcal{M} \otimes B(K) \subseteq B(H) \otimes B(K) \cong B(H \otimes K)$ фактор типа II_∞.

[Напомена: Овде се ради о тзв. просторном или сапцијалном тензорском производу.]

[Друга напомена: Општије тврђење, да за комутант тензорског производа вази $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})' \cong \mathcal{M}' \otimes \mathcal{N}'$ доказује се изузетно тешко. Читава теорија - Томита Такесакијева теорија морала је да се претходно развије да би следио овај резултат. У овом конкретном случају, може се доказ извести непосредно.]

3. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фон Нојамнова алгебра. Репрезентацију алгебре $\mathcal{M}$ на Хилбертовом простору K, дату пресликвањем $\varphi : \mathcal{M} \to B(K)$ означаваћемо уређеним паром (φ, K). Међу класама унитарно еквивалентних репрезентација уводимо релацију $\leq$ са $(\varphi_1, K_1) \leq (\varphi_2, K_2)$ ако постоји директан суманд (φ_2', K') у репрезентацији (φ_2, K_2) таква да је (φ_2', K') унитарно еквивалентна са (φ_1, K_1).

а) Доказати да је $\leq$ релација поретка на $Rep(\mathcal{M})$;

б) Доказати да $Rep(A)$ у односу на операцију ортогоналног сабирања репрезентрација чини моноид (полугрупу са јединицом);

в) Доказати да су следећи услови еквивалентни:

(i) $\mathcal{M}$ је фактор;

(ii) свака не нулта репрезентација од $\mathcal{M}$ је верна;

(iii) Поредак $\leq$ на $Rep(\mathcal{M})$ је линеаран;

4. Нека је $\mathcal{M}$ фактор. Доказати да је он типа I ако и само ако има иредуцибилну репрезентацију.

5. Нека је $\mathcal{M} \subseteq B(H)$ фон Нојманова алгебра. За $T \in \mathcal{M}$ дефинишемо његов централни носач, као

$$z(T) = \inf\{p \in \mathcal{Z}(\mathcal{M}) \mid p \text{ је пројектор}, pT = Tp = T\}.$$

За пројекторе $P, Q \in \mathcal{M}$ кажемо да су централно ортогонални ако је $z(P)z(Q) = 0$.

а) Доказати да за пројектор $P \in \mathcal{M}$ важи $z(P) = \overline{\mathcal{M}PH} = \overline{\{TPx \mid T \in \mathcal{M}, x \in H\}}$;

б) Показати да су следећи услови међусобно еквивалентни:

(i) P и Q су централно ортогонални;

(ii) $P\mathcal{M}Q = \{0\}$;

(iii) не постоји не нулти пројектори $P_0 \leq P$, $Q_0 \leq Q$, такви да је $P_0 \sim Q_0$ (у Мареј-фон Нојмановом смислу).

в) Ако су P и Q пројектори у $\mathcal{M}$ онда постоји централни пројектор R такав да је $RP \preccurlyeq RQ$ и $(I-R)Q \preccurlyeq (I-R)P$. Доказати.

8. НЕОГРАНИЧЕНИ ОПЕРАТОРИ

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

8.1. Дефиниција. Нека су X и Y Банахови простори, $\mathcal{D}(A)$ линеаран потпростор простора X (што не значи да мора бити и затворен) и $A : \mathcal{D}(A) \to Y$ линеаран оператор. Уколико A није непрекидан, онда га зовемо *неограничен*. Скуп $\mathcal{D}(A)$ називамо *домен* оператора A.

Дефиниција је дата за Банахове просторе, иако ћемо у даљем имати у виду искључиво Хилбертове.

График оператора A је скуп $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in X \times Y \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$. График је увек линеаран потпростор. За оператор A кажемо да је *затворен* ако је скуп $\Gamma(A)$ затворен у простору $X \times Y$. Једноставно се види да је затворен оператор дефинисан на затвореном потпростору $\mathcal{D}(A)$ ограничен - то следи из теореме о затвореном графику. Услов затворености се може исказати следећом импликацијом:

$$x_n \to x \wedge Ax_n \to y \Rightarrow x \in \mathcal{D}(A) \wedge y = Ax.$$

За оператор који, може бити, нема затворен график кажемо да је *затворив*, ако је затворење скупа $\overline{\Gamma(A)}$ (у простору $X \times Y$), график неког оператора, то јест ако за фиксирано x из пројекције скупа $\overline{\Gamma(A)}$ на прву компоненту, постоји тачно једно y такво да $(x, y) \in \overline{\Gamma(A)}$. Тај се услов може исказати на следећи начин:

(1) $$x_n \to 0 \wedge Ax_n \text{ конвергира} \Rightarrow \lim Ax_n = 0.$$

Заиста, ако (x, y_1) и $(x, y_2) \in \overline{\Gamma(A)}$, онда $(0, y_1 - y_2) \in \overline{\Gamma(A)}$, па из услова (1) следи да је $y_1 = y_2$. Обратно, ако је A затворив, онда из $x_n', x_n'' \to x$ и $Ax_n' \to y'$, $Ax_n'' \to y''$ следи $x_n' - x_n'' \to 0$ и $A(x_n' - x_n'')$ ковергира, па је његов лимес нула, односно $y' = y''$.

Примедба. Услов (1) може некоме да личи на непрекидност у нули, што би онда значило да је такав оператор, будући линеаран, непрекидан свуда. Међутим, није тако, јер се претпоставља да Ax_n конвергира, а оно може и да дивергира.

Оператор чији је график једнак $\overline{\Gamma(A)}$ означавамо са $\bar{A}$ и називамо *затворењем* оператора A.

Нису сви оператори затвориви, на пример....

За оператор A са доменом $\mathcal{D}(A)$ кажемо да је густо дефинисан, ако је $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.

Кажемо да је B *раширење* оператора A, ако је $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(B)$, и за све $x \in \mathcal{D}(A)$ важи $Ax = Bx$. Тада пишемо $A \subseteq B$. Јасно, увек је $A \subseteq \bar{A}$.

8.2. Примери. Основни примери неограничених оператора су оператори диференцирања, и множења (есенцијално) неограниченом функцијом.

(1) Оператор $f \mapsto f'$ није дефинисан за сваку функцију $f \in L^2(0, 1)$, али јесте на свуда густом скупу полинома $\mathcal{P}$. Овај оператор је затворив, јер из $f_n \to 0$ и $f_n' \to g$ следи да постоје поднизови који конвергирају у мери, означимо их ради краткоће у писању такође са f_n и f_n'.

Према Јегоровљевој теореми они конвергирају равномерно на скупу скоро пуне мере. Отуда је на таквом скупу $g = 0$, односно $g = 0$ скоро свуда. Међутим, тај оператор није затворен, јер га садржи оператор диференцирања на скупу свих диференцијабилних функција из L^2.

Слично расуђивање важи и за оператор диференцирања на сваком од простора $L^p(0,1)$ за $1 \leq p < \infty$ или $C[0,1]$. Такође, и за операторе другог извода и сл.

(2) На истом простору $L^2(0,1)$ оператор $f(x) \mapsto f(x)/x$ није нити ограничен нити свуда дефинисан, али је дефинисан на густом потпростору свих непрекидних функција са компактним носачем у $(0,1)$. Тај оператор је затворив, јер из $f_n \to 0$ и $f_n(x)/x \to g(x)$, следи да постоје поднизови који конвергирају скоро свуда, па како је $x \neq 0$, с.с, то је $g(x) = 0$ скоро свуда. Међутим, он није затворен, јер га садржи оператор множења са $1/x$ на ширем домену: $\{f \in L^2 \mid f(x)/x \in L^2\}$.

Од сада па надаље, подразумеваћемо да су неограничени оператори дати на Хилбертовом простору H, осим ако није друкчије назначено.

8.3. Адјунговани оператор. И за неограничен оператор $A : \mathcal{D}(A) \to H$, $\mathcal{D}(A) \subseteq H$ можемо дефинисати адјунгован A^*. Наиме, за домен оператора A^* узимамо скуп свих оних вектора $y \in H$ за које је пресликавање

$$x \mapsto \langle Ax, y \rangle$$

ограничено; (Оно је увек билинеарно, а не мора бити увек ограничено, ако A није ограничен.) За такве y постоји јединстцвено z (Рисова теорема) такво да је $\langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle$. Ставимо $A^*y := z$. Дакле, за $x \in \mathcal{D}(A)$ и $y \in \mathcal{D}(A^*) = \{y \in H \mid x \mapsto \langle Ax, y \rangle$ је ограничено$\}$ имамо

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle\,.$$

Из једнакости

$$\langle x, A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle = \langle Ax, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle Ax, y_1 \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle Ax, y_2 \rangle = \bar{\lambda}_1 \langle x, A^* y_1 \rangle + \bar{\lambda}_2 \langle x, A^* y_2 \rangle$$

види се да је A^* увек линеаран. Међутим, остаје спорно питање да ли A^* уопште постоји, или одређеније, да ли је можда $\mathcal{D}(A^*)$ тривијалан, у смислу да садржи само нулу?

8.4. Геометријски приступ адјунгованом оператору. Посматрајмо Хилбертов простор $H \oplus H$ са скаларним производом задатим помоћу $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle$, и на њему пресликавање $W : H \oplus H \to H \oplus H$ дато са $W(x,y) = (y, -x)$. Једноставно се проверавају идентитети:

$$W^2 = -I, \qquad W^* = -W, \qquad W^*W = WW^* = -W^2 = I,$$

одакле је W унитаран.

Помоћу пресликавања W представићемо график адјунгованог оператора. Наиме, уређен пар (y, z) припада графику $\Gamma(A^*)$ ако и само ако

$$\text{за све } x \in \mathcal{D}(A) \text{ важи } \langle Ax, y \rangle = \langle x, z \rangle\,. \tag{2}$$

Заиста, ако важи (2) онда је десна страна ограничено пресликвање по x, а тиме и лева, па $y \in \mathcal{D}(A^*)$, и тада је по дефиницији $z = A^*y$. Обратно, ако $(y, z) \in \mathcal{D}(A^*)$, тада је лева страна у (2) ограничено пресликавање по x, а сама једнакост (2) важи по дефиницији.

Међутим, (2) је еквивалентно са

$$\text{за све } x \in \mathcal{D}(A) \text{ важи } \langle (x, Ax), (z, -y) \rangle = 0 \Leftrightarrow W(y,z) \perp \Gamma(A).$$

Другим речима $W(\Gamma(A^*)) = \Gamma(A)^\perp$, односно

$$\Gamma(A^*) = W^*(\Gamma(A)^\perp) = W(\Gamma(A)^\perp) = (W\Gamma(A))^\perp, \tag{3}$$

јер је $W^* = -W$, $\Gamma(A) = -\Gamma(A)$ (у питању је линеаран потпростор), и W као унитарно пресликавање може заменити мето са узимањем ортогоналног комплемента.

8.5. Став [својства адјунгованог оператора]. а) A^* је увек затворен оператор;
б) $A^{**} = \overline{A}$. Посебно, ако је A затворен, онда је $A^{**} = A$;
в) A^* је густо дефинисан ако и само ако је A затворив;
г) Ако је $A \subset B$ онда је $B^* \subset A^*$.

Доказ. а) На основу (3) график $\Gamma(A^*)$ је ортогонални комплемент, и као такав увек је затворен;

б) На основу (3) имамо $\Gamma(A^{**}) = (W\Gamma(A^*))^\perp = (W(W\Gamma(A))^\perp)^\perp = (W^2\Gamma(A))^{\perp\perp} = \overline{\Gamma(A)}$, јер је $W^2 = -I$ и $\Gamma(A) = -\Gamma(A)$ (линеаран потпростор);

в) Услов $y \perp \mathcal{D}(A^*)$ еквивалентан је са $(y,0) \perp \Gamma(A^*)$. Дакле, $y \perp \mathcal{D}(A^*)$ ако и само ако $(y,0) \perp W(\Gamma(A)^\perp)$ а то је еквивалентно са $(0,y) = -W(y,0) \perp \Gamma(A)^\perp$, тј. $(0,y) \in \overline{\Gamma(A)}$.

Нека је A затворив и $y \perp \mathcal{D}(A^*)$. Тада $(0,y) \in \overline{\Gamma}(A)$, што је такође график неког оператора, па је $y = 0$, односно $\mathcal{D}(A^*)$ је густ. Обратно, нека је $\mathcal{D}(A^*)$ густ и $(0,y) \in \overline{\Gamma(A)}$. Тада је $y \perp \mathcal{D}(A^*)$, па је $y = 0$. Другим речима, ако $\mathcal{D}(A) \ni x_n \to 0$ и $Ax_n \to y$, онда $(0,y) \in \overline{\Gamma(A)}$ па мора бити $y = 0$;

г) Нека $y \in \mathcal{D}(B^*)$. То по дефиницији значи да је пресликавање $x \mapsto \langle Bx, y\rangle$ ограничен линеаран функционал на $\mathcal{D}(B)$. Но, како је $\mathcal{D}(B) \supseteq \mathcal{D}(A)$, то је поменуто пресликавање ограничен функционал и на $\mathcal{D}(A)$, па $y \in \mathcal{D}(A^*)$. □

8.6. Лема. Нека је A густо дефинисан, затворен оператор. Тада је

$$\ker A^* = (\mathcal{R}(A))^\perp,$$

где је $\mathcal{R}(A)$ ознака за слику оператора A.

Као последице, имамо $\ker A = (\mathcal{R}(A^*))^\perp$, $H = \ker A^* \oplus \overline{\mathcal{R}(A)} = \ker A \oplus \overline{\mathcal{R}(A^*)}$.

Доказ. Нека је $y \in \ker A^*$, то јест $y \in \mathcal{D}(A^*)$ и $A^*y = 0$. Према дефиницији, то значи да је пресликавање $x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ не само ограничено, већ и идентички једнако нули, односно $\langle Ax, y\rangle = 0$ за све $x \in \mathcal{D}(A)$. Другим речима $y \perp \mathcal{R}(A)$. □

Примедба: Затвореност оператора A се користи само приликом извођења прве последице, да би се основна тврдња применила на A^* и то да би важило $A^{**} = A$.

8.7. Техничка лема. а) Нека је $A : \mathcal{D}(A) \to H$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ густо дефинисан затворен оператор и нека за све $x \in \mathcal{D}(A)$ важи

$$||Ax|| \geq c||x||, \qquad c > 0. \tag{4}$$

Тада је слика $\mathcal{R}(A)$ оператора A, затворен потпростор. Такође, пресликавање $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{D}(A)$ је ограничено;

б) Нека је, још, B ограничен оператор такав да је $||B|| < c$, где је c константа из (4). Тада и за оператор $A + B$ важи једнакост (4) с тим што уместо константе c стоји $c - ||B||$. Такође, потпростори $\mathcal{R}(A)^\perp$ и $\mathcal{R}(A+B)^\perp$ имају исту димензију.

Доказ. а) Нека $\mathcal{R}(A) \ni y_n \to y$. Тада је $y_n = Ax_n$ за неке $x_n \in \mathcal{D}(A)$. Како је y_n конверргентан, то из (4) следи да је x_n Кошијев у H, па $x_n \to x \in H$. Из услова затворености следи да је $x \in \mathcal{D}(A)$ и $y = Ax$. Дакле, слика је затворена. Ограниченост инверзног оператора следи непосредно из (4) заменом Ax и x, редом са y и $A^{-1}y$;

б) Први део тврђења једноставно следи из $||(A+B)x|| \geq ||Ax|| - ||Bx|| \geq (c - ||B||)||x||$.

За други део тврђења ослањамо се на једноставну тврдњу: Ако су K, $L \leq H$ два затворена потпростора, таква да је $\dim K > \dim L$, онда је постоји вектор $z \in K$ такав да је $z \perp L$. (Узме се пројекција $P = P_L$ на потпростор L и посматра њена рестрикција $Q = P|_K$ на K. Ако таквог вектора z нема тада би било $\ker Q = \{0\}$, односно Q би био инјективан, и тада $\dim K = \dim Q(K) \leq \dim L$, јер је $Q(K)$ потпростор од L.)

Претпоставимо да је $\dim(\mathcal{R}(A)^\perp) < \dim(\mathcal{R}(A+B)^\perp)$. Тада постоји $z \in \mathcal{R}(A+B)^\perp$, $z \perp \mathcal{R}(A)^\perp$, односно $z \in \mathcal{R}(A)$, тј. $z = Ax$ и $z \perp \mathcal{R}(A+B)$. Тада за све $y \in \mathcal{D}(A)$ имамо $\langle Ax, (A+B)y\rangle = 0$, па и за $y = x$. Одатле је $||Ax||^2 = \langle Ax, Ax\rangle = -\langle Ax, Bx\rangle \leq ||Ax||\,||Bx||$. Међутим, $||Bx|| \leq ||B||\,||x|| < c||x|| \leq ||Ax||$, па излази $||Ax||^2 < ||Ax||^2$, што је немогуће.

Сличо се ослобађамо и претпоставке $\dim(\mathcal{R}(A)^\perp) > \dim(\mathcal{R}(A+B)^\perp)$. □

СИМЕТРИЧНИ И САМОАДЈУНГОВАНИ ОПЕРАТОРИ

8.8. Дефиниција. а) За густо дефинисан оператор $A : \mathcal{D}(A) \to H$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ кажемо да је *симетричан* ако за све $x, y \in \mathcal{D}(A)$ важи

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle\,. \tag{5}$$

Одмах треба рећи да то још увек не значи да је $A = A^*$. Из (5) следује само $A \subset A^*$.

