ФУНКЦИОНАЛНА АНАЛИЗА

Драгољуб Ј. Кечкић

Ову књигу посвећујем...

Издавач: тај и тај
ISBN: 978-7-167-бла-бла
За издавача: .....
Аутор:
Слике:
Корице:

САДРЖАЈ

1. БАНАХОВИ И ХИЛБЕРТОВИ ПРОСТОРИ 1
    Основни појмови 1
    Примери 6
    Вежбања 12
2. ПОТПРОСТОРИ 15
    Потпростори 15
    Ортогоналност 16
    Коначно димензионални Банахови простори 20
    Релативна компактност 24
    Шаудерова теорема о непокретној тачки и примене 28
    Вежбања 32
3. ОПЕРАТОРИ, ФУНКЦИОНАЛИ 35
    Линеарна пресликавања 35
    Функционали 38
    Хан-Банахова теорема и последице 44
    Адјунгован и конјугован оператор 52
    Вежбања 55
4. КОНВЕРГЕНЦИЈЕ 61
    Категорије 61
    Банах-Штајнхаусова теорема 65
    Примене Банах-Штајнаусове теореме 67
    Слаба конвергенција 72
    Врсте конвергенције низа оператора 75
    Вежбања 76
5. ИНВЕРТИБИЛНОСТ 79
    Теорема о отвореном пресликавању и последице 79
    Спектар 84
    Вежбања 88
6. ПОЈАМ БАЗЕ 91
    Хилбертова база 91
    Шаудерова база 96
    Сепарабилност 99
    Остали појмови базе 102
    Вежбања 104
7. КОМПАКТНОСТ 107
    Компактни оператори 107

Фредхолмова теорија 111
Основи спектралне теорије 114
Интегрални оператори 118
Примене у теорији диференцијалних једначина 123
Вежбања 128

1. БАНАХОВИ И ХИЛБЕРТОВИ ПРОСТОРИ

Основни појмови

1.1. Дефиниција. Нека је X векторски простор над пољем скалара K, где је или $\mathrm{K}=\mathrm{C}$ или $\mathrm{K}=\mathrm{R}$.

(Ако се другачије не нагласи, векторе означавамо малим латиничним словима, а скаларе грчким. Такође ако се не нагласи шта је поље скалара, узима се да је то C.)

(а) Функција $||\cdot||: X\to\mathrm{R}$ назива се *норма* ако испуњава:

(i) $||x||\geq 0$ и $||x||=0$ акко $x=0$;
(ii) $||\lambda x||=|\lambda|\,||x||$;
(iii) $||x+y||\leq ||x||+||y||$.

Тада се уређен пар $(X,||\cdot||)$ назива *нормиран векторски простор*.

Помоћу норме, на природан начин се уводи метрика са

$$d(x,y)=||x-y||. \tag{1}$$

(У ствари, фукција норме замишљена је тако да имитира својства апсолутне вредности.) Особине метрике се једноставно проверавају, те је тако сваки нормиран векторски простор уједно и метрички простор.

Ако је $(X,||\cdot||)$ комплетан у односу на метрику (1), онда се назива *Банахов простор*[1].

(б) Функција $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X\to\mathrm{K}$ која испуњава својства:

(i) $\langle x,x\rangle\geq 0$ и $\langle x,x\rangle=0$ акко $x=0$;
(ii) $\langle y,x\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;
(iii) $\langle\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y\rangle=\lambda_1\langle x_1,y\rangle+\lambda_2\langle x_2,y\rangle$,

назива се *скаларни производ*. (У случају $\mathrm{K}=\mathrm{R}$, у другом својству треба изоставити комплексно конјуговање.) У том случају се уређен пар $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ назива *унитаран* или *пред-Хилбертов* простор.

---

[1] Stefan Banach (1892-1945) – пољски математичар

Сваки унитаран простор је нормиран, јер се норма може увести на природан начин са

$$||x|| = \sqrt{\langle x,x\rangle}. \tag{2}$$

Да наведена функција заиста јесте норма доказаћемо мало касније. Самим тим, сваки унитарни простор има на природан начин уведену метрику

$$d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}.$$

Ако је унитаран простор комплетан у односу на тако уведену метрику онда се назива *Хилбертов простор*[1].

Према томе за ново уведене класе објеката важи:

$$\begin{array}{ccccc} \textit{Хилбертови простори} & \subset & \textit{Банахови простори} & \subset & \textit{Метрички простори} \\ \cup & & \cup & & \\ \textit{Унитарни простори} & \subset & \textit{Нормирани простори} & & \end{array}$$

1.2. Основна правила рачуна са скаларним производом. *Имамо:*

(i) $\langle x,0\rangle = \langle 0,x\rangle = 0$;

(ii) $\langle x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2\rangle = \overline{\mu_1}\langle x,y_1\rangle + \overline{\mu_2}\langle x,y_2\rangle$;

(iii) $\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$;

(iv) $|\langle x,y\rangle| \le \langle x,x\rangle^{1/2}\langle y,y\rangle^{1/2}$ - *Коши-Шварцова неједнакост;*

(v) $\langle x+y,x+y\rangle+\langle x-y,x-y\rangle = 2(\langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle)$ - *релација паралелограма.*

Примедба: Када докажемо да израз $\sqrt{\langle x,x\rangle}$ има особине норме, последња три својства можемо записати и као:

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + ||y||^2,$$
$$|\langle x,y\rangle| \le ||x||\,||y||,$$
$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2). \tag{3}$$

Примедба (још једна): Ако је $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ онда треба изоставити комплексно конјуговање и реални део. Овакве напомене више неће бити писане.

Доказ. (i) За фиксирано x, пресликавање $a \mapsto \langle a,x\rangle$ је због својства (iii) скаларног производа, линеарно, те отуда нула вектор слика у нулу. Зато је $\langle 0,x\rangle = 0$. Онда је и $\langle x,0\rangle = \overline{\langle 0,x\rangle} = 0$;

(ii) Имамо, користећи редом својства (ii), (iii) и поново (ii) скаларног производа:

$$\langle x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2\rangle = \overline{\langle \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2, x\rangle} = \overline{\mu_1\langle y_1,x\rangle + \mu_2\langle y_2,x\rangle} =$$
$$= \overline{\mu_1}\,\overline{\langle y_1,x\rangle} + \overline{\mu_2}\,\overline{\langle y_2,x\rangle} = \overline{\mu_1}\langle x,y_1\rangle + \overline{\mu_2}\langle x,y_2\rangle;$$

(iii) Скаларни производ је адитиван по обе промењиве (по првој на основу дефиниције, а по другој по претходно доказаном својству) те имамо:

$$\langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle,$$

јер је $\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = \langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} = 2\,\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$;

(iv) За било који скалар $\lambda \in \mathbb{K}$ је $\langle \lambda y, \lambda y\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle y,y\rangle = |\lambda|^2\langle y,y\rangle$, па имамо

$$0 \le \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\,\mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2\langle y,y\rangle.$$

---

[1] David Hilbert (1862-1943) – немачки математичар

Сада ћемо одабрати паметно λ које ће од средњег сабирка направити $|\langle x,y\rangle|$. Избор пада на $\lambda = -\overline{\langle x,y\rangle}/\langle y,y\rangle$. (Претходно констатујемо да тражена неједнакост постаје тривијална ако је $y=0$, јер у том случају λ није коректно дефинисано.) Тако добијамо

$$0 \le \langle x,x\rangle - 2\,\mathrm{Re}\,\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} = \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle},$$

што се једноставно своди на тражену неједнакост

Приметимо да се овде једнакост достиже ако и само су x и y линеарно зависни. Заиста $|\langle x,y\rangle|^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ ако и само ако је $y=0$ или $\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = 0$. Ово друго, на основу дефиниције скаларног производа еквивалентно је са $x=-\lambda y$;

(v) На основу особине (iii) лако налазимо

$$\langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle,$$
$$\langle x-y, x-y\rangle = \langle x,x\rangle - 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle,$$

што после сабирања даје оно што нам треба. ☐

1.3. Став. *Нека је* $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ *унитаран простор.*

(а) *Тада је функција* $||\cdot||$ *дата са (2) једна норма;*

(б) *Скаларни производ се преко норме може изразити као*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\big), \quad (4)$$

у случају да је $\mathrm{K}=\mathrm{C}$, *односно*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\big(||x+y||^2 - ||x-y||^2\big), \quad (5)$$

ако је $\mathrm{K}=\mathrm{R}$.

Примедба: Једнакост (4) односно (5) назива се *поларизациони идентитет*.

Доказ. (а) Прво својство норме непосредно следи из првог својства дефиниције скаларног производа. За друго, на основу линеарности скаларног производа по првој променљивој, односно антилинеарности по другој имамо

$$||\lambda x||^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x,x\rangle = |\lambda|^2||x||^2,$$

што је довољно.

За доказ неједнакости троугла употребићемо својство (iii) одељка 1.2 и Коши Шварцову неједнакост. Имамо

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + ||y||^2 \le ||x||^2 + 2|\langle x,y\rangle| + ||y||^2 \le$$
$$\le ||x||^2 + 2||x||\,||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2,$$

одакле тражено добијамо кореновањем.

(б) На основу Става 1.2 (iii) имамо

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + ||y||^2, \quad (6)$$
$$||x-y||^2 = ||x||^2 - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + ||y||^2, \quad (7)$$
$$||x+iy||^2 = ||x||^2 - i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle + ||y||^2, \quad (8)$$
$$||x-iy||^2 = ||x||^2 + i\langle x,y\rangle - i\langle y,x\rangle + ||y||^2, \quad (9)$$

па резултат добијамо у комплексном случају израчунавајући (6) − (7) $+i$ (8) $-i$ (9), а у реалном само (6) − (7). □

1.4. Основна правила рачунања са нормом. *Нека је* $(X, \|\cdot\|)$ *нормиран векторски простор. Тада важи:*

(i) $\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\|$ - *неједнакост многоугла;*
(ii) $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$*;*
(iii) *Посебно, ако* $x_n \to x$ *тада и* $\|x_n\| \to \|x\|$*, тј. функција* $\|\cdot\|$ *је непрекидна;*
(iv) *Ако* $x_n \to x$*,* $y_n \to y$ *и* $\lambda_n \to \lambda$ *онда и* $x_n + y_n \to x + y$ *и* $\lambda_n x_n \to \lambda x$*, тј. операције сабирања вектора и множења вектора скаларом су непрекидне.*

Доказ. (i) Лако следи из неједнакости троугла индукцијом;

(ii) Имамо $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, тј. $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, а заменом улога и $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$;

(iii) Заиста, ако $x_n \to x$ тада $\|x_n - x\| = d(x_n, x) \to 0$, па према претходном и $\|x_n\| \to \|x\|$;

(iv) Непрекидност сабирања следи из неједнакости троугла. Наиме, $\|(x_n + y_n) - (x + y)\| = \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$. Непрекидност множења скаларом, пак, из

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda) x\| \leq |\lambda_n| \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda| \|x\| \to 0,$$

јер је λ_n конвергентан, па тиме и ограничен. □

1.5. Лема. *Нека је* $(X, \|\cdot\|)$ *нормиран векторски простор. Релација паралелограма (3) еквивалентна је са релацијом пареллелепипеда*

$$\|x + y + z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|y + z\|^2 + \|z + x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2. \quad (10)$$

Доказ. Да из (10) следи (3) видимо ако уврстимо $z = -y$.

Обратно је знатно теже. Почнимо тако што ћемо применити релацију паралелограма на векторе $x + y$ и z. Добијамо

$$\|x + y + z\|^2 + \|x + y - z\|^2 = 2\|x + y\|^2 + 2\|z\|^2. \quad (11)$$

Лепо, али сад смета други сабирак на левој страни. Да бисмо га некако елиминисали, применимо релацију паралелограма на векторе $x - z$ и y па налазимо

$$\|x + y - z\|^2 + \|x - y - z\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (12)$$

Сада се одузимањем претходне две неједнакости можемо отарасити другог сабирка са леве стране прве једнакости. Али остаје десни из друге. Да бисмо њега склонили применимо релацију паралелограма на векторе $-y - z$ и x, па добијамо

$$\|x - y - z\|^2 + \|-x - y - z\|^2 = 2\|y + z\|^2 + 2\|x\|^2. \quad (13)$$

Срећа је што смо три пута уводили по један минус, и сада је десни сабирак у (13) исто што и леви у (11). Дакле, израчунамо (11) − (12) + (13) и добијамо

$$2\|x + y + z\|^2 = 2\|x + y\|^2 - 2\|x - z\|^2 + 2\|y + z\|^2 + 2\|z\|^2 - 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2,$$

односно када скратимо двојке

$$\|x + y + z\|^2 = \|x + y\|^2 - \|x - z\|^2 + \|y + z\|^2 + \|z\|^2 - \|y\|^2 + \|x\|^2. \quad (14)$$

Остаје још да заменимо некако сабирак $||x-z||^2$. Но из релације паралелограма имамо $||x-z||^2=2||x||^2+2||z||^2-||x+z||^2$, па када то уврстимо у (14) добијамо (10), чиме је завршен доказ. □

1.6. Став (Џордан - фон Нојман)[1]. *Нека је $(X,||\cdot||)$ нормиран йросшор. На X се може увесши скаларни йроизвод за који важи (2), шј. скаларни йроизвод који їенерише већ дашу норму ако и само ако важи релација йаралелоїрама (3).*

Доказ. Један смер је већ доказан. Наиме, ако норма потиче од скаларног производа онда релација паралелограма важи према Ставу 1.2 (v).