Међутим, сваки симетричан оператор је затворив. Наиме, ако $x_n \to 0$ и $Ax_n \to z$, тада из (5) за све $y \in \mathcal{D}(A)$ имамо $\langle Ax_n, y\rangle = \langle x_n, Ay\rangle \to 0$, односно $\langle z, y\rangle = 0$. Тако $z \perp \mathcal{D}(A)$, тј. $z = 0$. Једноставним проласком лимесом кроз (5) налазимо да је тада и $\overline{A}$ такође симетричан.

Важно својство симетричног оператора је да му је квадратна форма реална. Односно за све $x \in \mathcal{D}(A)$ важи

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Заиста, из (5) налазимо $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$.

б) За густо дефинисан оператор $A : \mathcal{D}(A) \to H$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ кажемо да је *самоадјунгован* ако је $A = A^*$.

Показаће се да неограничени самоадјунговани оператори, имају спектрално разлагање слично спектралном разлагању ограниченог самоадјунгованог оператора. Најважнија разлика се састоји у чињеници да самоадјунгован оператор нема ограничен спектар. Његов спектар може чак бити читава реална права. У случају симетричних оператора ситуација је знатно сложенија, па је једно од важнијих питања питање да ли симетричан оператор има самоадјунговано раширење. Односно, да ли за дати симетричан A постоји $B \supset A$ са својством $B = B^*$.

8.9. Спектар неограниченог оператора. Појмови спектра и резолвентног скупа дефинишу се за неограничене операторе, слично као и за ограничене, односно слично као за елементе Банахове алгебре.

Нека је $A : \mathcal{D}(A) \to H$, $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$ затворен густо дефинисан оператор.

Комплексан број λ је тачка резолвентног скупа оператора A, у ознаци $\rho(A)$, ако је слика $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ једнака целом H, и ако је $A - \lambda I$ инјективно. Тада закључујемо и да је $A^{-1} : H \to \mathcal{D}(A)$ ограничен на основу теореме о затвореном графику. (Наиме, график $\Gamma(A^{-1})$ се добија од графика оператора A, пресликавањем $(x, y) \mapsto (y, x)$.)

Спектар оператора A је $\sigma(A) = \mathbf{C} \setminus \rho(A)$. И у овом, неограниченом случају, спектар разврставамо на три дела.

Тачкасти спектар, у ознаци $\sigma_p(A)$, је скуп оних $\lambda \in \mathbf{C}$ за које $A - \lambda I$ није инјективно. То су заправо *сопствене вредности*;

Непрекидни спектар, у ознаци $\sigma_c(A)$, је скуп оних $\lambda \in \mathbf{C}$ које нису сопствене вредности, јесу у спектру и $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ је густа у H.

Резидуални спектар, у ознаци $\sigma_r(A)$, чине све остале тачке спектра. Дакле, то су они $\lambda \in \mathbf{C}$ за које $A - \lambda I$ јесте инјективно, али нема густу слику.

8.10. Став. а) Нека је A симетричан оператор (сада и убудуће то ће значити да је аутоматски затворен и густо дефинисан) и нека је $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Тада или $\lambda \in \rho(A)$ или $\lambda \in \sigma_r(A)$;

б) Сопствене вредности симетричног оператора су реалне;

в) Нека је $A = A^*$ самоадјунгован. Тада је $\sigma_r(A) = \emptyset$. Посебно $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R} \subseteq \rho(A)$.

Доказ. а) Нека је $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Тада је

$$||(A-\lambda I)x||^2 = ||(A-\alpha I)x - i\beta x||^2 = ||(A-\alpha I)x||^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle (A-\alpha I)x, i\beta x\rangle + |\beta|^2||x||^2.$$

Први сабирак је већи од нуле, а други је једнак нули. Наиме, $\langle (A-\alpha I)x, i\beta x\rangle = -i\beta\left(\langle Ax, x\rangle - \alpha||x||^2\right) \in i\mathbf{R}$. Тако је

$$||(A-\lambda I)x||^2 \geq |\beta|^2||x||^2. \tag{7}$$

На основу Леме 8.7, слика $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ је затворена, и инверз је ограничен. Разликујемо два случаја. Или је $\mathcal{R}(A - \lambda I) = H$, и тада $\lambda \in \rho(A)$, или $\mathcal{R}(A - \lambda I)$ није густа, па $\lambda \in \sigma_r(A)$;

б) Следи непосредно из претходног;

в) Нека је $\lambda \in \mathbf{C}$ такав да слика $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ није густа у H. Тада та слика има нетривијалан ортогонални комплемент, па постоји $y \neq 0$ такво да за све $x \in \mathcal{D}(A)$ важи $\langle (A-\lambda I)x, y\rangle = 0$. Последње је еквивалентно са $\langle Ax, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$. Како је десна страна ограничено пресликавање по x, то је онда и лева страна, па $y \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$, и важи $\langle x, Ay\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$, односно $\left\langle x, (A-\overline{\lambda}I)y\right\rangle = 0$ за све $x \in \mathcal{D}(A)$. Како је $\mathcal{D}(A)$ густ потпростор, то је $Ay = \overline{\lambda}y$, па по претходном $\overline{\lambda} \in \mathbf{R}$.

Примедба: Моменат где смо користили самоадјунгованост је $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$, и зато доказ не пролази за симетричне операторе који не морају бити самоадјунговани. □

8.11. Последица. Нека је A симетричан, затворен, густо дефинисан оператор. Тада је димензија $\dim\ker(A^* - \lambda I)$ иста за све λ из горње полуравни, и иста за све λ из доње полуравни.

Доказ. Нека је, на пример, $\operatorname{Im}\lambda_0 > 0$. Уочимо $\delta < \operatorname{Im}\lambda_0$, и посматрајмо $\lambda \in K(\lambda_0, \delta)$. Према Леми 8.10, прецизније према (7), слика $\mathcal{R}(A-\lambda_0 I)$ је затворена. С друге стране $||(\lambda_0 - \lambda)I|| < \delta < \operatorname{Im}\lambda_0$, па је према Леми 8.7, и слика оператора $A - \lambda I = A - \lambda_0 I + (\lambda_0 - \lambda)I$ такође затворена, и њихови ортогонални комплементи су исте димензије.

Треба још приметити, да је према Леми 8.6, $\ker(A^* - \overline{\lambda}I) = \ker(A-\lambda I)^* = (\mathcal{R}(A-\lambda I))^\perp$, да би закључили да је димензија потпростора $\ker(A^* - \overline{\lambda}I)$ иста за све $\lambda \in K(\lambda_0, \delta)$. Како је, у овом случају, $\operatorname{Im}\overline{\lambda} < 0$, како је доња полураван повезан скуп и пресликавање $\overline{\lambda} \mapsto \dim\ker(A^* - \overline{\lambda}I)$ локално константно, закључујемо да је оно и константно на читавој доњој полуравни.

Доказ се идентично изводи и у случају $\operatorname{Im}\lambda_0 < 0$, односно $\operatorname{Im}\overline{\lambda}_0 > 0$. □

8.12. Индекси дефекта. Нека је A симетричан оператор. Његови дефектни потпростори су

$$K_+(A) = (\mathcal{R}(A - iI))^\perp = \ker(A^* + iI), \qquad K_-(A) = (\mathcal{R}(A+iI))^\perp = \ker(A^* - iI),$$

а индекси дефекта

$$n_+(A) = \dim K_+(A), \qquad n_-(A) = \dim K_-(A).$$

Јасно $n_+(A) = \dim(\mathcal{R}(A-\lambda I))^\perp$ за било које λ из горње полуравни, а $n_-(A) = \dim(\mathcal{R}(A-\lambda I))^\perp$ за било које λ из доње полуравни.

Уколико су индекси дефекта строго већи од нуле, тада је $\sigma(A) = \mathbf{C}$, будући да је увек реч о затвореном скупу. Такође, тада су све тачке из $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$ сопствене вредности оператора A^*.

Индекси дефекта се могу дефинисати и када A није затворен, већ само симетричан густо дефинисан оператор. Тада је $n_+(A) = n_-(A) = 0$ еквивалентно томе да је $\overline{A}$ самоадјунгован. Такав A зовемо *есенцијално самоадјунгован*.

8.13. Став. Нека је A затворен и симетричан.

а) За било које $\lambda \notin \mathbf{R}$ важи

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \dotplus \ker(A^* - \lambda I) \dotplus \ker(A^* - \overline{\lambda}I), \tag{8}$$

при чему је у питању директан *алгебарски* збир. (Сумирање, наравно, није ортогонално, јер су и $\mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(A^*)$ густи у H.)

б) $\dim\mathcal{D}(A^*)/\mathcal{D}(A) = n_+(A) + n_-(A)$.

Доказ. а) На основу Леме 8.7 слика $\mathcal{R}(A-\lambda I)$ је затворена, па на основу Леме 8.6 важи $H = \mathbf{R}(A-\lambda I) + \ker(A^* - \overline{\lambda}I)$. Нека $y \in \mathcal{D}(A^*)$. Вектор У односу на ту репрезентацију разложимо вектор $(A^* - \lambda I)y$ на збир вектора $(A-\lambda I)x \in \mathcal{R}(A_\lambda I)$ и $\tilde{z} \in \ker(A^* - \overline{\lambda}I)$ и ставимо $\tilde{z} = (\overline{\lambda} - \lambda)z$, где z заједно са $\tilde{z}$ припада $\ker(A^* - \overline{\lambda}I)$. Имамо

$$(A^* - \lambda I)y = (A-\lambda I)x + (\overline{\lambda} - \lambda)z. \tag{9}$$

Како $x \in \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A^*)$, то је $Ax = A^*x$. Такође $\overline{\lambda}z = A^*z$, па је (9) еквивалентно са

$$A^*(y - x - z) = \lambda(y - x - z),$$

што значи да $u = y - x - z \in \ker(A^* - \lambda I)$. Тако је $y = x + z + u$, при чему $x \in \mathcal{D}(A)$, $z \in \ker(A^* - \overline{\lambda}I)$ и $u \in \ker(A^* - \lambda I)$.

Остаје још да се докаже да је сума директна. Ако први сабирак има нетривијалан пресек са неким од друга два, то би значило да A има сопствени вектор који одговора сопственој вредности која није реална, што је противно Ставу 8.10 б). Ако други и трећи имају нетривијалан пресек, то би се онда нашао сопствени вектор оператора A^* који одговара двама различитим сопственим вредностима, што је немогуће.

б) Следи непосредно из а). $\square$

8.14. Кејлијева трансформација. Билинеарно пресликавање $z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ проширене комплексне равни, пресликава реалне бројеве у јединични круг. Кад би теорема о пресликавању спектра важила и за неограничене операторе, тада би се таквим пресликавањем самоадјунгован оператор пресликао у оператор чије тачке леже у скупу $\{z \mid |z| = 1\}$, односно у унитаран. Видећемо да то заиста и важи. Такође симетрични оператори, наведеним билинеарним пресликавањем, трансформишу се у делимичне изометрије.

Нека је A затворен симетричан оператор. Његова Кејлијева трансформација је оператор $V : H \to H$ задат са

$$\begin{gathered} Vx = (A+iI)(A-iI)^{-1}x, \qquad x \in \mathcal{R}(A-iI), \\ Vx = 0, \qquad x \perp \mathcal{R}(A-iI). \end{gathered} \tag{10}$$

Кејлијева трансформација је парцијална изометрија – она изометрично пресликава $\mathcal{R}(A-iI)$ на $\mathcal{R}(A+iI)$. Заиста, ако је $x \in \mathcal{R}(A-iI)$, онда је $x = (A-iI)z$ за неко $z \in \mathcal{D}(A)$, и тиме $Vx = (A+iI)z$, па имамо

$$||Vx||^2 = \langle Vx, Vx \rangle = \langle (A+iI)z, (A+iI)z \rangle = \langle Az, Az \rangle + 2\operatorname{Re} i \langle Az, z \rangle + \langle z, z \rangle .$$

Међутим, A је симетричан па $\langle Az, z \rangle \in \mathbf{R}$, односно $\operatorname{Re} i \langle Az, z \rangle = 0$, и тиме $\operatorname{Re} i \langle Az, z \rangle = -\operatorname{Re} i \langle Az, z \rangle$. Зато је

$$||Vx||^2 = \langle Az, Az \rangle - 2\operatorname{Re} i \langle Az, z \rangle + \langle z, z \rangle = \langle (A-iI)z, (A-iI)z \rangle = \langle x, x \rangle = ||x||^2.$$

Тиме смо показали да је $V|_{\mathcal{R}(A-iI)}$ изометрично. На сличан начин можемо показати и да је пресликавање $(A-iI)(A+iI)^{-1}$ изометрично на $\mathcal{R}(A+iI)$, а како је оно инверзно Кејлијевој тртансформацији V, закључујемо да V пресликава $\mathcal{R}(A-iI)$ **на** $\mathcal{R}(A-iI)$.

Дакле, Кејлијева трансформација датог симетричног оператора A је парцијална изометрија, са полазним простором $\mathcal{R}(A-iI)$ и долазним $\mathcal{R}(A+iI)$. Она „не види“ дефектне просторе $K_{\pm}(A)$.

Не може, међутим, свака парцијална изометрија бити Кејлијева трансформација неког симетричног оператора. Следе својства Кејлијеве трансформације.

1) Слика простора $\mathcal{R}(A-iI)$ оператором $V-I$ једнака је $\mathcal{D}(A)$. Заиста, ако је $x \in \mathcal{R}(A-iI)$ онда је $x = (A-iI)z$ за неко $z \in \mathcal{D}(A)$, па је

$$(V-I)x = (V-I)(A-iI)z = V(A-iI)z - (A-iI)z = (A+iI)z - (A-iI)z = 2iz \in \mathcal{D}(A). \tag{11}$$

Тако је $(V-I)(\mathcal{R}(A-iI)) \subseteq \mathcal{D}(A)$. С друге стране, за $z \in \mathcal{D}(A)$, $x = (A-iI)z \in \mathcal{R}(A-iI)$, па због (11) имамо $(V-I)x = 2iz$, што показује обратну инклузију.

2) Број 1 није сопствена вредност оператора V. Заиста у супротном би постојало x са својством $Vx = x$. Због дефиниције (10) мора бити $x \in \mathcal{R}(A-iI)$, и тада би за све $y \in \mathcal{R}(A-iI)$ важило

$$0 = \langle Vx, Vy \rangle - \langle x, y \rangle = \langle x, Vy - y \rangle ,$$

где смо искористили да је V изометрично на $\mathcal{R}(A-iI)$ и $Vx = x$. То значи да је $x \perp (V-I)(\mathcal{R}(A-iI))$, а како је последњи скуп густ у H то је $x = 0$.

Полазни симетричан оператор A може се реконструисати на основу своје Кејлијеве трансформације V као

$$A = i(V+I)(V-I)^{-1},$$

Заиста, ако је $x \in \mathcal{D}(A)$, тада је $y = (A-iI)x \in \mathcal{R}(A-iI)$, и $Vy = (A+iI)x$, То је еквивалентно са $y = Ax - ix$, $Vy = Ax + ix$, што када саберемо добијамо $Vy + y = 2Ax$, а када одузмемо $Vy - y = 2ix$. Из последње је $(V-I)y = 2ix$, односно $y = 2i(V-I)^{-1}x$, па онда налазимо $2Ax = (V+I)y = 2i(V+I)(V-I)^{-1}x$, што је и тртебало показати.

Примедба: Успут смо показали да свака парцијална изометрија која испуњава својства $1 \notin \sigma_p(V)$ и слика полазног простора оператором $I-V$ је густа у H јесте Кејлијева трансформација неког симетричног оператора A.

8.15. Став [Раширења симетричног оператора]. Нека је A симетричан оператор, и B његово симетрично раширење, тј. $A \subset B \subset B^*$. Тада је:

а) Кејлијева трансформација V_B оператора B је раширење Кејлијеве трансформације V_A оператора A, тј. $V_B|_{\mathcal{R}(A-iI)} = V_A$;

б) $n_+(A) - n_-(A) = n_+(B) - n_-(B)$;

в) Обратно, свака парцијална изометрија W која је раширење Кејлијеве трансформације V_A оператора A јесте Кејлијева трансформација неког симетричног раширења оператора A;

г) Оператор A има самоадјунговано раширење ако и само ако је $n_+(A) = n_-(A)$.

Доказ. а) Познато је (видети Став 8.5), да је $A \subset B \subset B^* \subset A^*$. Како је $A \subset B$, то је $\mathcal{R}(A - iI) \leq \mathcal{R}(B - iI)$. Даље, за $x \in \mathcal{R}(A - iI)$ је $x = (A - iI)z$ за неко $z \in \mathcal{D}(A) \leq \mathcal{D}(B)$, па је

$$V_B x = (B + iI)(B - iI)^{-1}x = (B + iI)(B - iI)^{-1}(A - iI)z =$$
$$= (B + iI)(B - iI)^{-1}(B - iI)z = (B + iI)z = (A + iI)z = V_A x.$$

б) Како су димензије ортогоналних комплемената полазног и долазног простора парцијалне изометрије V_A коначне, то се V_A може продужити само на коначно димензионалном потпростору од $\mathcal{R}(A - iI)^{\perp}$, на пример димензије $k \in \mathbf{N}$. Али тада се и долазни потпростор повећао за потпростор исте димензије k. Како су полазни и долазни простор парцијалне изометрије V_B редом једнаки $\mathcal{R}(B - iI)$, односно $\mathcal{R}(B + iI)$, то закључујемо да је

$$n_+(B) = n_+(A) - k, \qquad n_-(B) = n_-(A) - k,$$

одакле следи тражено;

в) Нека је V_A Кељијева трансформација оператора A. Ортокомплементи њеног полазног, односно долазног простора су редом, $\ker V_A^* = \ker(A^* + iI)$, односно $\ker V_A = \ker(A^* - iI)$, и они су због формуле (8) дисјунктни. Свако изометрично раширење W оператора V_A облика је $W = V_A \oplus V_0$, где је $V_0 : \ker(A^* + iI) \to \ker(A^* - iI)$ парцијална изометрија. Број 1 није сопствена вредност оператора V_A према својству 2) одељка 8.14, а није ни оператора V_0 јер су му полазни и долазни простори дисјунктни, па стога 1 није ни сопствена вредност оператора $W = V_A \oplus V_0$. Такође како полазни простор оператора W садржи полазни простор оператора V_A, то је испуњено и својство 1) одељка 8.14. Отуда W потиче од неког симетричног оператора $B \supset A$.

г) Ако A има самоадјунговано раширење, рецимо B, онда је $n_+(B) - n_-(B) = 0$, па је према претходном и $n_+(A) - n_-(A) = 0$.

С друге стране, ако је $n_+(A) = n_-(A)$, онда су полазни и долазни потпростот Кејлијеве трансформације V_A исте коначне кодимензије, па стога постоји њено унитарно раширење, означимо га са U. Према претходном $U = V_B$ за неко симетрично раширење B оператора A. Међутим, тада су дефектни потпростори оператора B тривијални, односно он је самоадјунгован. □

СПЕКТРАЛНО РАЗЛАГАЊЕ НЕОГРАНИЧЕНИХ САМОАДЈУНГОВАНИХ ОПЕРАТОРА

8.16. Подсећање. Нека је $(\Omega, \mathfrak{M}, E)$ простор са спектралном мером. Подсетимо се (одељак 4.2) да је $E : \mathfrak{M} \to B(H)$ функција која испуњава својства: (i) $E(A)$ је ортопројектор за сваки мерљив $B \in \mathfrak{M}$, (ii) $E(\emptyset) = 0$ и $E(\Omega) = I$; (iii) $E(\bigsqcup_{j=1}^{+\infty} B_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} E(B_j)$; (iv) $E(B_1 \cap B_2) = E(B_1)E(B_2)$. Помоћу спектралне мере E за дате векторе x и $y \in H$ конструисали смо фамилију комплексних мера $\mu_{x,y}$ са

$$\mu_{x,y}(B) = \langle E(B)x, y\rangle\,.$$

Меру $\mu_{x,x}$ скраћено ћемо означавати са μ_x. Како је $E(B)$ самоадјунгован пројектор, то је $\mu_x(B) = \langle E(B)x, x\rangle = ||E(B)x||^2$, и отуда $\mu_x(\Omega) = ||x||^2 < +\infty$. Такође, из формуле (1) одеољка 4.2 једноставно излази

$$|\mu_{x,y}|(B) \leq \sqrt{\mu_x(B)\mu_y(B)} \leq \frac{1}{2}(\mu_x(B) + \mu_y(B)), \tag{12}$$

Даље, развили смо интеграцију функција из $L^\infty(\Omega)$, дефинишући интеграл $\int_\Omega f\,\mathrm{d}E$ као јединствен оператор T_f за који важи

$$\langle T_f x, y\rangle = \int f\,\mathrm{d}\mu_{x,y}$$

и показали да је пресликавање

$$L^\infty(\Omega) \ni f \mapsto T_f,$$

изометрички $*$-изоморфизам алгебре $L^\infty(\Omega)$ (са инволуцијом $f \mapsto \overline{f}$) и неке комутативне подалгебре алегебре $B(H)$.

У овом одељку развићемо интеграцију неограничених функција. У ту сврху користићемо следећу једнакост коју изводимо на основу формуле (3) одељка 4.3. Наиме, за ограничене функције f и g имамо

$$||T_fT_gx||^2 = \langle T_f^*T_fT_gx, T_gx\rangle = \int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}\mu_{T_gx}. \tag{13}$$

8.17. Став. Нека је $f : \Omega \to \mathbf{C}$ мерљива, скоро свуда коначна функција. Наравно, она не мора бити ограничена. Скуп

$$\mathcal{D}_f = \{x \in H \mid \int_{\mathbf{R}} |f|^2\,\mathrm{d}\mu_x < +\infty\} \tag{14}$$

је свуда густ векторски потпростор Хилбертовог простора H.

Доказ. Заиста, за сваки мерљив скуп B имамо

$$\begin{aligned}\mu_{x+y}(B) &= ||E(B)x + E(B)y||^2 \le (||E(B)x|| + ||E(B)y||)^2 = \\ &= ||E(B)x||^2 + 2||E(B)x||\,||E(B)y|| + ||E(B)y||^2 \le \\ &\le 2(||E(B)x||^2 + ||E(B)y||^2) = 2(\mu_x(B) + \mu_y(B)),\end{aligned}$$

одакле непосредно следи да је $\mathcal{D}_f$ затворен за сабирање вектора. Множење скаларом није проблем.

Докажимо да је $\mathcal{D}_f$ свуда густ у H. Нека је

$$\Delta_n = \{z \in \Omega \mid |f(z)| \le n\}. \tag{15}$$

Како је f скоро свуда коначна, то је $\bigcup_{n\ge1}\Delta_n = \Omega$ (до на скуп мере нула), па $E(\Delta_n) \to I$ јако, и стога за све $x \in H$ имамо $x_n = E(\Delta_n)x \to x$. Довољно је, стога, доказати да $x_n \in \mathcal{D}_f$. Међутим, на основу (13), за све $m > n$ имамо

$$\int_{\Delta_m} |f|^2\,\mathrm{d}\mu_{x_n} = \int_\Omega |f|^2\chi_{\Delta_m}^2\,\mathrm{d}\mu_{E(\Delta_n)x} = ||T_{f\chi_{\Delta_m}}T_{\chi_{\Delta_n}}x||^2 = ||T_{f\chi_{\Delta_n}}x||^2 = \int_\Omega |f|^2\chi_{\Delta_n}\,\mathrm{d}\mu_x \le n^2||x||^2,$$

што је довољно, јер када пустимо $m \to +\infty$, добијамо

$$\int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}\mu_{x_n} \le n^2||x||^2 < +\infty.$$

□

8.18. Дефиниција. Сада дефинишемо $\int_\Omega f\,\mathrm{d}E$ као јединствен оператор $T_f : \mathcal{D} \to H$ такав да за све $x, y \in \mathcal{D}_f$ важи

$$\langle T_fx, y\rangle = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu_{x,y}. \tag{16}$$

Докажимо да је дефиниција коректна. Интеграл на десној страни постоји због (12) и зато што $\int |f|^2 < +\infty$ повлачи $\int |f| < +\infty$ кад год је мера коначна.

Даље, ако је u Радон Никодимов извод мере $\mu_{x,y}$ по мери $|\mu_{x,y}|$ онда за сваку ограничену функцију φ, имајући у виду (13), имамо

$$\int_\Omega |\varphi|\,\mathrm{d}|\mu_{x,y}| = \int_\Omega |\varphi|u\,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \langle T_{|\varphi|u}x, y\rangle \le ||T_{|\varphi|u}x||\,||y|| = \left(\int_\Omega |\varphi|^2\,\mathrm{d}\mu_x\right)^{1/2}||y||.$$

Примењујући то на $\varphi = f\chi_{\Delta_n}$ и пуштајући да $n \to +\infty$ налазимо да и за неограничене функције f важи оцена:

$$\left|\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu_{x,y}\right| \le \left(\int_\Omega |f|^2\,\mathrm{d}\mu_x\right)^{1/2}||y||,$$

што значи да интеграл на десној страни формуле (16) постоји за све $x \in \mathcal{D}_f$ и све $y \in H$, као и да представља ограничен (антилинеаран) функционал по y, те стога, за све $x \in \mathcal{D}_f$ постоји јединствено одређен вектор T_fx такав да важи (16). Линеарност пресликавања $x \mapsto T_fx$ следи јер је десна страна у (16) линеарна по x.

Ако су скупови $\mathcal{D}_f$ и Δ_n дати са (14) и (15). Тада је за све $x \in \mathcal{D}_f$ испуњено

$$\int_\Omega f \cdot \chi_{\Delta_n} \, \mathrm{d}\mu_{x,y} \to \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu_{x,y}. \tag{17}$$

Другим речима низ ограничених оператора $T_{f\chi_{\Delta_n}}$ слабо конвергира ка неограниченом оператору T_f на скупу $\mathcal{D}_f$, тј.

$$\langle T_{f\chi_{\Delta_n}} x, y\rangle \to \langle T_f x, y\rangle$$

за све $x \in \mathcal{D}_f$ и све $y \in H$.

Заиста, разлика интеграла у (17) по модулу је мања или једнака од

$$\int_{\Omega\setminus\Delta_n} |f| \, \mathrm{d}|\mu_{x,y} \le \left(\int_\Omega |f|^2 \, \mathrm{d}\mu_x\right)^{1/2} ||y|| \to 0,$$

због дефиниције скупа $\mathcal{D}_f$ (14).

8.19. Спектрална мера самоадјунгованог оператора. Нека је A самоадјунгован оператор, и нека је U његова Кејлијева трансформација. Показали смо да је U унитаран, па је $\sigma(U) \subseteq \mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. Нека је E_U спектрална мера оператора U. Како број 1 није сопствена вредност оператора U то је $E_U(\{1\}) = 0$, осносно $E_U(\mathbf{U} \setminus \{1\}) = I$.

Уочимо функцију $g : \mathbf{R} \to \mathbf{U}$, $g(t) = (t+i)/(t-i)$. Формулу (10) условно можемо да интерпретирамо као $U = g(A)$ – условно, јер нисмо дефинисали, још увек, никакав функционални рачун за неограничене операторе. Међутим, управо ће нам функција g послужити да дефинишемо спектралну меру неограничејног самоадјунгованог оператора A помоћу спектралне мере оператора U.

Наиме, функција g, као и њена инверзна $g^{-1}(z) = i(z+1)/(z-1)$ је мерљива, па пресликава Борелове скупове у Борелове. Стога за Борелов скуп $B \subseteq \mathbf{R}$ дефинишемо

$$E_A(B) := E_U(g(B)).$$

Како је g бијекција, сасвим једноставно се провераваjу све четири особине Дефиниције 4.1. Поступком конструисаним у одељку 4.2, имамо изометришко утапање алгебре $L^\infty(\mathbf{R})$ у $B(H)$ дато са

$$f \mapsto f(A) = \int_{\mathbf{R}} f(\lambda) \, \mathrm{d}E_A(\lambda). \tag{18}$$

Међутим, због претходног пододељка, и за евентуално неограничене, али мерљиве и скоро свуда коначне функције, интеграл (18) има смисла, и представља неограничен оператор са доменом $\mathcal{D}_f$ датим са (14).

8.20. Став. Функционални рачун дефинисан формулом (18) има следећа својства:
а) $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \subseteq \mathcal{D}_{\alpha f + \beta g}$ и $(f+g)(A)x = f(A)x + g(A)x$, за све $x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$;
б) $\mathcal{D}_{fg} = ...$
.....

Доказ. □

Задаци

1. Дато је пресликавање $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(0,1)$ са $\mathcal{D}(A) = C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(1)t$. Доказати да A није затворен оператор, као ни да се не може затворити, то јест да затворење његовог графика $\Gamma(A)$ није график ниједне функције.

2. Дато је пресликавање $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(0,1), \mathcal{D}(A) = \{x : [0,1] \to \mathbf{C} | x$ апсолутно непрекидна, $x' \in L^2, x(0) = x(1) = 0\}$, $Ax = \dfrac{1}{i}x'$.

а) Одредити адјунгован оператор A^*, Кејлијеву трансформацију $(A+iI)^{-1}(A-iI)$ и индексе дефекта $n_+(A), n_-(A)$;

б) Доказати да сваки оператор B са својством $A \subseteq B \subseteq A^*$ има облик $B = A_\theta$, где је $\theta \in \overline{\mathbf{C}}$, $A_\theta : \mathcal{D}(A_\theta) \to L^2(0,1)$, $\mathcal{D}(A_\theta) = \{x : [0,1] \to \mathbf{C} \mid x$ апсолутно непрекидна, $x' \in L^2, x(1) = \theta x(0)\}$ (случај $\theta = \infty$, посматрати као $x(0) = 0$). Доказати да је A_θ самоадјунгован ако и само ако је $|\theta| = 1$, док у супротном A_θ није ни самоадјунгован ни симетричан.

3. Дато је пресликавање $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(0, +\infty)$, $\mathcal{D}(A) = \{x : [0, +\infty) \to \mathbf{C} \mid x$ апсолутно непрекидна, $x' \in L^2, x(0) = 0\}$, $Ax = \dfrac{1}{i}x'$.

а) Одредити адјунгован оператор A^*, Кејлијеву трансформацију $(A + iI)^{-1}(A - iI)$ и индексе дефекта $n_+(A)$, $n_-(A)$;

б) Проверити да ли A има самоадјунгованих раширења.

4. Дато је пресликавање $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(-\infty, +\infty)$, $\mathcal{D}(A) = \{x : (-\infty, +\infty) \to \mathbf{C} \mid x$ апсолутно непрекидна, $x' \in L^2\}$, $Ax = \dfrac{1}{i}x'$.

а) Одредити A^*, установити да је $A^* = A$ и доказати да је, у овом случају $n_+(A) = n_-(A) = 0$;

б) Нека је $F : L^2(-\infty, +\infty) \to L^2(-\infty, +\infty)$ Фуријеова трансформација, то јест $Fx(s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-ist}\,\mathrm{d}t$ за $x \in L^1 \cap L^2$, и продужено по непрекидности. Доказати да је F унитарно пресликвање, као и да се оператор FAF^* може задати са $F^*AFx(t) = tx(t)$;

в) Користећи претодно доказати да фон Нојманова алгебра $\mathcal{M} = \{f(A) \mid f \in L^\infty(-\infty, +\infty)\}$ има циклични вектор, то јест да оператор A има прост спектар.

5. Доказати да за самоадјунгован (неограничен, али не само симетричан) A и $\lambda \notin \sigma(A)$ важи

$$\left\langle (A - \lambda I)^{-1}x, y \right\rangle = \int_{\sigma(A)} \frac{1}{s - \lambda}\, \mathrm{d} \left\langle E_A(\lambda)x, y \right\rangle,$$

где је $E_A(\lambda)$ скраћена ознака за $E_A((-\infty, \lambda))$.

Одатле, пручивши претходно Стилтјесову трансфомрацију, извести да важи

$$\frac{1}{2}\left(\langle E_A(\lambda)x, y\rangle + \langle E_A(\lambda+)x, y\rangle\right) =$$

$$= \lim_{\eta \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\lambda} \left[\left\langle (A - (\xi + i\eta)I)^{-1}x, y\right\rangle - \left\langle (A - (\xi - i\eta)I)^{-1}x, y\right\rangle\right] \mathrm{d}\xi;$$

6. Нека је $A : \mathcal{D}(A) \to H$ (H Хилбертов простор) затворен оператор.

а) Доказати да је са

$$\langle x, y\rangle_A = \langle Ax, Ay\rangle + \langle x, y\rangle$$

дефинисан скаларни производ на $\mathcal{D}(A)$, као и да је $\mathcal{D}(A)$ комплетан у односу на норму која из њега проистиче;

б) Нека је $B : \mathcal{D}(B) \to H$ неки други неограничен оператор, при чему је $\mathcal{D}(B) \supseteq \mathcal{D}(A)$. За оператор B кажемо да је A-ограничен, ако за неке реалне α, β важи

$$||Bx||^2 \le \alpha||Ax||^2 + \beta||x||^2, \tag{19}$$

а број $||B||_A = \inf\{\alpha \mid$ за све $x \in \mathcal{D}(A)$ важи (19)$\}$ се зове његова A-норма. Доказати да је (19) еквивалентно са

$$||Bx|| \le \alpha_1||Ax|| + \beta_1||x||, \tag{20}$$

за неке друге α_1, β_1, као и да је

$$||B||_A = \inf\{\alpha_1 \mid \text{за све } x \in \mathcal{D}(A) \text{ важи (20)}\};$$

в) Доказати да из $\mathcal{D}(B) \supseteq \mathcal{D}(A)$, B затворив и A затворен, следи да је B A-ограничен;

г) Ако је B оператор диференцирања, а $A : \mathcal{D}(A) \to L^2(-\infty, +\infty)$ дат са $\mathcal{D}(A) = \{x : (-\infty, +\infty) \to \mathbf{C} \mid x'$ апсолутно непрекидна и $x' \in L^2(-\infty, +\infty)\}$, $Ax = x''$, доказати да је B A-ограничен.

7. Нека је A оператор из задатка број 4.