За други искористимо претходну лему односну релацију паралелепипеда. Приметимо да ако скаларни производ који репродукује норму постоји, онда мора бити задат помоћу (4) односно (5). Стога уведимо функцију $B: X\times X\to \mathrm{K}$ са

$$B(x,y)=\frac{1}{4}\big(||x+y||^2-||x-y||^2+i||x+iy||^2-i||x-iy||^2\big),$$

у случају $\mathrm{K}=\mathrm{C}$, односно

$$B(x,y)=\frac{1}{4}\big(||x+y||^2-||x-y||^2\big),$$

у случају $\mathrm{K}=\mathrm{R}$. Доказ ће бити настављен само за случај $\mathrm{K}=\mathrm{C}$, као тежи. Показаћемо да је $B(x,y)$ тражени скаларни производ. Најпре изведимо лака својства функције B. Имамо

$$B(0,y)=\frac{1}{4}\big(||y||^2-||y||^2+i||y||^2-i||y||^2\big)=0,$$

$$\begin{aligned}B(y,x)&=\frac{1}{4}\big(||y+x||^2-||y-x||^2+i||y+ix||^2-i||y-ix||^2\big)=\\&=\frac{1}{4}\big(||x+y||^2-||x-y||^2+i||i(x-iy)||^2-i||i(x+iy)||^2\big)=\\&=\frac{1}{4}\big(||x+y||^2-||x-y||^2+i||(x-iy)||^2-i||(x+iy)||^2\big)=\\&=\overline{B(x,y)},\end{aligned}$$

одакле одмах и $B(x,0)=0$. Затим

$$\begin{aligned}B(x,x)&=\frac{1}{4}\big(||2x||^2-0+i||(1+i)x||^2-i||(1-i)x||^2\big)=\\&=\frac{1}{4}\big(4||x||^2+(i|1+i|-i|1-i|)||x||^2\big)=||x||^2,\end{aligned}$$

---

[1] Pascual Jordan (1904-1980) – амерички математичар (не мешати га са далеко познатијим француским математичарем Камиј Жорданом), John von Neumann (1903-1957) – амерички математичар

и најзад

$$\begin{aligned}B(ix,y)&=\frac{1}{4}\left(\|ix+y\|^2-\|ix-y\|^2+i\|ix+iy\|^2-i\|ix-iy\|^2\right)=\\&=i\frac{1}{4}\left(-i\|i(x-iy)\|^2+i\|i(x+iy)\|^2+\|i(x+y)\|^2-\|i(x-y)\|^2\right)=\\&=i\frac{1}{4}\left(-i\|(x-iy)\|^2+i\|(x+iy)\|^2+\|(x+y)\|^2-\|(x-y)\|^2\right)=iB(x,y)\end{aligned}\tag{15}$$

Докажимо сада адитивност по првој промењивој. На основу релације парелелепипеда имамо

$$\|x+y+z\|^2=\|x+y\|^2+\|y+z\|^2+\|x+z\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2-\|z\|^2,\tag{16}$$

$$\|x+y-z\|^2=\|x+y\|^2+\|y-z\|^2+\|x-z\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2-\|z\|^2,\tag{17}$$

$$\|x+y+iz\|^2=\|x+y\|^2+\|y+iz\|^2+\|x+iz\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2-\|z\|^2,\tag{18}$$

$$\|x+y-iz\|^2=\|x+y\|^2+\|y-iz\|^2+\|x-iz\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2-\|z\|^2.\tag{19}$$

Када израчунамо (16) − (17) $+i$ (18) $-i$ (19) добијамо

$$4B(x+y,z)=4B(y,z)+4B(x,z),$$

јер се све „колоне“ осим друге и треће скраћују. То је довољно за доказ адитивности.

Да бисмо доказали хомогеност уочимо пресликавање $\mathbb{R}\ni\alpha\mapsto g(\alpha)=B(\alpha x,y)$ за фиксиране x, $y\in\mathbb{R}$. Због адитивности функције B по првој промењивој имамо $g(\alpha+\beta)=B((\alpha+\beta)x,y)=B(\alpha x,y)+B(\beta x,y)=g(\alpha)+g(\beta)$. Дакле, функција g задовољава Кошијеву функционалну једначину. Даље, како је g изражена преко алгебраских операција и норме, она је према Ставу 1.4 непрекидна, па је стога $g(\alpha)=g(1)\alpha$, односно

$$B(\alpha x,y)=\alpha B(x,y),\qquad \alpha\in\mathbb{R}.$$

Да би се доказало да и комплексан скалар „излази“ са прве промењиве довољно је комбиновати адитивност са релацијом (15). ☐

Примери

1.7. Простор $L^p(X;\mu)$. Нека је $(X,\mathfrak{M},\mu)$ простор са мером. Простор $L^p(X;\mu)$, $p\geq 1$ снабдевен нормом

$$\|x\|_p=\left(\int_X|x(t)|^p\,\mathrm{d}\mu(t)\right)^{1/p}$$

је Банахов простор. Његова комплетност следи из Рис-Фишерове[1] теореме.

У случају $p=2$, простор $L^2(X;\mu)$ је Хилбертов простор. Скаларни производ је дат са

$$\langle x,y\rangle=\int_X x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}\mu(t).$$

?? Дописати познате свуда густе скупове ??

---

[1] Frigyes Riesz (1880-1956) – мађарски математичар, Ernst Sigismund Fischer (1875-1954) – аустријски математичар

1.8. Простор l^p. Скуп

$$l^p = \left\{ x = (\xi_n)_{n\ge1} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{+\infty} |\xi_j|^p < +\infty \right\},$$

са нормом

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p},$$

је такође Банахов простор. Реч је о специјалном случају простора $L^p(X;\mu)$, где је $X = \mathrm{N}$, а $\mu = \nu$, тзв. бројачка мера, односно $\nu(E) = Card(E)$ за $E \subseteq \mathrm{N}$.

У случају $p = 2$, простор l^2 је Хилбертов. Скаларни производ је дат са

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \overline{\eta}_k.$$

1.9. Простор $C[a,b]$. Скуп свих непрекидних функција на сегементу $[a,b]$

$$C[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathrm{C} \mid x(t) \text{ непрекидна}\}$$

са нормом

$$\|x\| = \max_{a\le t\le b} |x(t)|$$

је Банахов простор. Доказ комплетности овог простора садржај је курса Анализе 2.

1.10. Простор $L^\infty(X;\mu)$. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером. Простор *есенцијално ограничених* функција $\mathscr{L}^\infty(X;\mu)$ уводимо са

$$\mathscr{L}^\infty(X;\mu) = \{x : X \to \mathrm{C} \mid x \text{ мерљива и есенцијално ограничена}\},$$

где се есенцијално ограничена фукција дефинише као она функција x за коју постоји константа $M > 0$ таква да неједнакост $|x(t)| \le M$ важи μ-скоро свуда, тј. такву да је

$$\mu\{t \in X \mid |x(t)| > M\} = 0. \tag{20}$$

За норму функције x желимо да узмемо *есенцијални супремум* функције $|x|$,

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in X} \operatorname{ess} |x(t)| := \min\{M > 0 \mid \text{ важи (20)}\}.$$

Тако уведена функција, међутим, не може бити норма, јер се лако конструише пример фукције $x \ne 0$ за коју је $\|x\|_\infty = 0$. Рецимо, ако је $X = (-1,1)$, а $\mu = m$ Лебегова мера, тада је функција x дата са $x(0) = 1$, и $x(t) = 0$, иначе нетривијална функција, али је $\sup \operatorname{ess} |x(t)| = 0$, јер једночлан скуп $\{0\}$ има Лебегову меру нула.

Стога поступамо као и у случају са L^p просторима. Уводимо релацију $\sim$ помоћу $x \sim y$ ако је $\mu\{t \mid x(t) \ne y(t)\} = 0$. Није тешко проверити да је $\sim$ једна релација еквиваленције, као и да резултат алгебарских операција не зависи од избора представника класе, па је количнички простор

$$L^\infty(X;\mu) = \mathscr{L}^\infty(X;\mu)/\sim$$

коректно дефинисан.

Докажимо да је $(L^\infty(X;\mu); \|\cdot\|_\infty)$ Банахов простор. Прво и друго својство норме су очигледни, као и импликација $x \in L^\infty$, $\lambda \in \mathrm{C} \Rightarrow \lambda x \in L^\infty$. Нека су x, $y \in L^\infty$. Тада неједнакости $|x(t)| \le \|x\|_\infty$ и $|y(t)| \le \|y\|_\infty$ важе скоро свуда, тј. скуп A

где не важи прва и скуп B где не важи друга имају μ-меру једнаку нули. Тада је и $\mu(A\cup B)=0$, а ван скупа $A\cup B$ имамо $|x(t)+y(t)|\le|x(t)|+|y(t)|\le\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$, па је $\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$ једно есенцијално горње ограничење функције $|x+y|$. Отуда $x+y\in L^\infty$ и $\|x+y\|_\infty\le\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$.

Докажимо и комплетност. Нека је $x_n\in L^\infty$ Кошијев низ, тј. нека за све $\varepsilon>0$ важи

$$\sup_{t\in X}\operatorname{ess}|x_n(t)-x_m(t)|=\|x_n-x_m\|<\varepsilon$$

за довољно велике m и n. Дакле, неједнакост

$$|x_n(t)-x_m(t)|\le\sup_{t\in X}\operatorname{ess}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon \tag{21}$$

важи ван неког скупа $A_{\varepsilon,m,n}$ мере нула. Узмимо да ε пролази скуп $1/\mathrm{N}$, тј. да је $\varepsilon=1/k$, $k=1,2,\dots$. Укупно скупова $A_{1/k,m,n}$ има пребројиво много, па како је пребројива унија скупова мере нула такође мере нула, то за $\varepsilon=1/k$ важе све неједнакости (21) ван скупа $A=\bigcup A_{1/k,m,n}$ који је мере нула. То значи да је за $t\in X\setminus A$ низ $x_n(t)$ Кошијев низ комплексних бројева (јер за све $\varepsilon>0$ постоји $k\in\mathrm{N}$ са својством $1/k<\varepsilon$). Стога низ $x_n(t)$ конвергира скоро свуда, тачка по тачка. Означимо $x(t)=\lim x_n(t)$. По потреби додефинишемо функцију x на скупу A било како. Небитно је како, јер је $\mu(A)=0$ а елементи простора L^∞ су класе функција међусобно једнаких скоро свуда. Када се у неједнакост (21) пусти лимес кад $m\to\infty$, а затим узме есенцијални супремум, добијамо

$$\sup_{t\in X}\operatorname{ess}|x_n(t)-x(t)|\le\varepsilon,$$

за довољно велико n, односно да $\|x_n-x\|_\infty\to0$.

1.11. Простор l^∞. Када је $X=\mathrm{N}$, а μ бројачка мера добијамо специјалан случај простора $L^\infty(X,\mu)$, простор свих ограничених низова l^∞. Како у односу на бројачку меру нема других скупова мере нула осим празног, то се есенцијални супремум своди на обичан супремум, па је

$$l^\infty=\{x=(\xi_n)_{n\ge1}\mid\sup_{n\ge1}|\xi_n|<+\infty\}$$

са нормом

$$\|x\|_\infty=\sup_{n\ge1}|\xi_n|. \tag{22}$$

1.12. Простор c. Простор свих конвергентних низова c дефинишемо са

$$c=\{x=(\xi_n)_{n\ge1}\mid\exists\lim_{n\to+\infty}\xi_n\},$$

а норму уводимо, као и у случају простора l^∞ са (22). Та норма је коректно дефинисана, јер је сваки конвергентан низ ограничен.

Примећујемо да је $c\subseteq l^\infty$, те је за комплетност простора c довољно доказати да је он затворен подскуп скупа l^∞. (Заиста, сваки затворен подскуп A комплетног метричког простора M је комплетан. Наиме, ако је $x_n\in A$ Кошијев низ у A он је уједно и Кошијев у M, па постоји $x=\lim x_n\in M$. Међутим, ако је A затворен онда $x\in A$.)

Докажимо да је c затворен. Нека $c\ni x_n\to x\in l^\infty$. Овде је реч о низу чији се елементи тачке простора c, дакле о низу низова. Уведимо овакве ознаке:

$$x_n=(\xi_{n,1},\xi_{n,2},\dots)\qquad x=(\xi_{\infty,1},\xi_{\infty,2},\dots).$$

Сваки од низова x_n је конвергентан. Означимо лмес n-тог по реду низа са η_n, тј. $\eta_n = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \xi_{n,\nu}$. Тврдимо да је низ η_n Кошијев низ комплексних бројева. Заиста, како је x_n конвергентан низ, то је $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ за довољно велике m и n, односно за све $\nu \geq 1$ имамо

$$|\xi_{m,\nu} - \xi_{n,\nu}| \leq \sup_{\nu\geq 1} |\xi_{m,\nu} - \xi_{n,\nu}| < \varepsilon.$$

Последњу неједнакост „нападнемо“ лимесом кад $\nu \to +\infty$ и добијамо $|\eta_m - \eta_n| \leq \varepsilon$. Дакле, η_n је заста Кошијев, па је конвергентан у C.

Конвергенција $x_n \to x$ у ствари значи да $\|x_n - x\| \to 0$, тј. $\sup_{\nu\geq 1} |\xi_{n,\nu} - x_{\infty,\nu}| \to 0$. Међутим, према позантом Кошијевом ставу, то значи да је $\lim_{n\to+\infty} \xi_{n,\nu} = \xi_{\infty,\nu}$ равномерно по $\nu \geq 1$. Отуда је могућа размена места два лимеса (теорема о комутативности лимеса), односно

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to+\infty} \xi_{\infty,\nu} = \lim_{\nu\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \xi_{n,\nu} = \\ = \lim_{n\to+\infty} \lim_{\nu\to+\infty} \xi_{n,\nu} = \lim_{n\to+\infty} \eta_n\end{aligned} \tag{23}$$

Како лимес на десној страни постоји, постоји и онај на левој, тј. низ x је конвергентан, тј. $x \in c$.

1.13. Простор c_0. Простор c_0 нула низова дат је са

$$c_0 = \{x = (\xi_n)_{n\geq 1} \mid \lim_{n\to+\infty} \xi_n = 0\}.$$

И овде норму уводимо са (22). Очигледно је $c_0 \subseteq c$, па је за комплетност довољно доказати затвореност скупа c_0. То је једноставно, јер ако $x_n \in c_0$ онда је за све n, $\eta_n = 0$, па је због (23) и

$$\lim_{\nu\to+\infty} \xi_{\infty,\nu} = \lim_{n\to+\infty} \eta_n = 0.$$

1.14. Простор $NBV[a,b]$. Простор *нормализованих функција ограничене варијације* на сегменту $[a,b]$ дефинишемо са

$$NBV[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathrm{C} \mid x(a) = 0, x(t-) = x(t), V_a^b x < +\infty\},$$

а норму дефинишемо са

$$\|x\| = V_a^b x = \sup_{\mathscr{P}: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b} \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|.$$

Из саме дефиниције варијације једноставно следи да је $\|\lambda x\| = V_a^b \lambda x = |\lambda| V_a^b x = |\lambda| \|x\|$, као и $\|x + y\| = V_a^b(x + y) \leq V_a^b x + V_a^b y = \|x\| + \|y\|$, па су друго и треће дефиниционо својство норме задовољени. Што се тиче првог, одмах се види да је $\|x\| \geq 0$, као и да је $\|0\| = 0$. Ако је $\|x\| = 0$, онда је за сваки избор тачака $t_k \in [a,b]$, $\sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| = 0$, па је функција x константна, а како мора бити $x(a) = 0$, то је $x(t) \equiv 0$.

Докажимо сада комплетност. Нека је $x_n \in NBV[a,b]$ Кошијев низ, тј. нека за све $\varepsilon > 0$ важи

$$\|x_m - x_n\| = V_a^b(x_m - x_n) < \varepsilon,$$

кад год су m и n довољно велики. Као и у свм претходним доказима, доказаћемо да низ x_n конвергира тачка по тачка. Заиста, за фиксирано $t \in [a,b]$, тројка

$a < t < b$ чини једну поделу сегмента $[a,b]$, па је због нормализационог услова $x_m(a) = x_n(a) = 0$

$$\begin{aligned}|x_m(t)-x_n(t)| &= |(x_m(t)-x_n(t))-(x_m(a)-x_n(a))| \leq \\ &\leq |(x_m(t)-x_n(t))-(x_m(a)-x_n(a))| + \\ &\quad + |(x_m(b)-x_n(b))-(x_m(t)-x_n(t))| \leq \\ &\leq V_a^b(x_m-x_n) < \varepsilon,\end{aligned} \tag{24}$$

за m, n довољно велике, те је стога $x_n(t)$ Кошијев низ комплексних бројева и према томе конвергентан. Означимо $x(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n(t)$.

Овиме смо добили само конвергенцију тачка по тачка, а треба доказати конвергенцију у норми простора. Да бисмо то извели, уочимо фиксирано $\varepsilon > 0$. Тада за произвољну поделу $\mathscr{P} : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ имамо

$$\sum_{k=1}^{n} |(x_m(t_k)-x_n(t_k))-(x_m(t_{k-1})-x_n(t_{k-1}))| \leq V_a^b(x_m-x_n) < \varepsilon$$

за довољно велико m, $n \geq n_0$, при чему избор n_0 не зависи од поделе већ само од $\varepsilon > 0$. Стога претходну неједнакост можемо да нападнемо лимесом, кад $m \to +\infty$. И тада добијамо

$$\sum_{k=1}^{n} |(x_n(t_k)-x(t))-(x_n(t_{k-1})-x(t_{k-1}))| \leq \varepsilon, \tag{25}$$

а затим узмемо супремум по свим поделама. Тако добијамо $||x_n - x|| \leq \varepsilon$ за довољно велико n.

Треба још показати да је $x \in NBV[a,b]$. Да је $x(0) = 0$ довољно је само да констатујемо. Из (25) налазимо да је $x_n - x$ ограничене варијације, чак и да је $V_a^b(x_n - x) \leq \varepsilon$, па одатле следи и да је $x = (x - x_n) + x_n$ ограничене варијације. Најзад да бисмо се уверили да је x непрекидна с лева, на основу неједнакости (24) закључујемо да је конвергенција низа $x_n(t)$ равномерна по $t \in [a,b]$ и тада (због теореме о комутативности лимеса)

$$\lim_{t\to t_0-} x(t) = \lim_{t\to t_0-} \lim_{n\to+\infty} x_n(t) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to t_0-} x_n(t) = \lim_{n\to+\infty} x_n(t_0) = x(t_0).$$

?? Указати на задатак 1.14. ??

1.15. Простор $\mathscr{M}(X;\mathfrak{M})$. Нека је $\mathfrak{M}$ нека σ-алгебра над скупом X. Простор $\mathscr{M}(X;\mathfrak{M})$ свих *комплексних мера* дефинишемо са

$$\mathscr{M} = \{\lambda : \mathfrak{M} \to \mathrm{C} \mid \lambda \text{ комплексна мера}\},$$

а норму на њему са

$$||\lambda|| = |\lambda|(X), \tag{26}$$

где је $|\lambda|$ ознака за тоталну варијацију мере λ.

Пре него што докажемо да је реч о Банаховом простору, подсетимо се дефиниције тоталне варијације:

$$|\lambda|(E) = \sup_{E=\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k} \sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda(E_k)|$$

Такође, подсетимо се и да је тотална варијација $|\lambda|$ комплексне мере λ најмања од свих позитивних мера μ које имају својство да је за сваки мерљив скуп $E \in \mathfrak{M}$ испуњено $|\lambda(E)| \leq \mu(E)$. Дакле, $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$ и још је $|\lambda|$ најмања таква.

Очигледно је $||\lambda|| = |\lambda|(X) \geq 0$, и $||0|| = 0$. Ако је $||\lambda|| = 0$, онда за сваки мерљив скуп E важи $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \leq |\lambda|(X) = 0$, па је $\lambda = 0$.

За било који скалар $\alpha \in \mathrm{C}$ имамо $|\alpha\lambda| = |\alpha|\,|\lambda|$, па је $||\alpha\lambda|| = |\alpha\lambda|(X) = |\alpha|\,|\lambda|(X) = |\alpha|\,||\lambda||$. Најзад, ако су λ и μ две комплексне мере, онда је за сваки мерљив скуп E испуњено $|(\lambda+\mu)(E)| \leq |\lambda(E)| + |\mu(E)| \leq |\lambda|(E) + |\mu|(E)$, односно $|\lambda| + |\mu|$ је једна позитивна мера која доминиара комплексном мером $\lambda + \mu$. Отуда је на основу својства минималности $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$, па је и $||\lambda + \mu|| = |\lambda + \mu|(X) \leq |\lambda|(X) + |\mu|(X) = ||\lambda|| + ||\mu||$. Тако је доказано да функција (26) испуњава својства норме.

Докажимо сада комплетност. Нека је λ_n Кошијев низ мера, тј. нека за све $\varepsilon > 0$ важи $|\lambda_m - \lambda_n|(X) < \varepsilon$ за m, $n \geq n_0$. Тада за сваки скуп $E \in \mathfrak{M}$ имамо

$$|\lambda_m(E) - \lambda_n(E)| \leq |\lambda_m - \lambda_n|(E) \leq |\lambda_m - \lambda_n|(X) < \varepsilon. \tag{27}$$

Према томе, низ $\lambda_n(E)$ је Кошијев низ комплексних бројева, и стога конвергентан. Означимо његов лимес са $\lambda(E)$. Тако смо добили могућу граничну вредност низа λ_n. Приметимо још да пуштајући лимес кад $m \to +\infty$ у неједнакости (27) закључујемо да $\lambda_n(E) \to \lambda(E)$ равномерно по скупу $E \in \mathfrak{M}$.

Доказујемо да је λ мера. Прво $\lambda(\emptyset) = 0$, јер $\lambda(\emptyset) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(\emptyset) = \lim 0$. Даље, једноставно показујемо да је λ коначно адитивна. Наиме, ако је $E = \bigsqcup_{j=1}^{k} E_j$ онда за све n имамо $\lambda_n(E) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_n(E_j)$, па када прођемо лимесом, добијамо $\lambda(E) = \sum_{j=1}^{k} \lambda(E_k)$.

Да бисмо показали пребројиву адитивност, довољно је показати да за сваку монотону фамилију $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_k \subseteq \dots$, $F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k$ важи

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda(F_k) = \lambda(F). \tag{28}$$

Заиста, ако то покажемо, онда је у случају $E = \bigsqcup_{j=1}^{+\infty} E_k$ фамилија $F_k = \bigsqcup_{j=1}^{k} E_j$ монотона, и $\bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k = E$, па је

$$\lambda(E) = \lim_{k\to+\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda(E_j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda(E_j).$$

Исти рачун показује не само да (28) повлачи σ-адитивност, већ и обратно, тј. (28) је (за коначно адитивне мере) еквивалентно σ-адитивности.

Дакле, докажимо (28). Како смо већ констатовали $\lambda_n(E) \to \lambda(E)$ равномерно по скупу E, па тиме и $\lambda_n(F_k) \to \lambda(F_k)$ равномерно по $k \geq 1$. Тако је на основу теореме о комутативности лимеса

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda(F_k) = \lim_{k\to+\infty} \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(F_k) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \lambda_n(F_k) = \lim_{n\to+\infty} \lambda_n(E) = \lambda(E).$$

Остаје још да докажемо да $\lambda_n \to \lambda$ у норми простора, а не само „скуп по скуп“. Из (27) за сваку партицију скупа $X = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k$ имамо

$$\sum_{j=1}^{k} |\lambda_m(E_j) - \lambda_n(E_j)| \leq |\lambda_m - \lambda_n|(X) < \varepsilon,$$

што после узимања лимеса кад $m \to +\infty$ и супремума по свим $k \geq 1$ постаје

$$\sum_{j=1}^{+\infty} |\lambda(E_j) - \lambda_n(E_j)| \leq \varepsilon.$$

Сада узмемо супремум по свим партицијама и добијамо $||\lambda - \lambda_n|| = |\lambda - \lambda_n|(X) \leq \varepsilon$ за довољно велико n, па $\lambda_n \to \lambda$ у норми простора $\mathscr{M}$.

Примедба 1: Познато је, из теорије мере, да постоји бијекција између свих нормализованих функција ограничене варијације и свих комплексних Борелових мера на $[a,b]$, При томе функцији $g \in NBV[a,b]$ одговара Лебег-Стилтјесова мера λ_g, и још је њена тотална варијација једнака $|\lambda_g| = \lambda_{Vg}$, где је $Vg(t) = V_a^t g$. Отуда је $|\lambda_g|([a,b]) = \lambda_{Vg}[a,b] = Vg(b) - Vg(a) = V_a^b g$. Стога је простор $NBV[a,b]$ специјалан случај простора $\mathscr{M}(X)$, где је $X = [a,b]$, а $\mathfrak{M} = \mathscr{B}$ Борелова σ-алгебра.

Примедба 2: У више претходних примера, јавља се тзв. $\sup$-норма, било да је реч о супремуму или о макскимуму. Због познатог става

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \sup_{t \in T} |f_\alpha(t) - f(t)| = 0 \Leftrightarrow f_\alpha(t) \rightrightarrows f(t), \text{ равномерно по } t \in T,$$

$\sup$-норма увек обезбеђује равномерну конвергенцију.

Вежбања

1.1. Доказати да су функције 1, t, t^2, ..., t^n линеарно независне, па одатле извести да су простори $C[a,b]$, $L^p(a,b)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $NBV[a,b]$ бесконачно димензионални.

1.2. Доказати *Кларксонове* неједнакости: За x, $y \in L^p(X;\mu)$ важи

$$||x+y||_p^p + ||x-y||_p^p \geq 2^{p-1}(||x||_p^p + ||y||_p^p), \qquad 1 < p \leq 2,$$

односно

$$||x+y||_p^p + ||x-y||_p^p \leq 2^{p-1}(||x||_p^p + ||y||_p^p), \qquad p \geq 2.$$

1.3. Доказати да је скуп

$$\{x : [1,+\infty) \to \mathrm{C} \mid x \text{ непрекидна}, x(t) = O(t^\alpha)\},$$

Банахов простор, ако се норма уведе са

$$||x|| = \sup_{t \geq 1} t^{-\alpha} |x(t)|.$$

1.4. Доказати да у сваком унитарном простору важи

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ||x + e^{i\theta} y||^2 e^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta$$

1.5. Нека је $e_n \in l^1$ низ вектора, $e_n = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots)$. (У вектору e_n на n-том месту се налази јединица, а на осталом нуле.) Доказати да низ e_n нема ни један Кошијев подниз.

1.6. Показати примером да у просторима $C[a,b]$, $L^p(a,b)$, $p \neq 2$ не важи релација паралелограма, па одатле извести закључак да се у тим просторима не може дефинисати скаларни производ сагласан са датом нормом.

1.7. а) Нека је $x_n \in l^p$ и нека $x_n \to x$ у норми простора l^p. Ако је $x_n = (\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \ldots)$ и $x = (\xi_{\infty,1}, \xi_{\infty,2}, \ldots)$ доказати да за свако ν важи $\lim\limits_{n \to +\infty} \xi_{n,\nu} = \xi_{\infty,\nu}$;

б) Да ли важи обрат? Размотрити пример низа $x_n = (1/n^{1/p}, 1/n^{1/p}, \ldots, 1/n^{1/p}, 0, 0, \ldots)$, где нуле почињу од n-тог места.

1.8. Да ли низови функција $x_n(t)=t^n-t^{n+1}$, $y_n(t)=nt^n(1-t)$ конвергирају у простору $C[0,1]$? А у простору $L^p(0,1)$?