а) Показати да за његову резолвенту ($\lambda \notin \mathbf{R}$) важи:

$$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \begin{cases} i\int_{-\infty}^{t} e^{i\lambda(t-s)}x(s)\,\mathrm{d}s, & \operatorname{Im}\lambda > 0 \\ -i\int_{t}^{+\infty} e^{i\lambda(t-s)}x(s)\,\mathrm{d}s, & \operatorname{Im}\lambda < 0 \end{cases};$$

б) Показати да се спектрална мера оператора A може изразити помоћу

$$E_A(\alpha, \beta)x(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\beta(t-s)} - e^{i\alpha(t-s)}}{s - t} x(t)\,\mathrm{d}t.$$

[То се може учинити помоћу Фуријеове трансформације, али и помоћу задатка 5.]

Затим показати да за његов квадрат $A^2x = -x''$ важи

$$E_{A^2}(-\infty, \lambda)x(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(s-t)}{s-t} x(t)\,\mathrm{d}t.$$

9. ЈЕДНОПАРАМЕТАРСКЕ ПОЛУГРУПЕ

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

9.1. Дефиниција. Нека је X Банахов простор. Фамилија ограничених линеарних оператора $S_t : X \to X$, $t \in [0, +\infty)$ је *једнопараметарска полугрупа* ако су испуњени услови:

(1) $S_0 = I$;
(2) $S_{s+t} = S_s S_t$.

Ако је поред тога испуњен и услов
(3) за све $x \in X$ је пресликавање $[0, +\infty) \ni t \mapsto S_t x \in X$ непрекидно,
онда такву полугрупу називамо *јако непрекидна* полугрупа или C_0-*полугрупа*.
Ако је уместо услова (iii) испуњен јачи услов
(3') пресликавање $[0, +\infty) \ni t \mapsto S_t \in B(X)$ је непрекидно, тј. $||S_t - S_{t_0}|| \to 0$ кад $t \to t_0$, онда такву полугрупу називамо *равномерно непрекидна* полугрупа или UC-*полугрупа*.

Примедба: Услов (2) омогућава да се непрекидност сведе на непрекидност у нули. Наиме, из $S_t x \to x$ кад $t \to 0$ једноставно изводимо да је S_t јако непрекидна, а из $||S_t - I|| \to 0$ кад $t \to 0$ да је S_t равномерно непрекидна.

Основни пример једнопараметарских група је фамилија $S_t = e^{tA}$, где је $A \in B(X)$ фиксиран ограничен оператор. Заиста, како tA и sA очигледно комутирају испуњен је услов (2). (Први услов је тривијално испуњен.) Наведена група је равномерно непрекидна, јер је

$$||e^{tA} - e^{t_0 A}|| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(t^n - t_0^n)A^n \right\| \leq |t - t_0| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|t^{n-1} + t^{n-2}t_0 + \cdots + t_0^{n-1}|}{n!} ||A||^n \leq$$

$$\leq |t - t_0| \, ||A|| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(t_0 + \delta)^{n-1} ||A||^{n-1}}{(n-1)!} = |t - t_0| \, ||A|| e^{(t_0+\delta)||A||}.$$

Видећемо касније да је ово једини пример равномерно непрекидних полугрупа.

Други пример може бити овај. На простору $L^p(0, +\infty)$, $1 \leq p < +\infty$. посматрамо пресликавања $S_t : L^p \to L^p$ дата са $S_t x(u) = x(u + t)$. Полугрупни услов (1) је тривијално задовољен. Ова полугрупа је јако непрекидна, јер $||x(u) - x(u + t)||_p \to 0$ кад $t \to 0+$. Наиме, последње је тачно за непрекидне функције (са компактним носачем), јер тада $x(u + t) \to x(u)$ док гранични прелаз под знаком интеграла обезбеђује Теорема о доминантној конвергенцији. Даље, непрекидне функције су густе у L^p, а низ норми ограничен, па можемо да применимо принцип конвергенције. Ова полугрупа није равномерно непрекидна.

9.2. Став [ограниченост C_0-полугрупе]. Нека је S_t C_0-полугрупа на Банаховом простору X. Тада је:

(i) функција $t \mapsto ||S_t||$ је ограничена у некој околини нуле;

(ii) Постоје константе M и ω такве да важи

$$||S_t|| \leq Me^{\omega t}. \tag{1}$$

Доказ. Како је фамилија $S_t x$ конвергентна за свако $x \in X$, то $||S_t||$ мора бити ограничена у некој околини нуле на основу принципа униформне ограничености. То доказује (i).

Докажимо (ii). Посматрајмо реалну функцију $\varphi(t) = ||S_t||$. Према претходном, φ је ограничена у некој околини нуле. Важи и $\varphi(s+t) = ||S_{s+t}|| = ||S_s S_t|| \leq ||S_s|| \, ||S_t|| = \varphi(s)\varphi(t)$. За $t > 0$ постоје јединствен природан број k и $s \in [0, \delta)$ такви да је $t = k\delta + s$, па је

$$\varphi(t) \leq \varphi(\delta)^k \varphi(s) \leq M \cdot M^k \leq M \cdot M^{t/\delta} = Me^{\omega t},$$

ако ставимо $\omega = (\log M)/\delta$. □

Напомена: Инфимум свих бројева ω за које важи (1) назива се *поредак* полугрупе, и најчешће означава са ω_0. О томе како се израчунава поредак полугрупе видети задатак ????

9.3. Вектор усредњен полугрупом. Нека је S_t C_0-полугрупа.

За дато $x \in X$ формирамо вектор x_t са

$$x_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau x \, \mathrm{d}\tau.$$

Кажемо да је x_t *средња вредност* вектор x по полугрупи S_t, или краће да је x_t *усредњен вектор*.

Усредњени вектори имају следећа својства:

(i) $x_t \to x$ кад $t \to 0$. Заиста

$$x_t - x = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau x \, \mathrm{d}\tau - x \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau = \frac{1}{t} \int_0^t (S_\tau x - x) \, \mathrm{d}\tau.$$

Како $S_\tau x \to x$, то за било које унапред дато $\varepsilon > 0$ постоји t довољно мало тако да важи $||S_\tau x - x|| < \varepsilon$ за све $0 \leq \tau \leq t$. Тада је међутим,

$$||x_t - x|| \leq \frac{1}{t} \int_0^t (||S_\tau x - x|| \, \mathrm{d}\tau \leq \varepsilon \frac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau = \varepsilon,$$

што завршава доказ.

(ii) Скуп свих усредњених вектора је густ у X. То следи из претходног.

(iii) $S_s x_t = (S_s x)_t$. Заиста,

$$S_s x_t = \frac{1}{t} \int_0^t S_s S_\tau x \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{t} \int_0^t S_\tau (S_s x) \, \mathrm{d}\tau = (S_s x)_t.$$

(iv) Слично својству (i) доказујемо и да је

$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \int_t^{t+s} S_\tau x \, \mathrm{d}\tau = S_t x.$$

9.4. Инфинитезимални генератор. Нека је S_t произвољна C_0-полугрупа. Оператор $A : \mathcal{S}(A) \to X$ дат са

$$Ax = \lim_{t \to 0+} \frac{S_t x - x}{t} \tag{2}$$

при чему је $\mathcal{D}(A) = \{x \in X \mid \text{ лимес у (2) постоји}\}$, је затворен, густо дефинисан оператор, у општем случају неограничен.

Оператор A има следећа својства

(i) $AS_t = S_t A$, односно A комутира са полугрупом S_t;

(ii) Полугрупа S_t је дифенренцијабилна у смислу

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t x = AS_t x. \tag{3}$$

Доказ. Доказаћемо прво да $\mathcal{D}(A)$ садржи све усредњене векторе. Одатле закључујемо да је $\mathcal{D}(A)$ густ потпростор. Наиме, на основу ??? имамо

$$\begin{aligned}\frac{S_t x_s - x_s}{t} &= \frac{(S_t x)_s - x_s}{t} = \frac{1}{st}\left(\int_0^s S_\tau S_t x \,\mathrm{d}\tau - \int_0^s S_\tau x \,\mathrm{d}\tau\right) = \\ &= \frac{1}{st}\left(\int_t^{t+s} S_\tau x \,\mathrm{d}\tau - \int_0^s S_\tau x \,\mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{st}\left(\int_s^{s+t} S_\tau x \,\mathrm{d}\tau - \int_0^t S_\tau x \,\mathrm{d}\tau\right) \to \\ &\to \frac{1}{s}(S_s x - x),\end{aligned}$$

кад $t \to 0+$. Одавде одмах налазимо и $A(x_s) = (S_s x - x)/s$.

Ако уведемо оператор $A_t : X \to X$ са

$$A_t = \frac{S_t - I}{t},$$

онда имамо $A(x_s) = A_s x$. Према дефиницији оператора A_s налазимо

$$S_t A_s = S_t \frac{1}{s}(S_s - I) = \frac{1}{s}(S_{t+s} - S_t) = \frac{1}{s}(S_s - I) S_t = A_s S_t, \tag{4}$$

односно оператори A_s и S_t комутирају. Такође, $Ax = \lim_{s\to 0+} A_s x$ за све $x \in \mathcal{D}(A)$.

Нека $x \in \mathcal{D}(A)$. Тада $\lim_{s\to 0+} A_s x$ постоји, па на основу (4) постоји и $\lim_{s\to 0+} A_s S_t x$ и једнак је $S_t A x$. Другим речима $S_t x \in \mathcal{D}(A)$ и $S_t A x = A S_t x$. То доказује прво својство.

И више од тога, за свако $t > 0$ имамо

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t} S_t x = \lim_{s\to 0+} \frac{S_{t+s} x - S_t x}{s} = \lim_{s\to 0+} S_t \frac{S_s x - x}{s} = S_t A x = A S_t x,$$

где је $\dfrac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}t}$ ознака за десни извод.

Покажимо и да леви извод има исту вредност. Искористићемо оцену $||S_t|| \le M \cdot e^{\omega t}$, на основу које је $||S_t||$ локално ограничена. Нека је $\delta > 0$. Имамо

$$\begin{aligned}\left\|\frac{S_{t-\delta} x - S_t x}{\delta} - S_t A x\right\| &= \left\| S_{t-\delta}\left(\frac{x - S_\delta x}{\delta} - S_\delta A x\right)\right\| \le \\ &\le \|S_{t-\delta}\| \left(\left\|\frac{S_\delta x - x}{\delta} - Ax\right\| + \|Ax - S_\delta A x\|\right) \to 0,\end{aligned}$$

кад $\delta \to 0+$. Тиме је доказано својство (ii).

Остаје још да докажемо да је оператор A затворен. Претпоставимо да $\mathcal{D}(A) \ni x_n \to x$ и $A x_n \to y$. Тада је

$$\lim_{t\to 0+} \frac{S_t x - x}{t} = \lim_{t\to 0+} \lim_{n\to +\infty} \frac{S_t x_n - x_n}{t}.$$

Међутим, према Њутн-Лајбницовој формули, имамо

$$S_t x_n - x_n = S_t x_n - S_0 x_n = \int_0^t \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tau} S_t x \,\mathrm{d}\tau = \int_0^t S_\tau A x_n \,\mathrm{d}\tau,$$

па је

$$\lim_{t\to 0+} \frac{S_t x - x}{t} = \lim_{t\to 0} \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{t}\int_0^t S_\tau A x_n \,\mathrm{d}\tau = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_0^t S_\tau y \,\mathrm{d}\tau = y.$$

Дакле, $x \in \mathcal{D}(A)$ и $y = Ax$. Овиме је доказ у потпуности завршен. □

9.5. Став. Нека је S_t нека C_0-полугрупа, и нека је $A : \mathcal{D}(A) \to X$ њен инфинитезимални генератор. Следећи услови су међусобно еквивалентни:

(1) $\mathcal{D}(A) = X$ (тиме је аутоматски A ограничен због теореме о затвореном графику);
(2) S_t је равномерно непрекидна;
(3) S_t се може продужити до групе S_t, $-\infty < t < +\infty$, која је при томе аналитичка, односно постоји $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t = \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{S_{t+h} - S_t}{t}$ у операторској норми;
(4) $S_t = e^{tA}$ за неки ограничен оператор $A : X \to X$.

Доказ. (3) $\Rightarrow$ (1). Из услова (3) следи да постоји извод, између осталог и у нули, па $(S_t - I)/t$ конвергира по норми. Онда конвергира и $(S_t x - x)/t$ за све $x \in X$, па је $\mathcal{D}(A) = X$.

(1) $\Rightarrow$ (4). На основу формуле (3) имамо

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S_t e^{-tA}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t \cdot e^{-tA} + S_t(-A)e^{-tA} = AS_t e^{-tA} - S_t A e^{-tA} \equiv 0,$$

јер S_t и A комутирају. Отуда је $S_t = Ce^{tA}$, а како је $S_0 = I$ то је $C = I$, односно $S_t = e^{tA}$.

(4) $\Rightarrow$ (2) следи на основу Примера у уводном параграфу.

(2) $\Rightarrow$ (3). $||I - S_t|| \to 0$, па за $t \in (0, \delta)$ важи $||I - S_t|| < 1$ одакле је S_t инвертибилан. Међутим, важи и $||I - \frac{1}{t}\int_0^h S_t \,\mathrm{d}t|| < 1$ за $0 < h < \delta$, па је инвертибилан и $\int_0^h S_t \,\mathrm{d}t$. Даље имамо

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}(S_s - I)\int_0^h S_t \,\mathrm{d}t =& \frac{1}{s}\left(\int_0^h S_{t+s}\,\mathrm{d}t - \int_0^h S_t \,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{s}\left(\int_s^{s+h} S_t \,\mathrm{d}t - \int_0^h S_t \,\mathrm{d}t\right) = \\ =& \frac{1}{s}\left(\int_h^{h+s} S_t \,\mathrm{d}t - \int_0^s S_t \,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Међутим, из равномерне непрекидности полугрупе S_t лако налазимо $\frac{1}{s}\int_0^s S_t \,\mathrm{d}t \to S_0 = I$ и $\frac{1}{s}\int_h^{h+s} S_t \,\mathrm{d}t \to S_h$, кад $s \to 0$, односно

$$\frac{1}{s}(S_s - I)\int_0^h S_t \,\mathrm{d}t \to S_h - I, \qquad \text{тј.} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t = (S_h - I)\left(\int_0^h S_t \,\mathrm{d}t\right)^{-1}.$$

Тако је S_t диференцијабилна у нули, барем с десна. Одатле је она дифернецијабилна с десна и у ма којој тачки $s > 0$, због полугрупног својства. Диференцијабилност с лева се изводи на исти начин као у ???.

Остаје још да докажемо да се S_t може продужити до једнопараметарске групе. Како је S_t инвертибилно за $0 < t < \delta$ биће, још једанпут због полугрупног својства, инвертибилно и за све $t > 0$. Ставимо $S_{-t} = S_t^{-1}$, и важиће групно својство. Леви извод у нули једнак је

$$\lim_{t\to 0+} \frac{S_{-t} - I}{-t} = -\lim_{t\to 0+} \frac{S_t^{-1} - I}{t} = \lim_{t\to 0+} S_t^{-1}\frac{S_t - I}{t} = IA = A.$$

Дакле њихов састав у нули је гладак. $\square$

ХИЛЕ ЈОШИДИНА ТЕОРЕМА

Према управо доказаном ставу постоји бијекција између свих UC-полугрупа и свих ограничених оператора $A \in B(X)$, дата тако што се UC-полугрупи додељује њен инфитезимални генератор. Да ли се слично може показати за C_0-полугрупе? Односно, да ли сваком зтвореном оператору A одговара нека C_0 полугрупа чији је инфитезимални генератор управо A? Одговор је негативан.

9.6. Став. Нека је S_t C_0-полугрупа, и нека је ω_0 њен поредак раста, тј. за све $\omega > \omega_0$ постоји константа M за коју важи $||S_t|| \le Me^{\omega t}$, и нека је A њен инфинитезимални генератор. Тада важи

(1) $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \le \omega_0\}$, односно спектар оператора A смештен је у левој полуравни са границом ω_0.

(2) За све $\lambda \in \mathbf{C}$ за које је $\operatorname{Re}\lambda > \omega > \omega_0$ важи оцена

$$||(A - \lambda I)^{-n}|| \le \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n}.$$

Доказ. Нека је $\operatorname{Re}\lambda > \omega > \omega_0$. Уочимо оператор R_λ дат са

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_t x \,\mathrm{d}t.$$

Он је добро дефинисан, јер је подинтегрална функција непрекидна, а важи и оцена

$$||e^{-\lambda t} S_t x|| \le |e^{-\lambda t}|\,||S_t||\,||x|| \le Me^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)t}||x||,$$

а интеграл последње функције конвергира јер је $\omega - \operatorname{Re}\lambda < 0$.

Доказаћемо да је резолвента оператора A једнака $-R_\lambda$. За $x \in \mathcal{D}(A)$ имамо

$$\begin{aligned} R_\lambda Ax &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_t Ax \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t x \, \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-\lambda t} S_t x) + \lambda e^{-\lambda t} S_t x \right) \mathrm{d}t = \\ &= e^{-\lambda t} S_t x \Big|_0^{+\infty} + \lambda R_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x, \end{aligned}$$

односно

$$R_\lambda(\lambda I - A) = I.$$

С друге стране

$$\begin{aligned} \frac{S_s - I}{s} R_\lambda x =& \frac{1}{s} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_{t+s} x \, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_t x \, \mathrm{d}t \right) = \\ =& \frac{1}{s} \left(e^{\lambda s} \int_s^{+\infty} e^{-\lambda t} S_t x \, \mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S_t x \, \mathrm{d}t \right) = \\ =& \frac{e^{\lambda s} - 1}{s} \int_s^{+\infty} e^{-\lambda t} S_t x \, \mathrm{d}t - \frac{1}{s} \int_0^{s} e^{-\lambda t} S_t x \, \mathrm{d}t \to \lambda R_\lambda x - x, \end{aligned}$$

кад $s \to 0+$, односно $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ и

$$AR_\lambda = \lambda R_\lambda - I,$$

односно $(\lambda I - A) R_\lambda = I$.