1.9. Нека је $D\subseteq C[0,1]$ скуп свих диференцијабилних функција. Да ли је D векторски потпростор простора $C[0,1]$? Да ли је D затворен подскуп простора $C[0,1]$?

1.10. Доказати да је скуп $A=\{x\in X\mid \forall t|x(t)|<1\}$ отворен у Банаховом простору $X=C[0,1]$. Да ли је скуп A отворен ако је $X=L^1(0,1)$?

1.11. (Бергманови простори) Нека је $D=\{z\in \mathbb{C}\mid |z|<1\}$ отворен јединични диск у комплексној равни, и нека је $L^2(D,\mathrm{d}m/\pi)$ Банахов простор са нормом

$$||x||=\left(\frac{1}{\pi}\int_D|x(\xi+i\eta)|^2\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right)^{1/2},$$

где је заправо $\mathrm{d}m/\pi$ обична дводимензиона Лебегова мера, само нормирана тако да мера целог диска буде 1.

а) Написати како гласи скаларни производ у овом простору. Ако су функције $x_k(z)=z^k$, $k=0,1,\dots$ израчунати $\langle x_k,x_n\rangle$;

б) Да ли је скуп B^2 који се састоји од свих функција $x\in L^2$ које су при томе и холоморфне затворен?

1.12. (Хардијеви простори) Нека је За функцију f холоморфну у јединичном диску D уведимо средњу вредност на кругу полупречника r са $M(f;r;p)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}$ (реда $p>1$).

а) Доказати да је пресликавање $r\mapsto M(f;r;p)$ растуће.

б) Доказати да је $H^p=\{f:D\to\mathbb{C}|f\text{-аналитичка}, \sup\limits_{0\le r<1}M(f;r;p)<+\infty\}$ векторски простор, као и да је $\sup\limits_{0\le r<1}M(f;r;p)$ једна норма на њему. Да ли је тај простор комплетан?

в) Доказати да је H^2 Хилбертов простор и одредити скаларни производ.

г) Израчунати скаларне производе $\langle x_k,x_n\rangle$ где су функције x_k и x_n исте као у претходном вежбању.

1.13. Доказати да је нормиран векторски простор X комплетан ако и само ако је сваки апсолутно конвергентан ред уједно и конвергентан, тј. да из $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}||x_k||<+\infty$ следи да је низ делимичних сума $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ конвергентан низ у X.

?? Можда пребацити у основни текст ??

1.14. Дато је пресликавање $A:L^1(0,1)\to NBV[0,1]$ са $(Ax)(t)=\int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Доказати да је A линеарно и изометрично, тј. да је $||Ax||_{NBV}=||x||_{L^1}$.

2. ПОТПРОСТОРИ

Потпростори

2.1. Дефиниција. Нека је X Банахов простор. Његов подскуп L је *Банахов потпростор* ако је Банахов простор посматран сам за себе.

То значи да је L векторски простор, али и да је затворен, јер у противном не би био комплетан. Особине норме се не морају проверавати јер су све универзално квантификоване, па ако важе на ширем скупу X, важе и на ужем L.

Чињеницу да је L Банахов потпростор од X обележавамо са $L \leq X$. Такође, изостављаћемо реч Банахов, односно када кажемо само потпростор мислимо на Банахов потпростор. Тек ако потпростор није комплетан то ћемо посебно наглашавати.

Слично, ако је X Хилбертов простор, његов подскуп L називамо *Хилбертов потпростор* ако је он Хилбертов простор посматран сам за себе.

Из истих разлога као и код Банахових простора, L је Хилбертов потпростор, ако је затворен векторски потпростор. И ову чињеницу обележавамо са $L \leq X$.

2.2. Количнички простор. Нека је X Банахов простор, и $L \leq X$. Количнички простор уводимо са $X/L = X/\sim$, где је $\sim$ релација еквиваленције задата са $x \sim y$ ако и само ако је $x - y \in L$. Познато је (из линеарне алгебре) да је скуп X/L један векторски простор, са природно дефинисаним сабирањем и множењем скаларом. Заправо, класа елемента x састоји из свих вектора облика $x + z$, $z \in L$, те се стога означава са $x + L$, тј. важи

$$X/L = \{x + L \mid x \in X\}, \quad (x + L) + (y + L) = (x + y) + L, \quad \lambda(x + L) = \lambda x + L.$$

Неутрал за сабирање чини вектор $0 + L$, односно $x + L$ за било које $x \in L$, а супротан елемент елемнту $x + L$ је елемент $-x + L$.

Показаћемо да се X/L на природан начин може снабдети нормом. Наиме, дефинишемо

$$||x + L|| = \inf_{z \in L} ||x - z||. \tag{1}$$

Како заједно са вектором z, потпростор L садржи и вектор $-z$, и обратно, то важи и

$$\|x+L\| = \inf_{z\in L}\|x+z\|.$$

Доказаћемо да је X/L Банахов простор. Прво треба доказати да је функција уведена са (1) заиста норма. Јасно $\|x+L\|\ge 0$, као и $\|x+L\|=0$ акко постоји низ $z_n\in L$ такав да $\|x+z_n\|\to 0$. Последње, међутим, значи да је $x=\lim\limits_{n\to+\infty}(-z_n)$, а како је L затворен и $-z_n\in L$ то је и $x\in L$, тј. $x+L=0$ (нулти вектор у количнику).

Да скалар излази са модулом следи из

$$\|\lambda x+L\| = \inf_{z\in L}\|\lambda x+z\| = \inf_{z\in L}\|\lambda(x+(1/\lambda)z)\| = \inf_{z'\in L}|\lambda|\,\|x+z'\|,$$

јер заједно са z и $z'=(1/\lambda)z$ припада L (у питању је потпростор).

Најзад неједнакост троугла добијамо на следећи начин. За дате $x+L$ и $y+L\in X/L$ и све $\varepsilon>0$ постоје z, $z'\in L$ такви да је $\|x+L\|>\|x+z\|-\varepsilon/2$, односно $\|y+L\|>\|y+z\|-\varepsilon/2$. Но, тада је

$$\|x+y+L\| = \inf_{z\in L}\|x+y+z\| \le \|x+y+z+z'\| \le$$
$$\le \|x+z\|+\|y+z'\| < \|x+L\|+\|y+L\|+\varepsilon,$$

па тражено следи јер ε може бити произвољно.

Докажимо на крају, да је X/L комплетан. Послужићемо се карактеризацијом комплетности описаном у вежбању 1.13. Наиме, нормиран простор је комплетан ако и само ако апсолутна конвергенција реда повлачи обичну. Дакле, нека је x_n+L низ у X/L такав да $\sum_{n=1}^{+\infty}\|x_n+L\|<+\infty$. Према дефиницији норме у количнику, постоје $z_n\in L$ такви да је $\|x_n+z_n\|<\|x_n+L\|+1/2^n$. Тада је $\sum_{n=1}^{+\infty}\|x_n+z_n\|<+\infty$, па како је X комплетан, то ред $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n+z_n)$ конвергира у X. Означимо његову суму са x. Тада је

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n}(x_j+L)-(x+L)\Big\| = \Big\|\sum_{j=1}^{n}(x_j+z_j+L)-(x+L)\Big\| =$$
$$= \Big\|\sum_{j=1}^{n}(x_j+z_j)-x+L\Big\| \le \Big\|\sum_{j=1}^{n}(x_j+z_j)-x\Big\| \to 0,$$

кад $n\to+\infty$. Тако је $\sum_{n=1}^{+\infty}(x_n+L)=x+L$, чиме је доказ завршен.

2.3. Количнички простор Хилбертовог простора. Сваки Хилбертов простор H је уједно и Банахов. Према томе, ако је $L\le H$ његов Хилбертов потпростор онда, према претходном, количнички простор H/L јесте један Банахов простор. Да ли је H/L Хилбертов простор? У овом тренутку је нејасно како на количнику увести скаларни производ.

Ортогоналност

2.4. Дефиниција. Нека је $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ Хилбертов простор. Кажемо да су вектори x, $y\in H$ *ортогонални*, ако је $\langle x,y\rangle=0$. То обележавамо са $x\perp y$. Због својства (iii) скаларног производа, нема сумње, реч је о симетричној релацији. Приметимо да је $0\perp x$ за било које $x\in H$.

Ако је $x \perp y$ онда је

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

То је *Питагорино својство.* Оно се једноставно изводи, из релације $||x+y||^2 = ||x||^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle + ||y||^2$.

Нека је $S \subseteq H$ било какав подскуп Хилбертовог простора H (не мора бити ни векторски потпростор, ни затворен). *Ортогонални комплемент* или *ортогоналну допуну* скупа S, у означи $S^\perp$ дефинишемо као скуп оних вектора који су ортогонални на све векторе из S, тј.

$$S^\perp = \{x \in H \mid \forall y \in S, x \perp y\}. \tag{2}$$

Без обзира какво је S, скуп $S^\perp$ је увек Хилбертов потпростор. Да је $S^\perp$ векторски потпростор следи из линеарности скаларног производа. Наиме, ако x_1, $x_2 \in S^\perp$ и λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ тада је за све $y \in S$ испуњено $\langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle = 0$, па је и

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle + \lambda_2\langle x_2, y\rangle = 0.$$

Да бисмо доказали да је $S^\perp$ затворен, најпре утврдимо да је скаларни производ непрекидан, тј. да из $x_n \to x$ и $y_n \to y$ следи $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$. Заиста, тада и $||x_n|| \to ||x||$ и $||y_n|| \to ||y||$ па су $||x_n||$, $||y_n||$ ограничени низови и отуда

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle| \le ||x_n - x||\,||y_n|| + ||x||\,||y_n - y|| \to 0.$$

Сада једноставно утврђујемо да је $S^\perp$ затворен. Заиста, ако $x_n \in S^\perp$ и $x_n \to x$, тада за све $y \in S$ важи $\langle x_n, y\rangle = 0$ и отуда

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x_n, y\rangle = 0.$$

Ако је $S = \{x\}$ једночлан скуп, тада краће пишемо $x^\perp$ уместо $\{x\}^\perp$.

Једноставно се проверава да је $0^\perp = H$ (јер је за свако $x \in H$, $0 \perp x$), као и да је $H^\perp = \{0\}$, јер ако $x \in H^\perp$ тада је $x \perp x$, то јест $\langle x, x\rangle = 0$, а то је могуће само ако је $x = 0$.

За било који скуп S, пресек $S \cap S^\perp$ може да садржи само нула вектор. Заиста, ако $x \in S \cap S^\perp$, онда између осталог важи и $x \perp x$ одакле је $x = 0$.

2.5. Став. *Нека је S конвексан подскуп Хилбертовог простора H. Тада у S постоји елемент минималне норме.*

Као последица, ако је $S \subseteq H$, и $x \notin S$, онда постоји $y \in S$ такво да је $||x - y|| = \min_{z\in S}||x - z||$. Другим речима, у S постоји елемент на коме се достиже минимално растојање.

Примедба: Да се подсетимо, скуп S је конвексан ако из x, $y \in S$ и $0 \le \theta \le 1$ следује $\theta x + (1-\theta)y \in S$.

Доказ. Нека је $d = \inf\{||x|| \mid x \in S\}$. Тада постоји низ $x_n \in S$, такав да $||x_n|| \searrow d$.

Желимо да покажемо да је x_n Кошијев низ. Како је H Хилбертов простор, у њему важи релација паралелограма, па имамо

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2 = 2\left(\left\|\frac{x_n}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x_m}{2}\right\|^2\right).$$

Међутим, S је конвексан, па и $(x_n + x_m)/2 \in S$, одакле је $||(x_n + x_m)/2|| \ge d$. Тако имамо

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 \le \frac{1}{2}(||x_n||^2 + ||x_m||^2) - d^2.$$

Како $||x_n|| \searrow d$, то ће за произвољно $\varepsilon > 0$ и довољно велике m, n бити $||x_n||^2$, $||x_m||^2 < d^2 + \varepsilon$ и отуда

$$\left\|\frac{x_n - x_m}{2}\right\|^2 \le \frac{1}{2}(d^2 + \varepsilon + d^2 + \varepsilon) - d^2 = \varepsilon,$$

односно низ x_n је Кошијев. Стога постоји у H његов лимес $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Како је S затворен, то $x \in S$.

Због непрекидности норме, имамо $||x|| = \lim\limits_{n\to+\infty} ||x_n|| = d$. Дакле, у S постоји елемент минималне норме.

Да бисмо извели други део тврдње, уочимо скуп $S' = S - x = \{y - x \mid y \in S\}$, транслат скупа S. И S' је конвексан кад год је такав S. Стога, према претходном, у S' постоји елемент $y_0 - x$, (где $y_0 \in S$) мининалне норме, тј. $||y_0 - x|| \le ||y - x||$ за све $y \in S$. ☐

Примедба: Иако је претходни став исказан без експлицитног помињања скаларног производа, доказ важи само за Хилбертове просторе, јер смо се позивали на релацију паралелограма. И не само да се доказ заснива на својству специфичном за Хилбертове просторе, него се Став не може доказати за Банахове просторе – постоје контрапримери – видети вежбања 2.2, 2.3.

2.6. Теорема о ортопројекцији. *Нека је H Хилбертов простор и $L \le H$. Тада за свако $x \in H$ постоје једнозначно одређени вектори y и z такви да важи $y \in L$, $z \perp L$ и $x = y + z$.*

Вектор y се назива ортогонална пројекција *или краће* ортопројекција *вектора x, а z* ортогонална допуна.

!!!СЛИКА!!!

Доказ. Докажимо прво лакши део, јединственост. Нека је $x = y + z = y' + z'$, y, $y' \in L$, z, $z' \perp L$. Тада је $L \ni y - y' = z' - z \perp L$, тј. $y - y' = z' - z \in L \cap L^\perp$. Отуда је $y - y' = z' - z = 0$, тј. $y = y'$, $z = z'$.