Тако $\operatorname{Re} \lambda > \omega_0$ повлачи $\lambda \in \rho(A)$, што доказује (1). Из једнакости $(A - \lambda I)^{-1} = -R_\lambda$ одмах имамо и оцену

$$||(A - \lambda I)^{-1}|| \le \int_0^{+\infty} |e^{-\lambda t}| \, ||S_t|| \, \mathrm{d}t \le M \int_0^{+\infty} e^{-(\operatorname{Re} \lambda - \omega)t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \omega},$$

што је својство (2) у специјалном случају $n = 1$. Да бисмо извели општи случај, доказаћемо формулу

$$(A - \lambda I)^{-n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} S_t \, \mathrm{d}t,$$

до које стижемо диференцирањем једнакости $(A - \lambda I)^{-1} = -R_\lambda$ по λ, $n - 1$ пута. Не заборавимо да је резолвента аналитичка функција. Одатле имамо

$$||(A - \lambda I)^{-n}|| \le \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\operatorname{Re} \lambda t} M e^{\omega t} \, \mathrm{d}t = \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n}.$$

$\square$

Дакле, не може сваки затворен оператор бити генератор C_0-полугрупе, већ то могу бити само они који испуњавбају својства (1) и (2). Наведени услови су, међутим и довољни.

9.7. Теорема [Хиле-Јошида]. Нека је A затворен густо дефинисан оператор који испуњава услове (1) и (2) претходног Става. Тада постоји C_0-полугрупа S_t чији је инфинитезимални генератор управо A.

И више, тада важи $||S_t|| \le M e^{\omega t}$, где су M и ω константе из услова (2).

Доказ. Било би идеално када би могли да дефинишемо $S_t = e^{tA}$. Међутим, тако нешто нема смисла, беы обзира што је функција $\lambda \mapsto e^{t\lambda}$ аналитичка. Наиме, у случају неограничених оператора, није јасно чак ни шта је A^2 и да ли уопште густо дефинисан.

Стога ћемо поступити овако. Уочићемо операторе

$$B_\lambda = \lambda^2 (\lambda I - A)^{-1} - \lambda I, \qquad \text{за } \mathbf{R} \ni \lambda > \omega_0$$

формирати полугрупе $S_t^{(\lambda)} = e^{tB_\lambda}$, а затим доказати:

(i) Да $B_\lambda x \to Ax$, кад $\lambda \to +\infty$ за све $x \in \mathcal{D}(A)$,

(ii) Да фамилија $S_t^{(\lambda)}$ конвергира кад $\lambda \to +\infty$, те да њена гранична вредност S_t јесте тражена полугрупа.

Пре свега, како сви реални $\lambda > \omega_0$ припадају резолвентном скупу, закључујемо да је B_λ коректно дефинисан ограничен оператор. Доказујемо прво својство. За било које $y \in \mathcal{D}(A)$ имамо

$$(\lambda(\lambda I - A)^{-1} - I)y = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - (\lambda I - A))y = (\lambda I - A)^{-1}Ay \to 0, \qquad \lambda \to +\infty.$$

Како је $\mathcal{D}(A)$ густ у X, и како због услова (2) имамо равномерну оцену $||\lambda(\lambda I - A)^{-1} - I|| \leq 1 + M$ то на основу принципа конвергенције закључујемо да и за све $y \in X$ имамо $(\lambda(\lambda I - A)^{-1} - I)y \to 0$ кад $\lambda \to +\infty$. Применимо претходно на $y = Ax$ за неко $x \in \mathcal{D}(A)$, па налазимо

$$\begin{aligned} B_\lambda x - Ax =& \lambda^2(\lambda I - A)^{-1}x - \lambda x - Ax = \\ =& \lambda((\lambda I - A)^{-1}\lambda x - (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A))x - Ax = \\ =& \lambda(\lambda I - A)^{-1}Ax - Ax \to 0, \end{aligned}$$

кад $\lambda \to +\infty$. Тиме смо доказали (i).

Сада изводимо оцену норме одговарајуће полугрупе $S_t^{(\lambda)} = e^{tB_\lambda}$. Имамо

$$\begin{aligned} ||e^{tB_\lambda}|| =& ||e^{-\lambda t} e^{\lambda^2(\lambda I - A)^{-1}}|| \leq \\ \leq& e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} ||(\lambda I - A)^{-n}|| \leq \\ \leq& e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{n!} \frac{M}{(\lambda - \omega)^n} = \\ =& e^{-\lambda t} e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda - \omega}}, \end{aligned} \tag{5}$$

што тежи ка $Me^{\omega t}$, кад $\lambda \to +\infty$ равномерно по t на ограниченим интервалима.

Сада ћемо показати да фамилкија $S_t^{(\lambda)}$ испуњава Кошијев услов. Наиме,

$$S_t^{(\mu)} - S_t^{(\lambda)} = S_s^{(\mu)} S_{t-s}^{(\lambda)} \Big|_{s=0}^{s=t} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(S_s^{(\mu)} S_{t-s}^{(\lambda)}) \, \mathrm{d}s = \int_0^t (B_\mu S_s^{(\mu)} S_{t-s}^{(\lambda)} - S_s^{(\mu)} S_{t-s}^{(\lambda)} B_\lambda) \, \mathrm{d}s.$$

Међутим, B_λ и B_μ комутирају, јер су оба функције од A, па како је $S_t^{(\lambda)}$ фукција од B_λ, а $S_t^{(\mu)}$ функција од B_μ, то комутирају и B_λ и $S_t^{(\mu)}$, односно B_μ и $S_t^{(\lambda)}$. Зато је

$$||S_t^{(\mu)} - S_t^{(\lambda)}|| \leq \int_0^t ||B_\mu - B_\lambda|| \, ||S_s^{(\mu)} S_{t-s}^{(\lambda)}|| \, \mathrm{d}s \leq ||B_\mu - B_\lambda|| \int_0^t M^2 e^{-\lambda s} e^{\frac{\lambda^2 s}{\lambda - \omega}} e^{-\mu(t-s)} e^{\frac{\mu^2(t-s)}{\mu - \omega}} \, \mathrm{d}s.$$

Кад λ, $\mu \to +\infty$, онда израз под интегралоим конвергира ка $e^{\omega s} e^{\omega(t-s)} = e^{\omega t}$ равномерно по s, t на ограниченим скуповима, а $||B_\lambda - B_\mu||$ тежи ка нули. Тиме смо доказали да фамилија $S_t^{(\lambda)}$ испуњава Кошијев услов (у операторској норми), кад $\lambda \to +\infty$ равномерно по t на ограничениум скуповима.

Стога постоји гранична вредност

$$S_t = \lim_{\lambda \to +\infty} S_t^{(\lambda)}.$$

Из оцене (5) одмах излази $||S_t|| \leq Me^{\omega t}$. Докажимо и да је S_t јако непрекидна. Имамо

$$||S_t x - S_s x|| \leq ||S_t x - S_t^{(\lambda)} x|| + ||S_t^{(\lambda)} x - S_s^{(\lambda)} x|| + ||S_s^{(\lambda)} x - S_s x||.$$

Први и трећи сабирак биће произвољно мали за λ довољно велико, јер $S_t^{(\lambda)} \rightrightarrows S_t$ равномерно по t на компактнима, а други тежи ка нули, кад $t \to s$, јер је $S_t^{(\lambda)}$ јако наперкидна (чак и више, униформно).

Остаје још да докажемо да је генератор полугрупе S_t управо A. За $x \in \mathcal{D}(A)$ имамо

$$S_t x - x = \lim_{\lambda \to +\infty} (S_t^{(\lambda)} x - x) = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^t S_\tau^{(\lambda)} B_\lambda x \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t S_\tau A x \, \mathrm{d}\tau,$$

јер $S_\tau^{(\lambda)} B_\lambda x \to S_t A x$ равномерно по $\tau \in [0, t]$. Када последње поделимо са t и пустимо да $t \to 0+$ добијамо $Bx = Ax$, где је са B (привремено) означен инфинитезимални генератор полугрупе S_t. То заправо значи да је $B \supset A$, тј. да је B раширење оператора A. Међутим, ако узмемо $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ (а последњи пресек садржи барем реалне бројеве веће од ω_0), онда је

$$X = (A - \lambda I)\mathcal{D}(A) = (B - \lambda I)\mathcal{D}(B),$$

односно

$$\mathcal{D}(B) = (B-\lambda I)^{-1}X = (A-\lambda I)^{-1}X = \mathcal{D}(A).$$

Доказ је завршен. □

9.8. Последица. За C_0-полугрупу S_t кажемо да је полугрупа *контракција* ако је $||S_t|| \le 1$ за све $t \ge 0$.

Затворен, густо дефинисан оператор A је инфинитезимални генератор полугрупе контракција ако и само ако важи

(i) $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \le 0\}$;

(ii) $||(A-\lambda I)^{-1}|| \le \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda}$ за све λ за које је $\operatorname{Re}\lambda > 0$.

Доказ. Полугрупа контракција је специјалан случај C_0-полугрупе, код које у оцени $||S_t|| \le Me^{\omega t}$ можемо узети произвољно мало $\omega > 0$ и $M = 1$, и затим пустити $\omega \to 0$ (сада је M униформно по ω).

Из услова (ii) лако налазимо и да је за све природне n испуњено $||(A-\lambda I)^{-n}|| \le 1/(\operatorname{Re}\lambda)^n$. Стога је резултат последица Става ??? и Хиле Јошидине теореме. □

9.9. Теорема [Стон]. Нека је H Хилбертов простор, и нека је $U_t \in B(H)$, $t \in \mathbf{R}$ јако непрекидна *унитарна* група (тј. U_t је унитаран за све $t \in \mathbf{R}$). Тада постоји самоадјунгован (могуће неограничен) оператор A такав да је $U_t = e^{itA}$.

Доказ. Посматрајмо полугрупе U_t, $t \ge 0$, односно U_{-t}, $t \ge 0$. Обе су полугрупе контракција, јер је $||U_t|| = 1$. Стога њихови инфинитезимални генератори B, односно C испуњавају услове Последице ???. Дакле, $\sigma(B)$ и $\sigma(C)$ су подскупови затворене леве полуравни. Међутим, из $I = U_0 = U_{-t}U_t$ налазимо $U_{-t} = U_t^{-1} = U_t^*$, па је

$$C = \lim_{t\to 0+} \frac{U_{-t} - I}{t} = \lim_{t\to 0+} U_t^{-1}\frac{I - U_t}{t} = -B.$$

Зато је спектар $\sigma(B)$ подскуп и затворене десне полуравни. Дакле $\sigma(A) \subseteq i\mathbf{R}$.

Даље, за све $x \in \mathcal{D}(B)$ и све $y \in \mathcal{D}(C)$ имамо

$$\langle Ax, y\rangle = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\langle U_t x - x, y\rangle = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\langle x, U_t^* y - y\rangle = \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\langle x, U_{-t}y - y\rangle = \langle x, Cy\rangle.$$

То значи да је $\mathcal{D}(C) \subseteq \mathcal{D}(B^*)$, односно $-B = C \subset B^*$. Одатле је $A = -iB$ симетричан оператор, а како је $\sigma(A)$ реалан (јер је $\sigma(B)$ чисто имагинаран), то су индекси дефекта оператора A оба једнака нули, тј. A је самоадјунгован.

Функционални рачун за самоадјунговане операторе обезбеђује да је група $e^{tB} = e^{itA}$ коректно дефинисана. Лако се израчунава да је инфинитезимални генератор полугрупе e^{itA} једнак $iA = B$, а како две различите полугрупе не могу имати исте генераторе, то следи да је $U_t = e^{itA}$. □

ЕВОЛУЦИОНА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА

9.10. Дефиниција. Нека је A затворен, густо дефинисан оператор на Банаховом простору X. Проблем

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(A) \end{cases} \tag{6}$$

где је $x : [0, +\infty) \to \mathcal{D}(A)$ непрекидна функција назива се *апстрактан Кошијев проблем*. Једначина у (6) назива се *еволуциона диференцијална једначина*.

Од решења тражимо да буде класе C^1 у Банаховом простору X.

9.11. Став. Ако оператор A испуњава услове Хиле Јошидине теореме, онда апстрактан Кошијев проблем има јединствено решење.

Доказ. Према Хиле Јошидиној теореми постоји C_0-полугрупа S_t чији је генератор једнак A. Ставимо $x(t) = S_t x_0$. Почетни услов је очигледно задовољен: $x(0) = S_0 x_0 = x_0$, а имамо и

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S_t x_0 = A S_t x_0 = A x(t).$$

Доказана је егзистенција. Докажимо и јединственост. Претпоставимо да постоји још једна функција y која задовољава (6). Тада је

$$y(t) - S_t x_0 = S_{t-s} y(s)|_{s=0}^{s=t} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(S_{t-s} y(s))\,\mathrm{d}s = \int_0^t (-A S_{t-s} y(s) + S_{t-s} A y(s))\,\mathrm{d}s = 0.$$

Дакле, $y(t) = S_t x_0$. □

Задаци

1. а) Нека је $\varphi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ функција за коју важи 1) $\varphi(0) = 1$; 2) $\varphi(s+t) \le \varphi(s)\varphi(t)$. Доказати да је

$$\gamma_0 = \lim_{t \to 0+} \frac{\log \varphi(t)}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log \varphi(t)}{t},$$

као и да је $\varphi(t) \le M e^{\gamma t}$, за све $\gamma > \gamma_0$ и за неку константу $M = M(\gamma)$.

б) Нека је S_t нека C_0-полугрупа. Доказати да је поредак полугрупе S_t једнак

$$\omega_0 = \lim_{t \to 0+} \frac{\log ||S_t||}{t}.$$

2. а) Нека је $\varphi : [0, +\infty) \to B(X)$ униформно непрекидна функција (не мора бити полугрупа) са инфинитезималним генератором A, тј. $\varphi'(0+) = A \in B(X)$. Доказати да је полугрупа S_t која има A за инфинитезимални генератор дата са $S_t = s - \lim_{n \to +\infty} \varphi(t/n)^n$.

б) Примењујући претходно на функцију $\varphi(t) = e^{tA} e^{tB}$ извести *Тротерову формулу*:

$$e^{A+B} = s - \lim_{n \to +\infty} \left(e^{A/n} e^{B/n} \right)^n.$$

3. а) Нека је $S_t : L^p(0, +\infty) \to L^p(0, +\infty)$, $S_t x(u) = x(u+t)$. Доказати да је S_t једна C_0-полугрупа и одредити њен инфинитезимални генератор A као и $\mathcal{D}(A)$. У случају $p = 2$ одредити индексе дефекта оператора A.

б) Шта се мења ако се уместо $L^p(0, +\infty)$ посматра $L^p(-\infty, +\infty)$?

4. Нека је k природан број и $S_t : L^p(\mathbf{R}^k) \to L^p(\mathbf{R}^k)$ дато са

$$S_t x(u) = \frac{1}{(4\pi t)^{k/2}} \int_{\mathbf{R}^k} e^{-\frac{|u-s|^2}{4t}} x(s)\,\mathrm{d}s.$$

а) Доказати да је S_t полугрупа контракција.

б) Доказати да је инфинитезимални генератор полугрупе S_t Лапласијан $\triangle$. Одредити домен инфинитезималног генератора.

в) Одредити решење параболичке једначине $\frac{\partial}{\partial t} g = \triangle g$, $g(x,t)|_{t=0} = f(x)$.

г) Шта се може рећи о спектру Лапласијана?

[Упутство: Прецтавити S_t преко конволуције $S_t x = W * x$ са погодно одабраном функцијом W. Користити и Фуријеову трансформацију.]

5. Дата је Пуасонова полугрупа P_t на Банаховом простору $L^p(\mathbf{R})$ са

$$P_t x(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2 + (s-u)^2} x(s)\,\mathrm{d}s.$$

Доказати да је реч о C_0-полугрупи.

6. Нека је A инфинитезимални генератор полугрупе контракција S_t. Доказати да је

$$S_t = s - \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{tA}{n} \right)^{-n}.$$

7. а) Нека је A самоадјунгован оператор на Хилбертровом простору H, такав да је $\sigma(A) \subseteq (0, +\infty)$. Доказати да апстрактан проблем

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(t) + Ax(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \\ x'(0) = x_0' \in H \end{cases}$$

има решење у облику $x(t) = \cos(tA^{1/2})x_0 + A^{-1/2}\sin(tA^{1/2})x_0'$, при чему су функције $\cos$ и $\sin$ дефинисане спектралном теоремом за неограничене самоадјунговане операторе.

б) Применити претходно на мешовити проблем

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} u(t,x) = -K^2 \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} u(t,x) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x), u_x'(0,x) = \psi(x) \end{cases}$$

10. ХИЛБЕРТОВИ C^*-МОДУЛИ

ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

10.1. Дефиниција модула. Нека је A произвољан прстен. *Десни модул* над A је скуп M на коме су дефинисане операције $+ : M \times M \to M$ и $\cdot : M \times A \to M$ за које важи

(1) $(M, +)$ је Абелова група. (Између осталог M поседује нулу 0 и супротан елемент $-x$ датог елемента x. Нећемо правити разлику између нуле у M и нуле у A, као ни разлику између унарног минуса у M, односно A.)
(2) $(x + y)a = xa + ya$ за све $x, y \in M$ и све $a \in A$;
(3) $x(a + b) = xa + xb$ за све $x \in M$ и све $a \in A$;
(4) $(xa)b = x(ab)$ за све $x \in M$ и све $a \in A$;

Дакле, модул је уопштење појма векторског простора, с тим што скалари не чине поље, већ прстен. Неке ствари су исте, на пример увек важи $x \cdot 0 = 0$, јер је $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, а у M важи закон скраћивања.

Међутим, има и разлика. Пре свега прстен не мора да има јединицу, а и када има не мора да важи

$$x \cdot 1 = x. \tag{1}$$

Пример је тзв. тривијалан модул, где је множење деифнисано са $x \cdot a = 0$ за све $x \in M$ и све $a \in A$. Ипак, сваки модул је директан збир једног модула у коме важи (1) и једног тривијалног модула. Изоморфизам се постиже пресликавањем $x \mapsto (x \cdot 1, x - x \cdot 1)$. Извођење детаља је једноставна вежба. Модул (над прстеном са јединицом) у коме важи (1) назива се *унитадан*.

Најбитнија разлика огледа се у појму базе. Нема сваки модул базу, а и када има базе могу имати различите кардиналности. Ако модул има базу назива се *слободан* модул.

10.2. Дефиниција Хилбертовог модула. Нека је M десни модул над C^*-алгебром A и нека је на њему дефинисано пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times M \to A$ које има својства:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ у смислу поретка у C^*-алгебри A. Такође, $\langle x, x \rangle = 0$ ако и само ако је $x = 0$;
(2) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle^*$;
(3) $\langle x, y_1 a_1 + y_2 a_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle a_1 + \langle x, y_2 \rangle a_2$.

Такав модул назива се *предхилбертов C^*-модул*. Пресликавање $\langle \cdot, \cdot \rangle$ назива се *A-вредносни скаларни производ* или само *скаларни производ*.

Пресликавање $M \in x \mapsto ||x||_M = || \langle x, x \rangle ||_A^{1/2} \in [0, +\infty)$, где је $|| \cdot ||_A$ ознака за норму у C^*-алгебри A јесте јенда норма на M. Наиме, како је $\langle x, x \rangle \geq 0$, то је $|| \langle x, x \rangle ||_A = \sup_\varphi \varphi(\langle x, x \rangle)$, односно $||x||_M = \sup_\varphi \varphi(\langle x, x \rangle)^{1/2}$, где се супремум узима по свим стањима φ. Међутим, како је пресликавање $M \times M \ni (x, y) \mapsto \varphi(\langle x, y \rangle)$ очигледно линеарно по y, антилинеарно по x и позитивно (истина не строго) на дијагонали, то израз $\varphi(\langle x, x\rangle)^{1/2}$ чини једну полунорму. Онда је и $||x||_M$ полунорма као супремум полунорми. Због услова (2), $||x||_M$ је норма.

Убудуће нећемо стављати A односно M у индексу норме.

Ако је предхилбертов модул M комплетан и односу на тако задату норму, онда га називамо *Хилбертов C^*-модул*.

10.3. Хилбертов модул као векторски простор над C. Нека је M Хилбертов C^*-модул над C^*-алгебром A. Ако је A унитална, она у себи садржи изоморфну копију поља комплексних бројева, наиме елементе облика $\lambda 1$, $\lambda \in \mathbf{C}$, где је 1 јединица алгебре A. Тада се на M на природан начин дефинише множење комплексним скаларом: $\mathbf{C} \times M \ni (\lambda, x) \mapsto x \cdot (\lambda 1)$. У том случају се једноставно проверава да важи

$$x \cdot 1 = x, \qquad \langle x, y\lambda\rangle = \lambda \langle x, y\rangle, \qquad \langle \lambda x, y\rangle = \overline{\lambda} \langle x, y\rangle . \tag{2}$$

Тако M уједно постаје и Банахов простор над $\mathbf{C}$.

Исто се може постићи и када A нема јединицу, само је извођење нешто сложеније. Ако A нема јединицу, она ипак има апроксимативну јединицу, означимо је са e_α. За било које $x \in M$, фамилија $x \cdot e_\alpha$ је Кошијева фамилија у норми $||\cdot||_M$, јер је

$$||xe_\alpha - xe_\beta||^2 = e_\alpha \langle x, x\rangle e_\alpha - e_\alpha \langle x, x\rangle e_\beta - e_\beta \langle x, x\rangle e_\alpha + e_\beta \langle x, x\rangle e_\beta \to 0.$$

Заједно са њом и фамилија $x \cdot (\lambda e_\alpha)$ је Кошијева и стога конвергентна, те се отуда λx може дефинисати као њен лимес. Тада се формуле (2) изводе граничним прелазом, нпр.

$$\langle x, \lambda y\rangle = \lim_\alpha \langle x, y\lambda e_\alpha\rangle = \lim_\alpha \lambda \langle x, y\rangle e_\alpha = \lambda \langle x, y\rangle .$$

Дакле, без обзира на присуство јединице у A, M је увек Банахов простор над $\mathbf{C}$.

Последње омогућава да се, у случају потребе, јединица допише алгебри A.

10.4. Унитализација модула. Нека је M Хилбертов C^*-модул над C^*-алгебром A која није унитална. Нека је $A^+ = \{a + \lambda 1 \mid a \in A, \lambda \in \mathbf{C}\}$ њена уинитализација. Тада се M на природан начин може снабдети структуром модула над A^+. Наиме, ставимо

$$x \cdot (a + \lambda 1) := x \cdot a + \lambda x.$$

У том случају важи

$$M = \overline{M \cdot A} \tag{3}$$

Заиста, за произвољно $x \in M$ имамо

$$||x - xe_\alpha||^2 = \langle x, x\rangle - \langle x, x\rangle e_\alpha - e_\alpha \langle x, x\rangle + e_\alpha \langle x, x\rangle e_\alpha \to 0,$$

при чему је e_α апроксимативна јединица алгебре A.

10.5. Својства A-вредносног скаларног производа. а) $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$;

б) $\langle x_1 a_1 + x_2 a_2, y\rangle = a_1^* \langle x_1, y\rangle + a_2^* \langle x_2, y\rangle$;

в) Важи тзв. поларизациони идентитет

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle x + i^k y, x + i^k y\right\rangle .$$

г) $||x \cdot a|| \le ||x||\,||a||$ за $x \in M$ и $a \in A$;

д) Уместо класичне Коши Шварцове неједнакости важи

$$|\langle x, y\rangle| \le ||y||\,\langle x, x\rangle^{1/2} , \tag{4}$$

при чему је $|\langle x, y\rangle|$ апсолутна вредност елемента C^*-алгебре, тј. $|\langle x, y\rangle| = (\langle x, y\rangle^* \langle x, y\rangle)^{1/2}$. Посебно, важи и

$$||\langle x, y\rangle|| \le ||x||\,||y||;$$

Доказ. а), б) и в) прост рачун;

г) Имамо $\langle xa, xa\rangle = a^* \langle x, x\rangle a \le a^* ||x||^2 a$, јер је $\langle x, x\rangle \le ||\langle x, x\rangle|| e$ (макар само унитализацији алгебре A) и отуда $||xa||^2 = ||\langle xa, xa\rangle|| \le ||x||^2 ||a^* a|| = ||x||^2 ||a||^2$;

ђ) За било које $a \in A$ имамо
$$0 \le \langle x - ya, x - ya \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle a - a^* \langle x, y \rangle + a^* \langle y, y \rangle a,$$
а посебно за $a = || \langle y, y \rangle ||^{-1} \langle x, y \rangle$ то постаје
$$\frac{2}{|| \langle y, y \rangle ||} \langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle \le \langle x, x \rangle + \frac{1}{|| \langle y, y \rangle ||^2} \langle x, y \rangle^* \langle y, y \rangle \langle x, y \rangle .$$
Међутим, како је $\langle y, y \rangle \le || \langle y, y \rangle || 1$, то је и $\langle x, y \rangle^* \langle y, y \rangle \langle x, y \rangle \le || \langle y, y \rangle || \langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle$, па имамо
$$\frac{2}{|| \langle y, y \rangle ||} \langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle \le \langle x, x \rangle + \frac{1}{|| \langle y, y \rangle ||} \langle x, y \rangle^* \langle x, y \rangle ,$$
одакле добијамо
$$| \langle x, y \rangle |^2 \le \langle x, x \rangle || \langle y, y \rangle ||.$$
Коши Шварцова неједнакост следи јер је $a \mapsto a^{1/2}$ оператор монотона функција.

Примедба: У општем случају, неједнакост $| \langle x, y \rangle | \le \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}$, као ни $| \langle x, y \rangle |^2 \le \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ није тачна. □

10.6. Примери Хилбертових C^*-модула. (i) Нека је A C^*-алгебра. На скупу $A^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k \in A\}$ дефинишемо десно множење са
$$x \cdot a = (x_1 a, x_2 a, \ldots, x_n a),$$
а скаларни производ са
$$\langle x, y \rangle = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \cdots + x_n^* y_n.$$

Алгебраска својства и комплетност се лако проверавају. Овај модул називамо *слободан коначно ґенерисан модул*, премда би одредница „алгебарски коначно генерисан“ била прецизнија.

(ii) Нека је A C^*-алгебра и J затворен десни идеал у A. Тада је J Хилбертов C^*-модул, ако је множење наслеђено из A, а скаларни производ дат са $\langle a, b \rangle = a^* b$. Тада је норма елемента $a \in J$ дата са $||a^* a||^{1/2}$ односно поклапа се са нормом у C^*-алгебри. Отуда је затвореност идеала довољна за комплетност. Дакле, модул, за разлику од векторског простора, може у скуповном смислу бити мањи од прстена скалара.

Између осталог, сама алгебра је модул над самом собом. То је специјалан случај овог примера за $J = A$, али и претходног за $n = 1$.

(iii) Нека је A C^* алгебра. Формирамо скуп
$$l^2(A) = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \mid x_k \in A, \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^* x_k \text{ конвергира у норми алгебре } A\}.$$
На $l^2(A)$ уводимо десно множење и скаларни производ са
$$x \cdot a = (x_1 a, x_2 a, \ldots, x_n a, \ldots), \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k^* y_k.$$
Последњи ред конвергира у норми алгебре A, јер је као у доказу Коши Шварцове неједнакости
$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} x_k^* y_k \right| \le \left\| \sum_{k=n}^{n+p} y_k^* y_k \right\|^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{n+p} x_k^* x_k \right)^{1/2}$$
а одатле је
$$\left\| \sum_{k=n}^{n+p} x_k^* y_k \right\| \le \left\| \sum_{k=n}^{n+p} y_k^* y_k \right\|^{1/2} \left\| \sum_{k=n}^{n+p} x_k^* x_k \right\|^{1/2} .$$

Овај модул назива се *сшандардни Хилбершов модул над* A, а поред ознаке $l^2(A)$ користи се и ознака $\mathcal{H}_A$.

Видећемо убрзо да је стандардни Хилбертов модул у неку руку основни пример модула.

(iv) На сличан начин изводимо и следећи пример. Ако су M_i, $i \in I$ Хилбертови C^*-модули, онда се на скупу
$$M = \{(x_i) \in \prod_{i \in I} M_i \mid \sum_{i \in I} x_i^* x_i \text{ конвергира у норми алгебре } A\}.$$

на сличан начин може увести структура Хилбертовог C^*-модула.

Овај модул обележавамо са

$$M = \oplus_{i\in I} M_i,$$

и називамо *дирек̄шна сума* модула M_i, $i \in I$.

10.7. Ортогоналност. Кажемо да су вектори $x,\ y \in M$ *ор̄шо̄гонални* ако је $\langle x, y\rangle = 0$. То облежавамо са $x \perp y$. Релација је очито симетрична. Нула вектор је ортогоналан на сваки други вектор.

За дати скуп $S \subseteq M$, његову *ор̄шо̄гоналну до̄йуну* дефинишемо са

$$S^\perp = \{y \in M \mid x\perp y \text{ за све } x \in S\}.$$

Због непрекидности и A-линеарности скаларног производа лако закључујемо да је $S^\perp$ затворен подмодул модула M.

До сада је аналогија са Хилбертовим просторима била потпуна. Прво размимоилажење појављује се код једнакости $S^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{L}in_A(S)}$ која не мора тачна у општем случају.

Пример. Нека је A нека C^*-алгебра и J идеал у A који има својство да $ax = 0$ за све $a \in J$ повлачи $x = 0$. (На пример, можемо узети $A = C[0,1]$, $J = \{x \in C[0,1] \mid x(0) = 0\}$.) Тада је J затворен подмодул модула A - оба над A. Међутим, $J^\perp = \{x \in A \mid \langle a, x\rangle = a^* x = 0 \text{ за све } a \in J\} = \{0\}$. Одатле је $J^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = A$, док је $\overline{\mathcal{L}in_A(J)} = J$.

Оне затворене подмодуле N модула M за које важи

$$N^{\perp\perp} = N, \qquad \text{тј.} \qquad M = N \oplus N^\perp \tag{5}$$

називамо *ор̄шо̄гонално до̄йуњиви*, односно само *до̄йуњиви* ако не постоји опасност од забуне. Иначе забуна може настати, јер постоје подмодули који нису ортогонално допуњиви, али јесу тополошки допуњиви, тј. постоји подмодул N, такав да није тачно (5) али постоји затворени подмодул L такав да је $M = N \dotplus L$, односно такав да за свако $x \in M$ постоје јединствени $y \in N$ и $z \in L$ са својством $x = y + z$.

Пример. Нека су J и A као у претходном примеру, и нека је $N = \{(a, -a) \mid a \in J\}$. То је затворен подмодул модула $J \oplus A$. С једне стране је

$$N^\perp = \{(x, y) \in J \oplus A \mid \langle (a, -a), (x, y)\rangle = a^* x - a^* y = 0 \text{ за све } a \in J\} = \{(b, b) \mid b \in J\},$$

и стога $N \oplus N^\perp = J \oplus J \subsetneqq J \oplus A$, тј. N није ортогонално допуњив. С друге стране, $N \dotplus L = J \oplus A$, ако се узме $L = \{(0, x) \mid x \in A\}$, јер је $(a, x) = (a, -a) + (0, x + a)$.

Подмодул N је ортогонално допуњив ако и само ако постоји ортогноална пројекција на њега, тј. ако и само ако постоји $P \in B^a(M)$, тђ. $P = P^* = P^2$ и $Px = x$ ако и само ако $x \in N$. Заиста, ако је N ортогонално допуњив, онда је $M = N \oplus N^\perp$, па за $x \in M$ постоје јединствени $y \in N$, $z \in N^\perp$ тђ. $x = y + z$. Тада ставимо $Px := y$. Обратно, ако постоји пројектор P са назначеним својствима онда је $N^\perp = (I - P)(M)$. Детаљи се препуштају читаоцу.

ОПЕРАТОРИ

10.8. Дефиниција. Нека су M и N Хилбертови C^*-модули над C^*-алгебром A. Како је већ установљено, M и N су и Банахови простори над $\mathbf{C}$, те је, стога, $L(M; N)$ скуп свих ограничених $\mathbf{C}$-линеарних пресликавања такође Банахов простор над $\mathbf{C}$. Међу њима издвајамо она пресликавања која су A-линеарна, тј. она за која важи

$$T(x \cdot a) = Tx \cdot a, \qquad \text{за све } x \in M, a \in A.$$

Такав скуп означавамо са $B(M; N)$. Ако је $A = \mathbf{C}$ не само да нема разлике између $L(M; N)$ и $B(M; N)$ него и сваки оператор из $B(M; N)$ има адјунгован. Адјунгован оператор дефнишемо једнакошћу

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle \tag{6}$$

где је $\langle \cdot, \cdot\rangle$, разуме се, ознака за A-вредноси скаларни производ.

У општем случају нема сваки оператор адјунгован (видети пример који следи). Стога уводимо, као посебну класу, скуп A-линеарних оператора који имају адјунгован или који допуштају адјунговање. Тај скуп означавамо са $B^a(M; N)$.

Занимљиво је да из релације (6) непосредно следи да је T A-линеаран и ограничен (а исто и за T^*). Наиме, десна страна је A-антилинеарна по x, па таква мора бити и лева, одакле следује A-линеарност, док затвореност следује на виђен начин из теореме о затвореном графику. Заиста, ако $x_n \to x$ и $Tx_n \to y$ тада због непрекидности A-скаларног производа имамо

$$\langle Tx - y, z\rangle = \langle x, T^*z\rangle - \langle y, z\rangle = \lim_{n\to+\infty}(\langle x_n, T^*z\rangle - \langle Tx_n, z\rangle) = 0,$$

одакле је $Tx = y$.