Докажимо сада егзистенцију. Ако $x \in L$, онда узмемо $y = x$ и $z = 0$. У супротном, на L и x применимо претходни став, јер је сваки векторски потпростор конвексан скуп. Тако постоји $y \in L$ са својством

$$||x - y|| \le ||x - y'|| \tag{3}$$

за било које друго $y' \in L$. Ставимо $z = x - y$ (а шта би друго?), и докажимо $z \perp L$. Како је $x - y' = x - y + y - y' = z + y - y'$ и како $u = y - y' \in L$ кад год $y' \in L$, то се релација (3) може записати и као

$$||z|| \le ||z + u||,$$

за све $u \in L$. То је даље еквивалентно са

$$||z||^2 \le ||z||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle z, u\rangle + ||u||^2. \tag{4}$$

Како је L векторски потпростор, то заједно са u и $\lambda e^{i\theta} u$ припада L. Бирамо $\lambda > 0$, и $\theta \in [0, 2\pi)$ такво да је $e^{-i\theta}\langle z, u\rangle = -|\langle z, u\rangle|$. Када у (4) уврстимо $\lambda e^{i\theta} u$ уместо u добијамо

$$\lambda|\langle z, u\rangle| \leq \lambda^2 ||u||^2.$$

Сада скратимо једно λ и пустимо $\lim\limits_{\lambda\to 0}$ добијамо $|\langle z, u\rangle| \leq 0$. Зато је $z \perp u$, односно $z \in L^{\perp}$, јер је $u \in L$ било произвољно. □

Управо показана теорема тврди да је $H = L + L^{\perp}$, при чему је у питању директан збит векторских потпростора. С обзиром да су сабирци у том збиру ортогонални, такав збир називаћемо *ортогонални збир*, а означаваћемо га са $H = L \oplus L^{\perp}$.

2.7. Став. *Нека је $S \subseteq H$ било који подскуп Хилбертовог простора H. Тада је $S^{\perp\perp} = \overline{\mathscr{L}in(S)}$, где је $\mathscr{L}in$ ознака за линеарни омотач скупа S, односно за скуп свих* коначних *линеарних комбинација вектора из S.*

Као последица, ако је $L \leq H$, онда је $L^{\perp\perp} = L$.

Доказ. Једноставно утврђујемо да је $S \subseteq S^{\perp\perp}$. Заиста, ако $x \in S$, тада је по дефиницији $x \perp y$ за све $y \in S^{\perp}$, па $x \in S^{\perp\perp}$. Како смо већ утврдили да је ортогонални комплемент увек затворен линеаран потпростор, то значи да је $\overline{\mathscr{L}inS} \subseteq S^{\perp\perp}$.

Докажимо обратну инклузију. Претпоставимо да $x \in S^{\perp\perp}$. Према теореми о ортопројекцији, $x = y + z$, при чему $y \in \overline{\mathscr{L}inS}$, $z \perp \overline{\mathscr{L}inS}$. Јасно, тада и $z \perp S$, тј. $z \in S^{\perp}$, и отуда $x \perp z$. Како је и $y \perp z$, то је онда и $z = x - y \perp z$, па закључујемо да је $z = 0$. Тако $x = y \in \overline{\mathscr{L}inS}$. □

2.8. Став. *Нека је H Хилбертов простор и $L \leq H$. Тада је $H/L \cong L^{\perp}$. Прецизније, постоји пресликавање $\Phi : H/L \to L^{\perp}$, које је:*

(i) *бијекција (тј. чини H/L и $L^{\perp}$ једнаким у скуповном смислу);*
(ii) *линеарно (тј. чини дате скупове истим у алгебарском смислу);*
(iii) *изометрија, односно $||\Phi(x + L)|| = ||x + L||$ (тј. чини дате скупове истим у метричком смислу).*

Доказ. Нека је $x \in H$. Тада је према Теореми о ортопојекцији $x = y + z$ за јединствене $y \in L$, $z \in L^{\perp}$. Дефинишемо

$$\Phi(x + L) = z.$$

Доказаћемо да је Φ тражено пресликавање. Пре свега за свако $z \perp L$ имамо $z = 0 + z$, $0 \in L$, $z \perp L$, и отуда $\Phi(z + L) = z$. Отуда је Φ сурјективно.

Даље, ако је $\Phi(x_1) = z_1$, $\Phi(x_2) = z_2$, онда је $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$, y_1, $y_2 \in L$, z_1, $z_2 \in L^{\perp}$. Како су L и $L^{\perp}$ линеарни потпротори, то $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in L$, $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in L^{\perp}$, па из $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$ закључујемо $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \Phi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, односно Φ је линеарно.

Да бисмо доказали да је Φ инјективно, имајући у виду даје линеарно, довољно је доказати да има тривијално језгро. Дакле, нека је $\Phi(x + L) = 0$, одатле је $x = y + 0$, при чему $y \in L$. Тада и $x = -y \in L$, па је $x + L = 0 + L$.

Докажимо најзад да је изометрија. Нека је $x = y + z$, $y \in L$, $z \in L^{\perp}$, и нека је $y' \in L$ произвољно. Тада је $x + y' = x - y + y + y' = z + (y + y')$, при чему $y + y' \in L$, одакле је $z \perp y + y'$. Зато је

$$||x + y'||^2 = ||z + (y + y')||^2 = ||z||^2 + ||y + y'||^2 \geq ||z||^2,$$

и још се једнакост достиже за $y' = -y$. Тако је

$$||x + L|| = \inf_{y' \in L} ||x + y'|| = ||z|| = ||\Phi(x + L)||.$$

☐

2.9. Последица. *Нека је H Хилбертов простор и $L \leq H$. Норма на количничком простору H/L задовољава релацију паралелограма. И више, на H/L постоји скаларни производ. Тај производ једнак је одговарајућем скаларном производу у $L^{\perp}$.*

2.10. Допуњиви (комплементарни) потпростори. Ако је H Хилбертов простор, онда за сваки његов потпротор L постоји други потпростор M са својством $H = L \dotplus M$ - директан збир. Конкретно, то је његова ортогонална допуна $L^{\perp}$.

Међутим, у Банаховим просторима то не мора да важи. Стога има смисла следећа дефиниција.

Нека је X Банахов простор, и $L \leq X$. Кажемо да је L *допуњив* (или *комплементаран*) ако постоји други потпростор M (подразумева се затворен), такав да је $X = L \dotplus M$.

Коначно димензионални Банахови простори

2.11. Простори $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{R}^n$. Познат је пример простора $\mathbb{C}^n$, односно $\mathbb{R}^n$ са такозванми p-нормама. Наиме, за $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ имамо

$$||z||_p = (|z_1|^p + |z_2|^p + \cdots + |z_n|^p)^{1/p}, \qquad 1 \leq p$$

односно за $p = \infty$

$$||z||_{\infty} = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|\}.$$

Међу свим овим нормама, релацију паралелограма задовољава искључиво 2-норма. Скаларни производ дат је са

$$\langle z, w \rangle = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2 + \cdots + z_n\overline{w}_n.$$

Подсетимо се да за две норме $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ на истом векторском простору X кажемо да су *еквивалентне* ако постоје константе $0 < c \leq C$ такве да за све $x \in X$ важи

$$c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1.$$

Тада те две норме одређују исте конвергентне низове, исте непрекидне функције, исте отворене (односно) затворене скупове, итд.

Све p-норме су међусобно еквивалентне. То следи на основу неједнакости

$$||z||_{\infty} \leq ||z||_p \leq ||z||_q \leq ||z||_1 \leq n||z||_{\infty},$$

за $1 \leq q \leq p < +\infty$, које су познате од раније. (А и лако се изводе.)

Примедба: И да нису познати, ови простори се могу увести као специјалан случај $L^p(X,\mu)$ простора, када је $X=\{1,2,\dots,n\}$, а мера бројачка.

Познато је и да је у поменутим просторима скуп компактан ако и само ако је ограничен и затворен.

Иако поменуте норме нису и једине које постоје на простору C^n (односно на R^n), постоје и друге, ипак је свака друга норма њима еквиваленна. То ће се видети из наредног Става.

2.12. Став. *Нека је X коначнодимензионалан векторски простор. Сваке две норме $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ на њему су међусобно еквивалентне.*

Доказ. Сваки коначно димензионални простор над пољем скалара K изоморфан је са K^n у алгебарском смислу. Стога претпоставимо да је $X=\mathrm{K}^n$. Даље, како је релација еквивалентности норми транзитивна, довољно је доказати да је свака норма еквивалентна са неком од p-норми, рецимо за $p=1$. Стога нека $\|\cdot\|_1$ означава p-норму за $p=1$, а нека $\|\cdot\|_2$ означава произвољну другу норму. (Овде постоји опасност од забуне. $\|\cdot\|_2$ не означава p-норму за $p=2$.)

Нека је e_1, e_2, …, e_n канонска база простора K^n, тј. $e_1=(1,0,\dots,0)$ итд, и нека је $C=\max\{\|e_1\|_2,\|e_2\|_2,\dots,\|e_n\|_2\}$. Тада је за $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$

$$\|z\|_2=\|z_1e_1+\cdots+z_ne_n\|_2\le|z_1|\|e_1\|_2+\cdots+|z_n|\|e_n\|_2\le C(|z_1|+\cdots+|z_n|)=C\|z\|_1. \tag{5}$$

Тиме смо добили једну неједнакост. Докажимо и другу.

Друга норма је непрекидна у првој, или прецизније, пресликавање $x\mapsto\|x\|_2$ је непрекидно у Банаховом простору $(X,\|\cdot\|_1)$. Заиста, из (5) налазимо

$$\big|\|x\|_2-\|y\|_2\big|\le\|x-y\|_2\le C\|x-y\|_1,$$

па ако $x\to y$ у Банаховом простору $(X,\|\cdot\|_1)$, онда и $\|x\|_2\to\|y\|_2$. Јединична сфера $S=\{x\in X\mid\|x\|_1=1\}$ је затворен и ограничен скуп, па је компактан. Функција $\|x\|_2$ као непрекидна, према Вајерштрасовој теореми достиже минимум на скупу S, тј. постоји константа c таква да за све x, за које је $\|x\|_1=1$ важи $\|x\|_2\ge c$. Очигледно је $c\ge0$. Докажимо да не може бити $c=0$. Заиста, у супротном би постојао вектор $x\in X$ такав да је $\|x\|_1=1$ што значи $x\ne0$, али истовремено и $\|x\|_2=0$ што значи $x=0$, а то је контрадикција. Дакле, $c>0$.

Сада једноставно изводимо обратну неједнакост. Наиме, за било које $X\ni x\ne0$, вектор $\dfrac{1}{\|x\|_1}x$ има 1-норму једнаку 1, те за њега важи

$$\left\|\frac{1}{\|x\|_1}x\right\|_2\ge c,$$

односно

$$\|x\|_2\ge c\|x\|_1,$$

када скалар $1/\|x\|_1$ извучемо испред норме, а затим га пребацимо на десну страну. □

2.13. Последица.

(a) *Сваки коначно димензионалан нормиран векторски простор је комплетан.*

(б) *Сваки коначнодимензионалан векторски потпростор Банаховог простора је затворен.*

Доказ. (а) Познато је да је $\mathbb{K}^n$ комплетан у односу на било коју од p-норми. Како је произвољна норма еквивалентна са неком од њих, то је он комплетан и у односу на било коју другу норму.

(б) Нека је X Банахов простор и L његов линеаран потпростор коначне димензије. L је комплетан посматран сам за себе као нормиран простор. Стога мора бити затворен. ☐

2.14. Лема (о скоро ортогоналном вектору). У Банаховим просторима није могуће увести појам ортогоналности на начин како је то учињено у Хилбертовим просторима. Ипак појам ортогоналне допуне се може у неким ситуацијама заменити наредном тврдњом.

Нека је X Банахов простор и $L \leq X$ (и још $L \neq X$). Тада за свако $\delta > 0$ постоји $x \in X$ такво да је $||x|| = 1$ и $d(x, L) > 1 - \delta$.

Примедба: Ова тврдња је тривијална ако је X Хилбертов. Тада је, наиме довољно узети било које $x \in L^\perp$ норме 1 и биће $d(x, L) = ||x|| = 1$.

Доказ. Нека је $y \in X \setminus L$ било које, и нека је $d = d(y, L) = \inf_{z \in L} ||y - z||$. За било које $\varepsilon > 0$ постоји $z_0 \in L$такво да је

$$||y - z_0|| < d + \varepsilon. \tag{6}$$

Ставимо

$$x = \frac{1}{||y - z_0||}(y - z_0).$$

Очигледно је $||x|| = 1$. За било које друго $z \in L$ имамо

$$||x - z|| = \left\| \frac{y - z_0}{||y - z_0||} - z \right\| = \frac{1}{||y - z_0||} ||y - (z_0 + ||y - z_0|| z)|| \geq \frac{d}{||y - z_0||},$$

јер и $z_0 + ||y - z_0|| z \in L$. А када узмемо у обзир и (6) имамо

$$||x - z|| > \frac{d}{d + \varepsilon}.$$

Сада је довољно одабрати ε довољно мало тако да буде $d/(d + \varepsilon) > 1 - \delta$, што је могуће, јер $d/(d + \varepsilon) \to 1$ када $\varepsilon \to 0$. ☐

2.15. Став (карактеризација коначно димензионалних простора). *Нека је X Банахов простор. Тада је $\dim X < +\infty$ ако и само ако је јединична сфера у X компактна.*

Примедба: Место сфере се може посматрати и лопта. Видеће се из доказа.

Доказ. Нека је $\dim X < +\infty$. Тада је јединична сфера S компактна, јер је то тако у простору са p-нормом, а свака друга норма је еквивалентна некој p-норми.