10.9. Пример [оператор који нема адјунгован]. Нека је $A = C[0,1]$ и нека су $\varphi_n \in A$, позитивне функције чији је носач садржан у интервалу $[1/(n+1), 1/n]$, и чија је норма једнака 1 (рецимо део по део линеарне). На стандардном модулу $l^2(A)$ дефинишемо пресликвање T са

$$T(x_1, x_2, \dots) = (\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + \dots, 0, 0, \dots).$$

Нема сумње, реч је о A-линеарном пресликвању. Коректно је дефинисан, јер ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n x_n$ конвергира у норми простора $C[0,1]$. Заиста, како је $\varphi_n\varphi_m = 0$ за $m \neq n$ то је

$$||\sum_{k=n}^{n+p} \varphi_k x_k|| = \max_{n\le k\le n+p} ||\varphi_k x_k|| \le \max_{n\le k\le n+p} ||x_k|| \le ||\sum_{k=n}^{n+p} x_k^* x_k||^{1/2} \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Из истих разлога видимо и да је T ограничен.

Међутим, тај оператор нема адјунгован. Наиме, тада би морало да важи $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$, па ако означимо $z = T^*y$, имамо

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n x_n\right)^* y_1 = x_1^* z_1 + x_2^* z_2 + \dots,$$

односно узимајући $y = (1, 0, 0, \dots)$ и $x = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ где је јединица на n-том месту $\varphi_n = z_n$, односно

$$T^*y = (\varphi_1, \varphi_2, \dots).$$

То међутим није могуће, јер ред $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n^2$ не конвергира у норми алгебре A.

10.10. C^*-алгебра $B^a(M)$. Нека су M и N Хилбертови C^*-модули над A. Скуп $B^a(M;N)$ је увек Банахов простор. Наиме, једноставно се проверава да из $||T_n - T|| \to 0$ и $T_n \in B^a(M;N)$ следује да и $T \in B^a(M;N)$. Заиста, како је $||T|| = \sup ||Tx||_M$, где се супремум узима по свим јединичним векторима, то из $||T_n - T|| \to 0$ следује и да $T_n x \to Tx$ за сваки вектор $x \in M$. Отуда је $T(xa) = \lim_{n\to+\infty} T_n(xa) = \lim_{n\to+\infty} T_n x \cdot a = Tx \cdot a$.

Да бисмо доказали да гранични оператор такође има адјунгован, изведимо прво да је $||T|| = ||T^*||$. За јединични вектор x имамо

$$||T^*x||^2 = ||\,\langle T^*x, T^*x\rangle\,|| = ||\,\langle TT^*x, x\rangle\,|| \le ||TT^*x||\,||x|| \le ||T||\,||T^*x||,$$

тј. $||T^*x|| \le ||T||$, одакле је (узимајући супремум) $||T^*|| \le ||T||$. Обратна неједнакост следи јер је $T^{**} = T$.

Отуда, ако $||T_n - T|| \to 0$, онда је низ T_n Кошијев, па је Кошијев и T_n^* и тиме конвергентан. Лако се проверава да су лимеси низова T_n и T_n^* један другом адјунговани.

Са $B^a(M)$ скраћено обележавамо $B^a(M;M)$. Према претходном, $B^a(M)$ је Банахов простор. Он је и Банахова алгебра, јер је из $L(M)$ наслеђена неједнакост $||TS|| \le ||T||\,||S||$. Та Банахова алгебра има инволуцију која је чини C^*-алгебром, јер је за јединични вектор x:

$$||Tx||^2 \le ||\,\langle Tx, Tx\rangle\,|| = ||\,\langle T^*Tx, x\rangle\,|| \le ||T^*T||,$$

па узимајући супремум налазимо $||T||^2 \le ||T^*T||$. Обратна неједнакост следује из $||T^*|| = ||T||$.

10.11. Став [карактеризација позитивних оператора]. Нека је $T \in B^a(M)$. Тада су следећи услови еквивалентни:

(i) T је позитиван елемент C^*-алгебре $B^a(M)$;

(ii) За све $x \in M$ важи $\langle Tx, x\rangle \ge 0$.

Доказ. $(i) \Rightarrow (ii)$. Ако је $T \geq 0$ онда је $T = S^*S$ за неко $S \in B^a(M)$, па имамо $\langle Tx, x\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle = \langle Sx, Sx\rangle \geq 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Из услова (ii) посредством поларизационог идентитета можемо закључити да је $T = T^*$. Заиста, како је $x + i^k y = i^k(y + (-i)^k x)$, то је

$$4\langle Tx, y\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle T(x + i^k y), x + i^k y\right\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \left\langle T(y + (-i)^k x), y + (-i)^k x\right\rangle,$$

па је

$$4\langle Tx, y\rangle^* = \sum_{k=0}^{3} (-i)^k \left\langle T(y + (-i)^k x), y + (-i)^k x\right\rangle = 4\langle Ty, x\rangle = 4\langle x, Ty\rangle^* = 4\langle T^*x, y\rangle^*.$$

Зато је $T = T_+ - T_-$, где су $T_+, T_- \geq 0$ такви да је $T_+T_- = 0$. Како је и $T_-^3 \geq 0$, према претходном смеру имамо

$$0 \leq \left\langle T_-^3 x, x\right\rangle = \langle T_-(T_+ - T)T_- x, x\rangle = -\langle TT_- x, T_- x\rangle \leq 0,$$

односно $\left\langle T_-^3 x, y\right\rangle = 0$ за све $x, y \in M$ (поларизациони идентитет), одакле је $T_-^3 = 0$. Одатле је и $T_- = 0$, тј. $T = T_+ \geq 0$. □

10.12. Став [карактеризација ограничености]. За $T \in B^a(M)$ важи

$$||T|| = \inf\{K \mid \langle Tx, Tx\rangle \leq K^2 \langle x, x\rangle, \text{ за све } x \in M\}. \tag{7}$$

Доказ. Како је $\langle x, x\rangle \leq ||x||^2 \cdot 1$, то за оне K за које је $\langle Tx, Tx\rangle \leq K^2\langle x, x\rangle$ имамо $\langle Tx, Tx\rangle \leq K^2||x||^2 \cdot 1$, одакле је $||Tx||^2 = ||\langle Tx, Tx\rangle|| \leq K^2||x||^2$. Зато је $||T|| \leq K$, односно важи $\leq$ у (7).

Што се тиче обратне неједнакости, из C^*-услова имамо $0 \leq T^*T \leq ||T||^2 I$, односно $||T||^2 I - T^*T \geq 0$, где је са I означено идентичко пресликавање модула M. Стога је према претходном ставу

$$0 \leq \left\langle ||T||^2 x - T^*Tx, x\right\rangle = ||T||^2\langle x, x\rangle - \langle Tx, Tx\rangle.$$

□

10.13. Став. Нека је $T \in B^a(M)$. Тада је:

(i) $\ker T = \ker |T|$, и више $||Tx|| = ||\,|T|x\,||$ за све $x \in M$;

(ii) $\ker T^* = T(M)^\perp$, и тиме $(\ker T^*)^\perp = (T(M))^{\perp\perp} \supseteq \overline{T(M)}$; међутим, у општем случају се не може постићи једнакост.

Доказ. (i) Као и у случају Хилбертових простора имамо $\langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \langle |T|x, |T|x\rangle$ и отуда $||Tx|| = ||\,|T|x||$ одакле је $\ker T = \ker |T|$;

(ii) $x \in \ker T^*$ ако и само ако $\langle T^*x, y\rangle = 0$ за све $y \in M$, па како је $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ то је еквивалентно са $x \perp T(M)$. □

10.14. Став [о поларном разлагању]. Нека је $T \in B^a(M)$. Тада су следећи услови еквивалентни:

(i) T има поларно разлагање у $B^a(M)$, тј. постоји делимична изометрија $W \in B^a(M)$ таква да је $T = W|T|$, $\ker W = \ker T$, $\ker W^* = \ker T^*$, $W(M) = \overline{T(M)}$, $W^*(M) = \overline{T^*(M)}$;

(ii) подмодули $\overline{T(M)}$ и $\overline{|T|(M)}$ су ортогонално допуњиви;

(iii) $M = \ker |T| \oplus \overline{|T|(M)} = \ker T^* \oplus \overline{T(M)}$.

Доказ. $(i) \Rightarrow (ii)$ Ако постоји W, онда су W^*W и WW^* пројектори, слике тих пројектора су редом $W^*(M) = \overline{T^*(M)}$ и $W(M) = \overline{T(M)}$ и то су према ??? допуњиви подмодули.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Ако су подмодули $\overline{T(M)}$ и $\overline{|T|(M)}$ допуњиви, онда су због претходног става њихове ортогоналне допуне, редом, једнаке $\ker T^*$, односно $\ker |T|^* = \ker |T|$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Конструишемо пресликавање $W : |T|(M) \to T(M)$ са $W(|T|x) = Tx$. Оно је добро дефинисано, јер ако је $|T|x = |T|y$, онда $x - y \in \ker |T| = \ker T$, па је $T(x - y) = 0$, тј. $Tx = Ty$. Добијено пресликавање чува A-скаларни производ, јер је

$$\langle W|T|x, W|T|x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle = \left\langle |T|^2 x, x\right\rangle = \langle |T|x, |T|x\rangle,$$

одакле лако на основу поларизационог идентитета налазимо $\langle W|T|x, W|T|y\rangle = \langle |T|x, |T|y\rangle$. Отуда је W ограничено, па се се може продужити до пресликавања на затворењу $\overline{|T|(M)}$ (које опет означавамо са W да не би компликовали ознаке). Најзад, W је A-линеарно, јер су таква T и $|T|$, тј. $W(|T|xa) = Txa = (Tx)a = (W|T|x)a$. Пресликавање W продужимо нулом на $\overline{|T|(M)}^{\perp} = \ker|T| = \ker T$.

Сада конструишемо пресликавање $V : T(M) \to |T|(M)$ са $VTx = |T|x$. Да је V A-линеарно, да је изометрија, те да се може породужити на затворење $\overline{T(M)}$ закључујемо слично као и малопре. Остаје још да докажемо да је $V = W^*$. Заиста, нека су $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \ker|T|$, $x_2 = Tz \in |T|(M)$ и $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in \ker T^*$, $y_2 = Tu \in T(M)$. Тада је

$$\langle Wx, y\rangle = \langle Wx_1, y_1\rangle + \langle Wx_1, y_2\rangle + \langle Wx_2, y_1\rangle + \langle Wx_2, y_2\rangle .$$

Како $x_1 \in \ker|T|$ и $W|_{\ker|T|} = 0$, то су прва два сабирка једнака нули, па имамо

$$\langle Wx, y\rangle = \langle W|T|z, y_1\rangle + \langle W|T|z, y_2\rangle = \langle Tz, y_1\rangle + \langle Tz, y_2\rangle) = \langle z, T^*y_1\rangle + \langle z, T^*y_2\rangle .$$

Међутим, $T^*y_1 = 0$, па је

$$\langle Wx, y\rangle = \langle z, T^*y_2\rangle = \langle z, T^*Tu\rangle = \left\langle z, |T|^2u\right\rangle = \langle |T|z, |T|u\rangle = \langle x_2, |T|u\rangle .$$

Слично изводимо

$$\langle x, Vy\rangle = \langle x_1, VTu\rangle + \langle x_2, VTu\rangle = \langle x_1, |T|u\rangle + \langle x_2, |T|u\rangle = \langle |T|x_1, u\rangle + \langle x_2, |T|u\rangle = \langle x_2, |T|u\rangle ,$$

јер је $x_1 \in \ker|T|$. Како је $\ker T^* \oplus T(M)$ густ у $\ker T^* \oplus \overline{T(M)} = M$, а $\ker|T| \oplus |T|(M)$ густ у $\ker|T| \oplus \overline{|T|(M)} = M$, доказ је завршен. ☐

10.15. Пребројиво генерисани модули. За Хилбертов модул M кажемо да је *пребројиво генерисан* ако у њему постоји пребројив скуп $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ такав да је $\mathcal{L}in_A\{x_1, x_2, \dots\}$ густ у M, односно ако је сваки други вектор из M лимес коначних A-линеарних комбинација неког пребројивог скупа. Скуп $\{x_1, x_2, \dots\}$ називамо *генераторски скуп*.

Основни пример пребројиво генерисаног модула је $l^2(A)$ над униталном C^*-алгебром A, у коме је скуп тзв. базних вектора $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, где је јединица на n-том месту, генераторски. У одређеном смислу, тај пример је и једини. Прецизније важи:

10.16. Теорема [Каспаровљева о стабилизацији]. Нека је M пребројиво генерисан модул над A. Тада је $M \oplus l^2(A) \cong l^2(A)$.

Другим речима, сваки пребројиво генерисан модул може се видети као подмодул модула $l^2(A)$.

Доказ. Претпоставимо за почетак да је алгебра A унитална, и са e_n означимо њене базне векторе. Нека вектори x_n, $n \geq 1$ чине генераторски скуп модула M. Формирамо низ y_n у коме се сваки од ветора x_k појављује бесконачно много пута и дефинишимо пресликавање $T : l^2(A) \to M \oplus l^2(A)$ са

$$Tx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}(y_n \oplus (1/2^n)e_n)\langle x, e_n\rangle , \qquad \text{тј.} \qquad Te_n = \frac{1}{2^n}y_n \oplus \frac{1}{4^n}e_n, \tag{8}$$

Тада се непосредно проверава да је

$$T^*(y \oplus z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}e_n\langle y \oplus x, y_n \oplus (1/2^n)e_n\rangle . \tag{9}$$

Тврдимо да је слика $T(l^2(A))$ густа у $M \oplus l^2(A)$. Заиста, због (8), слика садржи све векторе $y_n \oplus (1/2^n)e_n$, односно садржи све векторе облика $x_k \oplus (1/2^p)e_p$, кад год је $y_p = x_k$. Како таквих индекса p има бесконачно много, и како $(1/2^p)e_p \to 0$, то затворење слике $\overline{T(l^2(A))}$ садржи вектор $x_k \oplus 0$. С друге стране, како је $0 \oplus e_k = 4^kTe_k - 2^kx_k \oplus 0$, то и $0 \oplus e_k \in \overline{T(l^2(A))}$.

Доказаћемо да $|T|$ има густу слику, тако што ћемо утврдити да T^*T има густу слику, што је довољно, јер је $T^*T(l^2(A)) = |T|^2(l^2(A)) \subseteq |T|(l^2(A))$.

На основу (8) и (9) имамо $Te_n = 2^{-n}y_n \oplus 4^{-n}e_n$ и отуда

$$T^*Te_n = T^*(2^{-n}y_n \oplus 4^{-n}e_n) = e_n(4^{-n}\langle y_n, y_n\rangle + 16^{-n}1),$$

где је 1 ознака за јединицу алгебре A. Елемент $a = 4^{-n}\langle y_n, y_n\rangle + 16^{-n}1$ је инвертибилан, јер је $a \geq 16^{-n}1$, па је $T^*T(e_na^{-1}) = e_n$. Тако слика $T^*T(l^2(A))$ садржи све базне векторе, и стога је густа.

Како су затворења слика $\overline{|T|(l^2(A))}$, односно $\overline{T(l^2(A))}$ једнака читявим модулима $M \oplus l^2(A)$, односно $l^2(A)$ она су допуњиви модули, па према Ставу о поларном разлагању постоји делимична изометрија W таква да је $T = W|T|$. Како је у овом случају $\ker|T| = \ker T^* = \{0\}$, делимична изометрија W је, заправо, унитарно прелсикавање, и оно остварује изоморфизам између $l^2(A)$ и $M \oplus l^2(A)$.

Овиме је тврдња доказана у случају да A има јединицу. У случају да A нема јединицу, означимо са $\tilde{A}$ њену унитализацију, и приметимо да је $\overline{l^2(\tilde{A}) \cdot A} = l^2(A)$. Такође, како је већ напоменуто у одељку 10.4 M се може сматрати и модулом над $\tilde{A}$, и тада је $\overline{M \cdot A} = M$ – формула (3). Сада имамо

$$M \oplus l^2(\tilde{A}) = (\overline{M \cdot A}) \oplus (l^2(\tilde{A}) \cdot A) = \overline{(M \oplus l^2(\tilde{A})) \cdot A} \cong \overline{l^2(\tilde{A}) \cdot A} = l^2(A).$$

□

„КОМПАКТНИ“ ОПЕРАТОРИ И ЕКВИВАЛЕНЦИЈА У СМУСЛУ МОРИТЕ

10.17. „Компактни“ оператори. За два дата вектора $y, z \in M$ дефинишемо пресликавање $\theta_{y,z} : M \to M$ са

(10) $$\theta_{y,z}(x) = z \langle y, x \rangle .$$

Због Коши Шварцове неједнакости $\theta_{y,z}$ је ограничен:

$$||\theta_{y,z}(x)|| = ||z \langle y, x \rangle || \le ||z|| \, || \langle y, x \rangle || \le ||z|| \, ||y|| \, ||x||, \qquad \text{тј.} \qquad ||\theta_{y,z}|| \le ||y|| \, ||z||.$$

Оператор $\theta_{y,z}$ има адјунгован и то је $\theta_{y,z}^* = \theta_{z,y}$ јер је

$$\langle \theta_{y,z} x, u \rangle = \langle z \langle y, x \rangle , u \rangle = \langle y, x \rangle^* \langle z, u \rangle = \langle x, y \rangle \langle z, u \rangle = \langle x, y \langle z, u \rangle \rangle = \langle x, \theta_{z,y} u \rangle .$$

Затворење A-линеарног омотача оператора облика (10) означавамо са $K^a(M)$, а његове елементе називамо *„компактним“ операторима*. Назив потиче отуда што се оператори облика (10) могу сматрати операторима A-ранга 1 (слика им је садржана у подмодулу zA), а њихове линеарне комбинације операторима коначног ранга. Међутим „компактни“ оператори немају својство да ограничене скупове пресликавају у релативно компактне. Отуда наводници.