Нека је X бесконачно димензионалан. Формираћемо низ вектора x_n на следећи начин. Нека је x_1 било који јединични вектор. Посматрамо линеаран потпростор $L_1 = \mathscr{L}in\{x_1\}$. Он је затворен, јер је $\dim L_1 = 1$, па према Леми о скоро ортогоналном вектору, постоји x_2 такво да је $||x_2|| = 1$ и $d(x_2, L) > 1/2$. (Узели смо $\delta = 1/2$ у Леми.) Тада је, између осталог и $d(x_1, x_2) > 1/2$. Посматрамо сада потпростор $L_2 = \mathscr{L}in\{x_1, x_2\}$ и настављамо индуктивно.

Нека су вектори x_1, x_2, …, x_n већ одређени. Линеаран потпростор $L_n = \mathscr{L}in\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ је затворен, јер је $\dim L_n \leq n$ (у ствари је једнака n, али то није битно). Према Леми о скоро ортогоналном вектору, постоји вектор x_{n+1} такав да је $||x_{n+1}|| = 1$ и $d(x_{n+1}, L_n) > 1/2$, па између осталог важи и $d(x_{n+1}, x_j) > 1/2$ за све $1 \leq j \leq n$.

Тако смо формирали низ вектора $x_n \in S$ (сви су јединчни), тако да за $n \neq m$ важи $||x_n - x_m|| > 1/2$, односно свака два вектора из тог низа су на растојању барем $1/2$. Такав низ не може да има ниједан Кошијев подниз, те стога нема конвергентан подниз. Другим речима, у S постоји низ који нема конвергентан подниз. Дакле S није компактан. ☐

Примедба: Осим што је овиме изведена карактеризација коначно димензионалних простора, можемо извести и још један закључак. Наиме, кад год је Банахов простор X бесконачне димензије тада не важи карактеризација компактних скупова „скуп је компактан ако и само ако је затворен и ограничен“. Наиме, тада је јединчна сфера затворен и ограничен скуп који није компактан!

2.16. Конвексне околине нуле и фукционал Минковског. Нека је $(X, ||\cdot||)$ коначнодимензионалан Банахов простор. Отворена јединична лопта је $B(0;1) = \{x \in X \mid ||x|| < 1\}$. Означаваћемо је даље краће са B. Лопта B има следећа својства:

(i) B је отворен скуп, јер за $x \in B(0;1)$ имамо $||x|| < 1$, па је $B(x;\delta) \subseteq B(0;1)$ за $\delta < 1 - ||x||$.

(ii) B је конвексан скуп. Наиме, ако x_1, $x_2 \in B$ и $\theta \in [0,1]$ тада

$$||\theta x_1 + (1-\theta)x_2|| \leq \theta ||x_1|| + (1-\theta)||x_2|| < \theta + 1 - \theta = 1.$$

(iii) B је *симетричан* (или *балансиран*) скуп, што значи да B заједно са x садржи и све векторе облика λx, где је $|\lambda| = 1$. У случају $\mathrm{K} = \mathrm{R}$ то се своди на мпликацију $x \in B$ повлачи $-x \in B$, а у случају $\mathrm{K} = \mathrm{C}$ на $x \in B$ повлачи $e^{i\theta} x \in B$ за $\theta \in \mathrm{R}$.

(iv) B не садржи ниједну полуправу са почетком у нули, тј. за свако x, полуправа са почетком у нули (или краће зрак) која садржи x, $\{tx \mid t > 0\}$ није садржана у B. Друкчије, за свако $x \neq 0$ постоји $t > 0$ тако да $tx \notin B$. Заиста, довољно је узети $t > 1/||x||$. Ово својство ћемо звати ограниченост по зрацима, или само ограниченост ако не постоји опасност од забуне.

Ове четири особине у одређеном смислу карактеришу отворену јединичну лопту. Наравно, није сваки ограничен, отворен, конвексан и симетричан скуп једнак јединичној лопти – то би било немогуће, већ за сваки ограничен, отворен конвексан и симетричан скуп који садржи нулу постоји нека друга норма, у односу на коју ће тај скуп постати јединична лопта. Овде се не поставља питање како дефинишемо појам отвореног скупа, у односу на коју норму, јер су на коначно димензионалним просторима све норме еквивалентне, па имамо само једну фамилију отворених скупова.

Нека је V ограничена, отворена, конвексна и симетрична околина нуле у коначно димензионалном векторском простору X. Дефинишемо *функционал Минковскоī* $\mu_V : X \to \mathrm{R}$ са

$$\mu_V(x) = \inf \Lambda_x, \quad \Lambda_x = \{t > 0 \mid \frac{1}{t} x \in V\}.$$

Приметимо да $t\in\Lambda_x$ и $s>t$ повлачи $s\in\Lambda_x$. Како је V отворен, то значи да је $\Lambda_x=(\mu_V(x),+\infty)$.

Показаћемо да μ_V задовољава аксиоме норме. Очигледно је $\mu_V(x)\geq 0$, као и $\mu_V(0)=0$. Тада је, наиме, $\Lambda_0=(0,+\infty)$. Претпоставимо да је $\mu_V(x)=0$ и $x\neq 0$. Тада је $\Lambda_x=(0,+\infty)$, односно $tx\in V$ за све $t>0$. То се, међутим, противи четвртом својству (ограниченост по зрацима).

Ако је $\lambda>0$ тада је $\Lambda_{\lambda x}=(1/\lambda)\Lambda_x$. Заиста $t\in\Lambda_{\lambda x}$ ако и само ако $(1/(t/\lambda))x=(1/t)\lambda x\in V$ што је еквивалентно са $t/\lambda\in\Lambda_x$. Тако за $\lambda>0$ имамо $\mu_V(\lambda x)=\lambda\mu_V(x)$. С друге стране, на основу симетричности скупа V важи $\Lambda_{\lambda x}=\Lambda_x$ ако је $|\lambda|=1$. Тако за $|\lambda|=1$ важи $\mu_V(\lambda x)=\mu_V(x)$. Сада резултат $\mu_V(\lambda x)=|\lambda|\mu_V(x)$ следи на основу поларног разлагања комплексног броја $\lambda=|\lambda|e^{i\theta}$, односно $\lambda=\pm|\lambda|$ ако је поље скалара реално.

Најзад, неједнакост троугла изводимо помоћу конвексности скупа V. Претпоставимо да је x, $y\neq 0$ (иначе се неједнакост тривијално изводи). Нека су t_1, $t_2>0$ бројеви такви да је $\mu_V(x)\leq t_1<\mu_V(x)+\varepsilon/2$ и $\mu_V(y)\leq t_2<\mu_V(y)+\varepsilon/2$. Тада $\dfrac{1}{t_1}x$, $\dfrac{1}{t_2}y\in V$, па због конвкесности и

$$\frac{\theta}{t_1}x+\frac{1-\theta}{t_2}y\in V. \tag{7}$$

Бирамо $\theta=t_1/(t_1+t_2)$. Тада се (7) своди на

$$\frac{1}{t_1+t_2}(x+y)\in V,\quad \text{тј.}\quad t_1+t_2\in\Lambda_{x+y}.$$

Тако је $\mu_V(x+y)\leq t_1+t_2<\mu_V(x)+\mu_V(y)+\varepsilon$, чиме је доказ завршен, јер ε може бити произвољно мало.

Најзад, отворена јединична лопта у норми μ_V поклапа се са скупом V. Заиста, $\mu_V(x)<1$ еквивалентно је са $1\in\Lambda_x$, односно са $x\in V$.

Релативна компактност

У оквиру овог одељка, чак и када су искази формулисани на нивоу метричких простора, у доказима уместо $d(x,y)$ пишемо $||x-y||$.

2.17. Основни појмови. Подсетимо се, скуп A у метричком простору је компактан ако се из сваког низа $x_n\in A$ може издвојити подниз који конвергира ка неком $x\in A$. Овоме је еквивалентна и тополошка дефиниција – скуп је компакан ако се из сваког његовог отвореног покривања може издвојити коначно потпокривање.

Кажемо да је A *релативно компактан* ако и само ако је његово затворење $\overline{A}$ компактан скуп. То је еквиваклентно томе да се из сваког низа $x_n\in A$ може издвојити конвергентан подниз, само не захтевамо да његова гранична вредност припада A.

Сваки релативно компактан скуп A је ограничен, тј. $A\subseteq B(0;R)$ за неко $R>0$. Заиста, ако A није компактан, могуће је индуктивно дефинисати низ $x_n\in A$ са својством $||x_{n+1}||>||x_n||+1$, одакле непосредно следи $||x_m-x_n||>1$ за $m\neq n$. Такав низ нема ни један Кошијев подниз, па не може имати тачку нагомилавања.

Обратно, међутим, не важи. Наиме, јединична лопта $B = B(0;1)$ је ограничен скуп, али није релативно компактан, јер је њено затворење затворена јединична лопта $\overline{B}$ за коју смо већ доказали да није компактна, осим ако је простор коначно димензионалан.

Релативна компактност еквивалентна је (у случају комплетности простора) са јачим појмом који управо дефинишемо.

Скуп A је *тотално ограничен* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји коначан низ тачака x_1, x_2, …, x_n такав да лопте $B(x_j;\varepsilon)$ покривају A, тј. да важи $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j;\varepsilon)$. Или, када се распише: за свако $y \in A$ постоји $j \in \{1,2,\dots,n\}$ такво да је $||y - x_j|| < \varepsilon$. Скуп тачака са последњим својством назива се *ε-мрежа*, те се тотално ограничени скупови могу слободнијим језиком дефинисати као они скупови који имају коначну ε-мрежу за све $\varepsilon > 0$.

Напомена: Не захтева се да x_1, x_2, …, x_n припадају A.

2.18. Став (Хаусдорф)[1]**.** *Нека је X комплетан метрички простор. Скуп $A \subseteq X$ је релативно компактан ако и само ако је тотално ограничен.*

Доказ. Докажимо прво обратан смер. Нека је A тотално ограничен, и нека је $x_n \in A$ произвољан низ. Конструкција његовог конвергентног подниза одвија се, уз одређене модификације, као у доказу Болцано Вајерштрасовог става. Узмемо $\varepsilon = 1/2$ и нађемо коначну 1-мрежу за скуп A. Како коначно много кугли полупречника 1 покрива A, то се у бар једној таквој кугли налази бесконачно много чланова низа. Њен центар означимо са y_1, а саму куглу са $B_1 = B(y_1;1/2)$. Скуп $B_1 \cap A$ је подскуп скупа A па је и он тотално ограничен, те стога има коначну $1/6$-мрежу. Дакле, постоји кугла полупречника $1/6$ која садржи бесконачно много чланова низа x_n. Њен центар означимо са y_2, а саму куглу са $B_2 = B(y_2;1/6)$.

И даље, индуктивно. Нека су већ формиране кугле B_1, …, B_k са центрима у y_j и полупречника $1/j(j+1)$. Важи $A \cap B_1 \cap \dots \cap B_k \subseteq A$, па је и тај скуп тотално ограничен и има коначну $1/(n+1)(n+2)$ мрежу. Стога постоји кугла полупречника $1/(n+1)(n+2)$ која садржи бесконачно много чланова низа x_n. Означимо је са $B_{n+1} = B(y_{n+1};1/(n+1)(n+2))$.

За низ центара важи

$$||y_n - y_{n-1}|| < \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}. \tag{8}$$

Заиста у супротном би било $B_n \cap B_{n-1} = \emptyset$ што нема смисла. Одатле се лако изводи да је низ центара Кошијев. Наиме, за $m > n$ на основу (8) имамо

$$\begin{aligned} ||y_m - y_n|| &\le ||y_m - y_{m-1}|| + \dots + ||y_{n+1} - y_n|| < \\ &< \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \end{aligned} \tag{9}$$

за $m \ge n$ довољно велике. Како је X комплетан, низ y_n је конвергентан, рецимо $y_n \to y$. Из (9) такође налазимо да је

$$||y - y_n|| \le 1/(n+1). \tag{10}$$

Докажимо да је y тачка нагомилавања низа x_n. Ако је $\varepsilon > 0$ произвољно, онда постоји природан број n са својством $1/n < \varepsilon$, и тада је $B_n \subseteq B(y;\varepsilon)$, јер ако $||z - y_n|| < 1/n(n+1)$ онда због (10) имамо $||z - y|| \le ||z - y_n|| + ||y_n - y|| <$

---

[1] Felix Hausdorff (1868-1942) – немачки математичар јеврејског порекла

$1/n(n+1)+1/(n+1)=1/n$. Тако свака ε околина тачке y садржи бесконачно много чланова низа x_n.

Докажимо сада директан смер. Претпоставимо супротно, да A није тотално ограничен. Тада за неко фиксирано $\varepsilon>0$, A нема коначну ε-мрежу. Конструисаћемо низ $x_n\in A$ који нема ниједан Кошијев подниз, на следећи начин. Елемент $x_1\in A$ бирамо произвољно. Скуп $\{x_1\}$ је коначан, чак једночлан, па не чини коначну ε-мрежу. Стога постоји $x_2\in A$ са својством $||x_2-x_1||\ge\varepsilon$. Ни скуп $\{x_1,x_2\}$ не чини коначну ε-мрежу, па постоји $x_3\in A$ који не припада $B(x_1;\varepsilon)\cup B(x_2;\varepsilon)$, односно $||x_3-x_1||$, $||x_3-x_2||\ge\varepsilon$. И тако редом, налазимо низ $x_n\in A$ такав да је $||x_m-x_n||\ge\varepsilon$ за $m\ne n$. То јест он не може имати нити један Кошијев подниз. □

Примедба: Комплетност простора X користи се само у доказу обратног смера. Стога за просторе који нису комплетни важи импликација A релативно компактан повлачи A тотално ограничен, док обратна не важи. Контрапример је интервал $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ у простору $\mathbb{Q}$ који је тотално ограничен, али није релативно компактан.

2.19. Равностепено непрекидне функције. У даљем, посматрамо простор $C[a,b]$ непрекидних функција на $[a,b]$ као и простор $C_{\mathbb{R}}[a,b]$ реланoвредносних непрекидних функција на $[a,b]$. Овај други над пољем $\mathbb{R}$.

Познато је да је свака функција $x\in C[a,b]$, осим што је непрекидна, уједно и равномерно непрекидна. То је Канторова теорема. Међутим, ако уместо једне посматрамо скуп функција поставља се питање да ли су оне равномерно непрекидне на исти начин. Зато дајемо следећу дефиницију:

Скуп $A\subseteq C[a,b]$ је *равностепено непрекидан* ако за све $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$ такво да за све $x\in A$ и све s, $t\in[a,b]$ важи $|x(s)-x(t)|<\varepsilon$.

Шта је овде ново, у односу на равномерну непрекидност? Ако је скуп A једночлан ништа, у питању је обична равномерна непрекидност. Ново је то што избор броја δ који контролише непрекидност (што веће δ то боља непрекидност) не сме да зависи од избора функције $x\in A$. Тако је могуће, за бесконачне скупове, да свака конкретна функција буде равномерно непрекидна, али да има своје δ и да при томе нема најмањег могућег δ. У том случају такав скуп неће бити равностепено непрекидан.

2.20. Теорема (Арцела-Асколи). *Скуп $A\subseteq C[a,b]$ је релативно компактан ако и само ако је ограничен и равностепено непрекидан.*

Примедба: Ова теорема важи како за комплексно вредносне функције из $C[a,b]$ тако и за реалновредносне из $C_{\mathbb{R}}[a,b]$. Доказ ће, међутим, бити изведен само за реалан случај.

Доказ. Нека је A релативно компактан. Тада он мора бити ограничен. Покажимо и да је равностепено непрекидан. Нека је $\varepsilon>0$ дато. Према Хаусдорфовом ставу, A је тотално ограничен, па постоји коначна $\varepsilon/3$ мрежа за A. Нека су то функције x_1, x_2, …, x_n. Свака од њих је равномерно непрекидна, па постоје бројеви δ_j такви да из $|s-t|<\delta_j$ следи $|x_j(s)-x_j(t)|<\varepsilon/3$. Како функција x_j има коначно много, то постоји $\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_n\}>0$. Тада за све j имамо

$$|s-t|<\delta\Rightarrow|x_j(s)-x_j(t)|<\varepsilon. \tag{11}$$

Нека је сада $x \in A$ произвољна. Тада постоји j такво да је $\|x - x_j\| < \varepsilon/3$, то јест за све $t \in [a,b]$ имамо $|x(t) - x_j(t)| < \varepsilon/3$. Тада на основу (11), за $|s-t| < \delta$ имамо

$$|x(s) - x(t)| \leq |x(s) - x_j(s)| + |x_j(s) - x_j(t)| + |x_j(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Нека је сада A ограничен и равностепено непрекидан. Доказаћемо да је тотално ограничен, што је довољно на основу Хаусдорфовог става. Како је A ограничен, то је $A \subseteq B(0;R)$ за неко $R > 0$, односно $\|x\| < R$ за све $x \in A$, тј. $|x(t)| < R$ за све $x \in A$ и све $t \in [a,b]$. То значи да су графици свих функција $x \in A$ смештени у правоугаонику $[a,b] \times [-R,R]$.

Уочићемо $\varepsilon > 0$ и конструисаћемо коначну ε-мрежу за A. Како је скуп A равностепено непрекидан, постоји $\delta > 0$ такво да за све $x \in A$ и све s, $t \in [a,b]$ имамо

$$|s-t| < \delta \Rightarrow |x(s) - x(t)| < \varepsilon/4. \tag{12}$$

Уочимо поделу интервала $[a,b]$, $\mathscr{P} : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ чији је параметар мањи од δ, тј. $t_k - t_{k-1} < \delta$ за све k. А затим уочимо и поделу интервала $[-R,R]$, $\mathscr{Q} : -R = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = R$ чији је параметар мањи од $\varepsilon/2$, тј.

$$y_k - y_{k-1} < \varepsilon/2 \tag{13}$$

за све k. Тачака облика (t_k, y_l) има коначно много. Прецизније, има их $(n+1)(m+1)$.

Нас ће занимати функције које пролазе кроз поменуте тачке. Зато је важно да избројимо колико има низова тачака:

$$(t_0, y_{l_0}), (t_1, y_{l_1}), \ldots, (t_n, y_{l_n}). \tag{14}$$

У низу има $n+1$ тачка, а на сваком месту имамо по $m+1$ могућности. Стога таквих низова има $(m+1)^{n+1}$. Тачан број у ствари није важан – једино је битно да их има коначно много. Сваком низу облика (14) придружићемо функцију x такву да је $x(t_k) = y_{l_k}$ и која је линеарна на интервалима $[t_{k-1}, t_k]$, (тј. за $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ $x(t) = y_{l_k}(t - t_{k-1})/(t_k - t_{k-1}) + y_{l_{k-1}}(t_k - t)/(t_k - t_{k-1})$). Такве функције означимо са x_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, где је $N = (m+1)^{n+1}$.

!!!СЛИКА!!!

Тврдимо да те функције чине коначну ε-мрежу за A. Заиста, нека је $x \in A$ прозвољна фукција. Тада за свако k, на основу (13) постоји l_k такво да је $|x(t_k) - y_{l_k}| < \varepsilon/4$. Нека је x_i део по део линеарна функција за коју је $x_i(t_k) = y_{l_k}$. Због (12) растојање вредности функције x у суседним тачкама поделе не може бити веће од $\varepsilon/4$, па имамо

$$|x_i(t_k) - x_i(t_{k_1})| \leq |x_i(t_k) - x(t_k)| + |x(t_k) - x(t_{k-1})| + |x(t_{k-1}) - x_i(t_{k-1})| < \frac{3\varepsilon}{4},$$

тј. и растојање између $x_i(t_k)$ и $x_i(t_{k-1})$ је довољно мало. Како је x_i линеарна на интервалу $[t_{k-1}, t_k]$ то важи и $|x(t) - x(t_k)| < 3\varepsilon/4$.

Тако, за $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ имамо $|t - t_k| < \delta$ и одатле

$$|x(t) - x_i(t)| \leq |x(t) - x(t_k)| + |x(t_k) - x_i(t_k)| + |x_i(t_k) - x_i(t)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \frac{5\varepsilon}{4}.$$

Доказ завршавамо узимајући супремум по свим $t \in [a,b]$ јер претходна неједнакост не зависи од избора интервала $[t_{k-1}, t_k]$. ☐

Шаудерова теорема о непокретној тачки и примене

2.21. Теореме о непокретој тачки, као што је на пример Банахова имају важне примене. Езистенција и јединственост решења различитих класа једначина често се доказују помоћу теорема о непокретној тачки. Нарочито се често наводе примене у диференцијалним једначинама. Довољно је дату једначину записати у облику $F(x) = x$, где је F погодно одабрана функција, а затим доказати да F испуњва претпоставке неке теореме о непокретној тачки.

Један од најпознатијих примера је доказ Пикарове теореме, који тврди да диференцијална једначина са почетним условом

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

тзв. *Кошијев проблем* има јединствено решење у некој околини тачке t_0, уколико је g непрекидна функција две променљиве која испуњава тзв. Липшицов услов по другој променљивој тј. ако је $|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ за све x_1, x_2 и неко фиксирано $L > 0$.

Поред Банахове теореме о непокретној тачки, једна од познатијих теорема о непокретој тачки је:

2.22. Теорема [Брауер]. *Нека је $Q \subseteq \mathrm{R}^k$ скуп хомеоморфан затвореној јединичној лопти, и нека је $f: Q \to Q$ непрекидна функција. Тада f има бар једну непокретну тачку, тј. постоји $x \in Q$ са својством $f(x) = x$.*

Постоји више различитих доказа Брауерове теореме. Најједноставнији се ослања на функторијалност хомолошких група. Због тога се Брауерова теорема по правилу исказује и доказује у курсевима алгебарске топологије. Доказ(??) Брауерове теореме наведен је у додатку???

У случају $k = 1$, Брауерова теорема се своди на тврђење да свака непрекидна функција $f: [a,b] \to [a,b]$ има непокретну тачку. Доказ се, у том случају, једноставно изводи примењујући Болцанову теорему на функцију $g(x) = f(x) - x$, јер важи $g(a) \leq 0 \leq g(b)$.

Брауреова теорема се понекад исказује и за затворене конвексне скупове. Наиме, може се показати (видети додатак???) да је сваки компактан конвексан подскуп простора R^k хомеоморфан јединичној лопти у простору R^l за неко $l \leq k$. Отуда другачија формулација Брауерове теореме гласи:

Нека је $Q \subseteq \mathrm{R}^k$ компактан и конвексан скуп, и нека је $f: Q \to Q$ непрекидна функција. Тада f има бар једну непокретну тачку.

Ове две формулације Брауерове теореме су еквивалентне. Наиме, из прве следи друга, јер је сваки затворен конвексан скуп хомеоморфан некој лопти. С друге стране пру тврдњу је довољно доказати за случај када је Q лопта, јер се теорема лако преноси на хомеоморфне скупове. Наиме, ако је Q хомеоморфан лопти, онда постоји хомеоморфизам $g: B \to Q$, тј. g је бијекција и g и g^{-1} су непрекидне. Ако је $f : Q \to Q$ непрекидна, онда је непрекидна и $g \circ f \circ g^{-1} : B \to B$, па има непокретну тачку, тј. постоји $y \in B$, такво да је $g(f(g^{-1}(y))) = y$, тј. $f(g^{-1}(y)) = g^{-1}(y)$, односно $x = g^{-1}(y)$ је непокретна тачка пресликавања f. Како је затворена лопта компактан и конвексан скуп то друга формулација повлачи прву.

Брауерова теорема везана је за коначно димензионалне просторе. Следећа теорема је њено уопштење на бесконачно димензионалне просторе.

2.23. Теорема [**Шаудерова о непокретној тачки**]. *Нека је X Банахов простор, и нека је $K \subseteq X$ компактан конвексан скуп. Ако је $f : K \to K$ непрекидна функција, онда f има бар једну непокретну тачку, тј. постоји $x \in K$ такво да је $f(x) = x$.*

Доказ. Доказ заснивамо на апроксимацији комапктних скупова скуповима који су садржани у коначно димензионалним просторима.

Уочимо произвољан природан број n. Како је K компактан, он је и тотално ограничен, па има коначну $1/n$-мрежу. Нека су то тачке p_1, p_2, …, p_{m_n}. Нека је функција $\varphi_i : K \to \mathrm{R}$ дата са $\varphi_i(x) = \max\{0, 1/n - \|x - p_i\|\} \geq 0$. Лопте $K(p_i; 1/n)$ покривају K, па је $\varphi_i(x) > 0$ за бар једно $i = 1, 2, \ldots, m_n$. Отуда је $\sum_{i=1}^{m_n} \varphi_i(x) >$, па је функција P_n дата са

$$P_n x = \frac{\sum_i \varphi_i(x) p_i}{\sum_i \varphi_i(x)}$$

коректно дефинисана. Приметимо и да је $P_n x$ конвексна комбинација тачака p_i и стога $P_n x$ увек припада K (у питању је конвексан скуп).

Нека је V линеарни омотач вектора p_1, …, p_{m_n}. Реч је наравно о коначнодимензионалном векторском простору. Функција $P_n \circ f$ пресликава $K \cap V$ у $K \cap V$. (Заиста, ако $x \in K \cap V$, онда $x \in K$, па $f(x) \in K$ и тада $P_n f(x) \in K \cap V$.) Зато, према Брауеровој теореми $P_n \circ f$ има непокретну тачку, означимо је са x_n.

За било које $x \in K$ имамо оцену

$$\|P_n x - x\| = \left\| \frac{\sum_i \varphi_i(x)(p_i - x)}{\sum_i \varphi_i(x)} \right\| \leq \frac{\sum_i \varphi_i(x) \|p_i - x\|}{\sum_i \varphi_i(x)}.$$

Међутим, ако је $\|p_i - x\| > 1/n$, онда је $\varphi_i(x) = 0$, па је увек $\varphi_i(x)\|p_i - x\| \leq (1/n)\varphi_i(x)$ и отуда

$$\|P_n x - x\| \leq \frac{\sum_i \varphi_i(x)(1/n)}{\sum_i \varphi_i(x)} = \frac{1}{n}.$$

Низ тачака x_n има подниз x_{n_k} који конвергира ка неком $x \in K$ (због компактности). Сада имамо

$$\|f(x_{n_k}) - x_{n_k}\| \leq \|f(x_{n_k}) - P_{n_k} f(x_{n_k})\| \leq \frac{1}{n_k} \to 0,$$

односно и низ $f(x_{n_k})$ конвергира ка x, а како због непрекидности функције f имамо $f(x_{n_k}) \to f(x)$ то је $f(x) = x$. □

Шаудерова и Арцела-Асколијева теорема у комбинацији примењују се у теорији диференвцијалних једначина.