Скуп $K^a(M)$ је двострани идеал у $B^a(M)$. Наиме,

(11) $$T\theta_{y,z} = \theta_{y,Tz}, \qquad \theta_{y,z} T = \theta_{T^* y, z},$$

што се лако проверава.

У овом тренутку, M има структуру двостраног A-B-бимодула, где је $B = B^a(M)$ или $B = K^a(M)$. Детаљније, то значи да се вектор $x \in M$ може с десна множити елементима C^*-алгебре A, а с лева елементима C^*-алгебре B. Ово друго множење се своди на израчунавање вредности оператора T у тачки x, тј. $T \cdot x = Tx$. Може ли M бити Хилбертов C^*-модул над $B = K^a(M)$ (или над $B^a(M)$? У ту сврху, потребно је множење с лева претворити у множење с десна и увести B-вредносни скаларни производ. Прво није проблем, може се учинити читањем формула „по арапски“. Што се тиче скаларног производа уводимо га са $\langle y, z \rangle_B = \theta_{y,z}$. Тада се формуле (11) могу записати и као

$$T \langle y, z \rangle_B = \langle y, Tz \rangle_B , \qquad \langle y, z \rangle_B T = \langle T^* y, z \rangle_B ,$$

односно

$$\langle y, z \rangle_B T = \langle y, zT \rangle_B , \qquad T \langle y, z \rangle_B = \langle yT^*, z \rangle_B ,$$

ако преврнемо поредак множења, и то чини да M постане Хилбертов C^*-модул над $K^a(M)$, али и над широм алгебром $B^a(M)$. Логичнији избор је мања алгебра $K^a(M)$, због дефиниције *пуног модула*. Наиме, за модул M над A кажемо да је *пун* ако је затворење скупа $\langle M, M \rangle$ једнако A, тј. ако су елементи облика $\langle x, y \rangle$, $x, y \in M$ густи у A. Тако је M пун над $K^a(M)$, али у општем случају није пун над $B^a(M)$.

10.18. Дефиниција [еквиваленција у смислу Морите]. Нека су A и B две C^*-алгебре. Кажемо да је A *Морита еквивалентна* алгебри B, ако постоји пун модул M над A, такав да је $B \cong K^a(M)$. То обележавамо са $A \overset{M}{\sim} B$.

У питању је релација еквиваленције. Да је $A \overset{M}{\sim} A$ доказујемо ако узмемо $M = A$. Тада су оператори облика (10) $\theta_{y,z} x = z \langle y, x \rangle = zy^* x$, тј. $\theta_{y,z} = L_{zy^*}$, где је L_a ознака за оператор левог множења са a. У питању је изоморфизам, јер је, наиме, $K^a(A) \cong A \otimes_A A$ (пресликавање $A \times A \ni (y, z) \mapsto \theta_{y,z}$ је A-билинеарно), док се лако изводи да је $A \otimes_A A \cong A$, путем пресликавања $y \otimes z \mapsto yz$. Има овде мала петљанција са „звездовањем“... али пролази.

Ако је $A \overset{M}{\sim} B$ путем модула M, онда је $B \overset{M}{\sim} A$ путем модула M^{op} који се добија од M читањем множења наопако (по арапски). То нећемо чинити, него ћемо само проверити како изгледају оператори облика $\theta_{y,z}$ на $B \cong K^a(M)$. Имамо

$$\theta_{y,z}(x) = \langle y, x\rangle_B\, z = \theta_{y,x}(z) = x\,\langle y, z\rangle_A\,,$$

одакле пресликавање $\theta_{y,z} \mapsto \langle y, z\rangle$ остварује изоморфизам између $K^a(M^{op})$ и A (оба израза су A билинеарна).

Најзад, транзитивност. Ако је $A \overset{M}{\sim} B$ и $B \overset{M}{\sim} C$, онда постоје модули M и N над A, односно B, такви да је $B \cong K^a(M)$, $C \cong K^a(N)$. Формирамо модул $N \otimes_B M$ генерисан елементарним тензорима $y \otimes x$, $x \in M$, $y \in N$ уз иднификацију $yb \otimes x \sim y \otimes bx$, за $b \in B$. Тај модул ће остварити $A \overset{M}{\sim} C$.

10.19. Теорема [о модулу неизворности]. Нека су A и B две C^*-алгебре. Тада је $A \overset{M}{\sim} B$ ако и само ако је $Rep(A) \cong Rep(B)$, где $Rep(A)$ означава скуп свих неизоморфних недегенерисаних репрезентрација алгебре A.

Доказ. За сада без доказа..... $\square$

ДУАЛНОСТ

10.20. Дефиниција. Нека је M Хилбертов C^*-модул над A, Сама C^*-алгебра A је један Хилбертов модул над самом собом. Елементе скупа $B(M; A)$, а то су сва A-линеарна пресликавања $\varphi : M \to A$ (која не морају имати адјунговано), називамо *A-линеарни функционали*, само *A-функционали* или просто *функционали* ако не постоји опасност од забуне.

Скуп свих A-функционала на M називамо *дуални модул*, и обележавамо са M'. На M' постоји природна структура модула. Наиме, множење са $a \in A$ задајемо са $(\varphi \cdot a)(x) = a^*\varphi(x)$, а сабирање са $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Међутим, постоје одређене тешкоће приликом дефинисања скаларног производа на M'.

Скаларни производи са фиксираним елементом из M чине основни пример A-функционала. Наиме, за $y \in M$ пресликвање $\varphi_y : M \to A$ задато са

$$\varphi_y(x) = \langle y, x\rangle \tag{12}$$

је A-линеарно и ограничено, јер је $\varphi_y(xa) = \langle y, xa\rangle = \langle y, x\rangle\, a = \varphi_y(x)a$, и $||\varphi_y(x)|| = ||\,\langle y, x\rangle\,|| \le ||y||\,||x||$. Оно има адјунговано, и то је пресликавање $\varphi_y^* : A \to M$ дато са $\varphi_y^*(a) = y \cdot a$. Да је заиста реч о пресликвању које је адјунговано пресликавању φ_y видимо из

$$\langle \varphi_y(x), a\rangle_A = \varphi_y(x)^* a = \langle x, y\rangle_M\, a = \langle x, ya\rangle_M\,.$$

Тиме је задато пресликавање $\Phi : M \to M'$, $\Phi(y) = \varphi_y$. Ово пресликавање је A-линеарно.

Међутим, у општем случају нису сви функционали задати са (12), тј. пресликавање Φ не мора биоти „на“. (Дакле, не важи Рисова теорема о репрезентацији.) Ако је Φ „на“, тј. ако је $M' \cong M$ онда кажемо да је модул M *самодуалан*.

10.21. Став. Нека је M Хилбертов модул над W^*-алгебром A. Тада је дуални модул M' дуални простор, тј. постоји Банахов простор X такав да је $X^* \cong M'$.

Доказ. A је W^*-алгебра и стога према Сакаијевој теориме има преддуал, означимо га са A_* који се састоји од свих ултраслабо непрекидних функционала на A. Уочимо простор $A_* \otimes_{\max} M$ који је добија комплетирањем алгебарског тензорског производа $A_* \otimes_{alg} M$ у односу на максималну норму

$$\left\|\sum_{k=1}^n \varphi_k \otimes x_k\right\|_{\max} = \sup \sum_{k=1}^n ||\varphi_k||\,||x_k||,$$

где се супремум узима по свим растављањима датог вектора на суму елементарних тензора.

За дато $\psi \in M'$ (тј. $\psi : M \to A$) формирамо пресликавање $\Lambda_\psi : A_* \otimes_{\max} M \to \mathbf{C}$ са

$$\Lambda_\psi\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \otimes x_k\right) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\psi(x_k)). \tag{13}$$

Десна страна дефиниције (13) је $\mathbf{C}$-билинеарна, па је Λ_ψ коректно дефинисано на $A_* \otimes_{alg} M$. Покажимо и да је ограничено. Имамо

$$\left\|\Lambda_y\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \otimes x_k\right)\right\| \leq \sum_{k=1}^n |\varphi_k(\psi(x_k))| \leq ||\psi|| \sum_{k=1}^n ||\varphi_k||\,||x_k|| \leq ||\psi|| \left\|\sum_{k=1}^n \varphi_k \otimes x_k\right\|_{\max},$$

одакле је $||\Lambda_\psi|| \leq ||\psi||$, па се Λ_ψ које је формулом (13) дефинисано на $A_* \otimes_{alg} M$ може продужити на његово комплетирање $A_* \otimes_{\max} M$.

Докажимо да је $||\Lambda_\psi|| = ||\psi||$. Нека је $\varepsilon > 0$ и $x \in M$ јединични вектор за који је $||\psi(x)|| > ||\psi|| - \varepsilon$. Тада постоји низ нормалних функционала φ_n норме 1 такав да $|\varphi_n(\psi(x))| \to ||\psi(x)||$. Јасно, важи и $||\varphi_n \otimes x|| = ||\varphi_n||\,||x|| = 1$, и отуда

$$|\Lambda_\psi(\varphi_n \otimes x)| = |\varphi_n(\psi(x))| \to ||\psi(x)|| > ||\psi|| - \varepsilon = (||\psi|| - \varepsilon)||\varphi_n \otimes x||,$$

одакле следи $||\Lambda_\psi|| \geq ||\psi|| - \varepsilon$. Тако је $||\Lambda_\psi|| = ||\psi||$ и отуда је прсликавање $M' \ni \psi \mapsto \Lambda_\psi \in (A_* \otimes_{\max} M)^*$ изометричко утапање.

Остаје још да докажемо да је скуп

$$\Lambda(M') = \{\Lambda_\psi \mid \psi \in M'\}$$

затворен у дуалном простору $(A_* \otimes_{\max} M)^*$, јер ће тада бити $M' \cong \Lambda(M') \cong (A_* \otimes_{\max} M/(\Lambda(M'))^0)^*$, где је $(\Lambda(M'))^0$ ознака за анихилатор скупа $\Lambda(M')$. Нека је, дакле, ψ_α мрежа таква да $\Lambda_{\psi_\alpha} \to F$ у слабој-$*$ топологији простора $(A_* \otimes_{\max} M)^*$, тј.

$$||\Lambda_{\psi_\alpha}(y) - F(y)|| \to 0, \qquad \text{за све } y \in A_* \otimes_{\max} M.$$

Између осталог, тада је и за све нормалне $\varphi \in A_*$ и све $x \in M$ испуњено

$$\varphi(\psi_\alpha(x)) \to F(\varphi \otimes x). \tag{14}$$

Међутим, за фиксирано $x \in M$ пресликавање $A_* \ni \varphi \mapsto F(\varphi \otimes x)$ је $\mathbf{C}$-линеарно и ограничено (норма не превазилази $||F||\,||x||$), па како је $(A_*)^* \cong A$ то постоји $\psi(x) \in A$, такво да је

$$F(\varphi \otimes x) = \psi(x)(\varphi) = \varphi(\psi(x)). \tag{15}$$

Пресликавање ψ је очигледно $\mathbf{C}$-линеарно. Докажимо и да је A-линеарно. Множење елементима из A је ултраслабо непрекидно, па ако је φ нормалан функционал, онда је и φ^a задата са $\varphi^a(x) = \varphi(xa)$ такође нормалан. Стога на основу (14) и (15) имамо за све $\varphi \in A_*$

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(xa)) &= F(\varphi \otimes xa) = \lim \Lambda_{\psi_\alpha}(\varphi \otimes xa) = \lim \varphi(\psi_\alpha(xa)) = \\ &= \lim \varphi(\psi_\alpha(x)a) = \lim \varphi^a(\psi_a(x)) = F(\varphi^a \otimes x) = \varphi(\psi(x)a).\end{aligned}$$

Како A_* раздваја тачке, то је $\psi(xa) = \psi(x)a$, односно $\psi \in M'$. Тако је због (15) $\Lambda(M')$ затворен у $(A_* \otimes_{\max} M)^*$ чиме је доказ завршен. $\square$

Задаци

1. а) Нека су $B \subseteq A$ две C^* алгебре, и нека је $E : A \to B$ линеарно пресликавање такво да је $E^2 = E$, и $||E|| = 1$. Доказати да за свако $a \in A$ важи $E(a^*a) \geq 0$, као и да за све $a \in A$ и све b_1, $b_2 \in B$ важи $E(b_1ab_2) = b_1E(a)b_2$. (Такво пресликавање назива се *условно очекивање*.)

б) Нека су $B \subseteq A$ две C^* алгебре, и нека је $E : A \to B$ условно очекивање, које је приде тачно, тј. из $a \geq 0$ и $E(a) = 0$ следује $a = 0$. Доказати да се A може опремити структуром предхилбертовог C^*-модула ако се скаларни производ дефинише са $\langle x, y\rangle_B = E(x^*y)$.

2. Нека је M прозивољан Хилбертов C^*-модул над C^*-алгебром A. Доказати да за све $x \in M$ важи

$$x = \lim_{\varepsilon\to 0+} x\,\langle x, x\rangle\,(\langle x, x\rangle + \varepsilon \cdot 1)^{-1}.$$

Како тумачите ову једнакост ако алгебра A није унитална?

3. Нека је A W^*-алгебра, и нека је M Хилбертов C^*-модул над A. Доказати да постоји $z \in M$ такво да је $x = z\,\langle x, x\rangle^{1/2}$. (Поларно разлагање.) Примером показати да резултат не важи ако A није W^*, већ само C^*-алгебра. Показати да тада ипак постоји z_α са својством $x = z_\alpha\,\langle x, x\rangle^\alpha$, кад год је $0 < \alpha < 1/2$.

4. Нека је M подмодул стандардног модула $l^2(A)$, и нека је M алгебарски коначно генерисан, тј. постоје $x_1, x_2, \ldots, x_m \in M$ такви да је

$$M = \{\sum_{k=1}^{n} x_k a_k \mid a_k \in A\}.$$

а) Доказати да је скуп несингуларних елемената у $M^\perp$, (тј. оних елемената $x \in M^\perp$ за које је $\langle x, x\rangle$ инвертибилно у A) густ у $M^\perp$;

б) Показати да је M ортогонално допуњив.

5. а) Нека је A произвољна C^*-алгебра, и $r : A \to A$ линеарно пресликавање за које је $r(a)^* r(a) \leq K a^* a$ за све $a \in A$, и неку фиксирану константу $K > 0$. Доказати да је тада $r(a) \equiv r(1)a$;

б) Нека су M и N Хилбертрови модули, и $T : M \to N$ пресликавање за које важи $\langle Tx, Tx\rangle \leq K \langle x, x\rangle$ за све $x \in M$ и фиксирано $K > 0$. Доказати да је T једно A-линеарно пресликавање.

6. Нека је M произвољан Хилбертов C^*-модул над C^*-алгебром A.

а) Доказати да за све $x \in M$ постоје z, u, $v \in M$такви да је $x = \theta_{u,v}(z)$. [Ставити $u = v = \lim_{\varepsilon \to 0+} x(\varepsilon + \langle x, x\rangle^{1/3})^{-1}$.]

б) Доказати да је $M\langle M, M\rangle = M$.

7. а) Нека је $M_n(\mathbf{C})$ ознака за све матрице над $\mathbf{C}$ формата $n \times n$. Доказати да је $\mathbf{C} \overset{M}{\sim} M_n(\mathbf{C})$, па извести закључак да (до на изоморфизам) постоји само једна недегенерисана репрезентација алгебре $M_n(\mathbf{C})$.

б) Доказати да је $\mathbf{C} \overset{M}{\sim} \mathfrak{S}_\infty$, тј. да је $\mathbf{C}$ Морита еквивалентна алгебри свих компактних оператора на сепарабилном Хилбертовом простору. Извести закључак: постоји само једна (до на изоморфизам) недегенерисана репрезентација алгебре $\mathfrak{S}_\infty$.

8. Ако је A унитална и M произвољан, онда је $B^a(M; A) \cong M$. [За $\varphi \in B^a(M; A)$ размотрити $\varphi^*(1)$.]

9. Нека је M самодуалан, а N произвољан Хилбертов C^*-модул над A. Доказати да сваки ограничен A-линеаран оператор $T : M \to N$ има адјунгован. Другим речима, $B(M; N) = B^a(M; N)$ под условом да је домен M самодуалан.

10. а) Доказати да је A^n самодуалан модул;

б) Доказати да је дуални модул модула $l^2(A)$ једнак

$$l^2(A)' = \left\{ (x_n)_{n\geq 1} \mid x_n \in A, ||(x_n)|| = \sup_{N\geq 1} \left\| \sum_{n=1}^{N} x_n^* x_n \right\|^{1/2} < +\infty \right\};$$

11. Нека је H сепарабилан Хилбертов простор, и $A = B(H)$. Нека је даље $H = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} H_i$, где су сви $H_i \leq H$ бесконачно димензионални, и нека су $u_i : H \to H_i$ одговарајуће изометрије. Доказати да је пресликавање

$$S : A \to l^2(A)', \qquad S(a) = (au_i)_{i\geq 1}$$

изометрички изоморфизам. [Показати да је S^{-1} задато са $S^{-1}((x_n)_{n\geq 1}) = w^* - \lim \sum_i x_i u_i^*$.]