2.24. Теорема [Каратеодори]. *Нека је* $g : U \to \mathrm{R}$ *функција на отвореном скупу* $U \subseteq \mathrm{R}^2$*, која је*

(i) $x \mapsto g(t,x)$ *непрекидна за скоро све* t*;*
(ii) $t \mapsto g(t,x)$ *мерљива за све* x*;*
(iii) *постоји мерљива локално интеграбилна функција* h*, таква да је* $|g(t,x)| \leq h(t)$*, за све* x*,*

и ако $(t_0, x_0) \in U$*, тада Кошијев проблем*

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{15}$$

има уопштено решење у околини тачке t_0*, тј. постоји* апсолутно непрекидна *функција* $y : [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *таква да прва једнакост у (15) важи скоро свуда.*

Доказ. Уместо Кошијевог проблема (15) посматраћемо њему еквивалентну интегралну једначину

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \tag{16}$$

Посматрајмо пресликавање

$$T : C[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to C[t_0 - \delta, t_0 + \delta], \qquad Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g(\tau, y(\tau))\,\mathrm{d}\tau.$$

Тврдимо следеће:

1° Због услова (iii), пресликавање T је коректно дефинисано, тј. слика Tx је заиста непрекидна функција од t. Наиме,

$$|Tx(t_2) - Tx(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |g(\tau, x(\tau))|\,\mathrm{d}\tau \leq \int_{t_1}^{t_2} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \varepsilon \tag{17}$$

кад год је растојање између t_1 и t_2 довољно мало (апсолутна непрекидност интеграла).

2° Пресликавање T је непрекидно. Заиста, нека $||x_n - x|| \to 0$. Тада и за све τ $x_n(\tau) \to x(\tau)$, па због услова (i), имамо и $g(\tau, x_n(\tau)) \to g(\tau, x(\tau))$ за скоро све τ. Како је то имамо

$$|Tx_n(t) - Tx(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |g(\tau, x_n(\tau)) - g(\tau, x(\tau))|\,\mathrm{d}\tau \leq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |g(\tau, x_n(\tau)) - g(\tau, x(\tau))|\,\mathrm{d}\tau.$$

а узимајући супремум по свим $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ имамо и

$$||Tx_n - Tx|| \leq \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} |g(\tau, x_n(\tau)) - g(\tau, x(\tau))|\,\mathrm{d}\tau. \tag{18}$$

Но, како због услова (iii) важи

$$|g(\tau, x_n(\tau)) \to g(\tau, x(\tau))| \leq 2h(\tau),$$

то на последњи интеграл у (18) можемо да применимо Теорему о доминантној конвергенцији.

Посматрајмо сада скуп

$$K = \{f \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \mid f(t_0) = x_0, \text{ за све } t_1 < t_2\, |f(t_2) - f(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau\}.$$

Овај скуп је затворен, јер равномерна конвергенција повлачи конвергенцију тачка по тачка. Даље, он је униформно ограничен, јер за $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$ вахи $|f(t)| \leq |f(t_0)| + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. И најзад, он је равностепено непрекидан. Наиме, за све $f \in K$ имамо

$$|f(t_2)-f(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \varepsilon,$$

кад год је $|t_2-t_1| < \varepsilon$.

Према Арцела-Асколијевој теореми, скуп K је релативно компактан, а како је затворен, он је и компактан.

Пресликавање T пресликава простор $C[x_0-\delta, x_0+\delta]$ у скуп K. Заиста, услов $Tf(t_0) = x_0$ је аутоматски испуњен, док из (17) добијамо други услов.

Према Шаудеровој теореми о непокретној тачки, пресликавање T има непокретну тачку у K, рецимо ψ. То ψ испуњава једначину (16), и тиме је ψ апсолутно непрекидна, и важи (15) скоро свуда. ☐

Пеанова теорема је последица Каратеодоријеве, услови су јачи, али се она чешће примењује. ??? (ружна решеница)

2.25. Теорема (Пеано). *Нека је функција* $g : [t_0-a, t_0+a] \times [x_0-b, x_0+b]$ *непрекидна (као функција две променљиве). Тада Кошијев проблем*

$$\begin{cases} x'(t) = g(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{19}$$

има бар једно решење у интервалу $[t_0-h, t_0+h]$, *где је* h *мањи од бројева* a, b/M, *при чему је* M *горње ограничење функције* g *на* $[t_0-a, t_0+a] \times [x_0-b, x_0+b]$ *(а које постоји због Вајерштрасове теореме).*

Доказ. Ако важе Пеанови услови, онда важе и Каратеодоријеви. Дакле проблем (19) има уопштено решење ψ. Једино треба доказати да је ψ уједно и класично. Како ψ задовољава интегралну једначину (16), и како је у том случају подинтегрална функција у (16) непрекидна фукција по τ закључујемо да је интеграл диференцојабилна функција по t за свако t, те да је његов извод једнак подинтегралној функцији, односно да важи диференцијална једначина у (19). Почетни услов је аутоматски задовољен. ☐

Приметимо да и Каратеодоријева и Пеанова теорема, за разлику од Пикарове, дају само егзистенцију решења, а не и јединственост. Постоје примери диференцијалних једначина који испуњавају Пеанове услове и наравно имају решење, али оно не мора бити јединствено у околини нити једне тачке. Један такав пример је једначина $x' = |x|^{1/2}$, која испуњава Пеанове, али не и Пикарове услове. У околини тачке $t_0 \in \mathrm{R}$, функције x_1 и x_2, дате са $x_1(t) \equiv 0$ и $x_2(t) = 0$ за $t \leq t_0$, односно $x_2(t) = \frac{1}{4}(t-t_0)^2$ за $t > t_0$ обе испуњавају почетну услов $x(t_0) = 0$ и задовољавају дату диференцијалну једначину.

Вежбања

2.1. а) Нека је H Хилбертов простор, и $x,\ y\in H$. Доказати да услов

$$\|\lambda x+\mu y\|\geq\|\mu y\|,\quad \text{за све } \lambda,\mu\in\mathrm{K} \tag{20}$$

повлачи да је $x\perp y$.

Доказати да се један од скалара λ, μ може изоставити у (20) тако да се ништа не поремети.

б) Услов (20) може послужити као дефиниција ортогоналности у Банаховим просторима (Биркхоф - 1935, Џејмс - 1947). Ипак... наћи пример Банаховог простора X у коме релација (20) није симетрична.

2.2. У простору $C[0,1]$ дат је скуп

$$A=\{x\in C[0,1]\mid \int_0^{1/2}x(t)\,\mathrm{d}t-\int_{1/2}^{1}x(t)\,\mathrm{d}t=1\}.$$

Доказати да је скуп A конвексан и затворен, али да не садржи елемент минималне норме.

2.3. У простору l^1 дат је скуп $A=\left\{x\in l^1\mid \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\xi_n=1\right\}$. а) Доказати да је скуп A конвексан и затворен; б) Доказати да у скупу A постоји бесконачно много елемената минималне норме.

2.4. Нека је X Банахов простор $A\subseteq X$ затворен скуп, а $K\subseteq X$ компактан. Доказати да је скуп $A+K=\{a+b\mid a\in A,b\in K\}$ такође затворен. Наћи пример затворених скупова A и B тако да збир $A+B$ није затворен.

[Размотрити пример A, $B\subseteq\mathrm{R}$, $A=\mathrm{N}=\{1,2,\dots\}$, $B=\{-n+1/n\mid n\in\mathrm{N}\}$]

И више, потпростори A, $B\subseteq l^2$ дати са $A=\{x=(\xi_n)\in l^2\mid \xi_{2n}=0\}$, $B=\{x=(\xi_n)\in l^2\mid \xi_{2n+1}=n\xi_{2n}\}$ су затворени, али $A+B$ није затворен!

2.5. Нека је X Банахов простор, F његов коначнодимензионалан потпростор, и $x\notin F$. Доказати да постоји $\min\limits_{y\in F}\|x-y\|$.

Наредних неколико вежбања везано је за појам *дужи*, односно *крајње тачке*. Стога њихове дефиниције.

Дуж са крајевима x и y у нормираном простору X је скуп $\{\theta x+(1-\theta)y\mid\theta\in[0,1]\}$. Крајеви дужи су тачке x и y, а дуж без крајева је отворена дуж.

Нека је X нормиран простор, и $A\subseteq X$ затворен, конвексан скуп. Тачка $a\in A$ се назива крајња тачка скупа A, ако не постоји отворена дуж у A која садржи a.

2.6. Нека је H Хилбертов простор, и $\overline{B}$ затворена јединицна лопта у H. Доказати да је скуп свих крајњих тачке скупа $\overline{B}$ јединична сфера. (Искористити релацију паралелограма.)

2.7. Доказати да затворена јединична лопта у $L^1(0,1)$ нема ниједну крајњу тачку. Другим речима, јединична сфера се сва састоји од дужи!

2.8. Користећи Кларксонове неједнакости доказати да је свака тачка јединичне сфере у просторима $L^p(X;\mu)$, $1<p<+\infty$ крајња тачка.

2.9. Нека је $e_n\in c_0$ вектор дат са $e_n=(0,0,\dots,0,1,0\dots)$, где се јединица налази на n-том месту. Показати да је скуп $K=\{0\}\cup\{(1/n)e_n\mid n\in\mathrm{N}\}$ компактан подскуп простора c_0, али да његов конвексан омотач није затворен.

2.10. Нека је $L=\{x\in X\mid \sum\limits_{\nu=1}^{+\infty}\xi_\nu=0\}$. Доказати да је L линеаран потпростор од X, и испитати да ли је L Банахов потпростор, ако је: а) $X=l^1$; б) $X=l^2$.

2.11. Нека је X Банахов простор и $L\leq X$ затворен прави потпростор, тј. $L\neq X$. Доказати да L има празну унутрашњост.

2.12. Нека је P подскуп простора $L^2(-1,1)$ који се састоји од свих парних функција. Наћи $P^{\perp}$.

2.13. Доказати да је скуп $A \subseteq l^p$ релативно компактан ако и само ако важи: (i) координате су униформно ограничене, тј. постоје константе C_ν такве да је $|\xi_\nu| \leq C_\nu$ за све $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in A$; (ii) Ред $\sum_{j=1}^{+\infty} |\xi_\nu|^p$ равномерно конвергира по $x \in A$, тј. за све $\varepsilon > 0$ постоји n_0 тако да је $|\sum_{j=1}^{+\infty} |\xi_j|^p < \varepsilon$ за све $x = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in A$.

2.14. Доказати да је скуп $Q \subseteq l^2$, $Q = \{x \in l^2 \mid |\xi_\nu| \leq 1/\nu\}$ компактан у l^2. (Q се у литератури назива *Хилбертов куб.*)

2.15. Проверити који од следећих скупова су релативно компактни у простору $C[a,b]$. $A = \{\sin \alpha x \mid \alpha \in \mathrm{R}\}$, $B = \{\sin \alpha x \mid |\alpha| < 1\}$, $C = \{e^{\alpha x} \mid \alpha < 0\}$.

3. ОПЕРАТОРИ, ФУНКЦИОНАЛИ

Линеарна пресликавања

3.1. Дефиниција. Да се подсетимо. Ако су X, Y векторски простори над истим пољем K, онда се пресликавање $A : X \to Y$ назива *линеарно* ако за све x_1, $x_2 \in X$ и све λ_1, $\lambda_2 \in \mathrm{K}$ важи

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A x_1 + \lambda_2 A x_2.$$

Ако су X и Y коначно димензионални нормирани простори, онда је свако линеарно пресликавање непрекидно. То видимо овако. Сваке две норме на коначно димензионалним просторима су еквивалентне. Конвергенција у еуклидској норми $\|\cdot\|_2$ еквивалентна је са конвергенцијом низова координата, тј. $X \ni x_n \to x$ еквивалентно је са $\xi_{n,k} \to \xi_k$ за све $1 \le k \le m$ (уз ознаке $x_n = (\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, \dots, \xi_{n,m})$, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ и $m = \dim X$). Међутим, ако је A линеарно, онда има своју матрицу, рецимо $A = \left[\alpha_{ij}\right]_{i=1,\ j=1}^{m \quad l}$, па ако је $y = Ax$, онда је

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i,$$

одакле недвосмислено видимо да $Ax_n \to Ax$ (сабирање и множење су непрекидне функције у R, односно C).

Када простори нису коначно димензионални, то није обавезно тако. Зато уводимо следеће две дефиниције.

Нека су X и Y нормирани векторски простори. (Комплетност још није од значаја.) И нека је $A : X \to Y$ неко пресликавање.

(i) Кажемо да је A *нейрекидно* ако је непрекидно као пресликавање одговарајућих метричких простора, тј. ако из $x_n \to x$ следи $Ax_n \to Ax$. (Хајнеова теорема.)

(ii) Кажемо да је A *оїраничено* ако постоји константа $M > 0$ таква да за свако $x \in X$ важи

$$\|Ax\| \le M \|x\|. \tag{1}$$

> (У овој формули имамо посла са две норме, и прецизније би било писати $\|Ax\|_Y \le M\|x\|_X$, али то ћемо чинити само када постоји опасност од забуне.)

Ако је $A : X \to Y$ линеарно пресликавање, онда се следећа два својства лако изводе.

(а) *A је непрекидно ако и само ако је непрекидно у нули.*

Заиста, ако је непрекидно у свакој тачки, сигурно је непрекидно у нули. Обратно ако је A непрекидно у нули, тј. ако $x_n \to 0$ повлачи $Ax_n \to 0$, онда за низ $x_n \to x$ имамо $x_n - x \to 0$ одакле и $A(x_n - x) \to 0$, а како је A линеарно, то је $Ax_n - Ax = A(x_n - x) \to 0$.

(б) *Ако је A ограничено, онда је непрекидно.*

Наиме, тада из (1) имамо

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \le M\|x_n - x\|,$$

одакле једноставно следи тражено.

Приметимо и да је ограничено линеарно пресликавање, обавезно и равномерно непрекидно. Наиме, из (1) излази

$$\|Ax - Ay\| \le M\|x - y\|, \tag{2}$$

па је у дефиницији равномерне непрекидности довољно бирати $\delta = \varepsilon/M$. И више, неједнакост (2) показује да је ограничено линеарно пресликвање *Липшицово.*

Иако није свако равномерно непрекидно пресликавање уједно и непрекидно, овде имамо посла са линеарним пресликавањима па ипак важи обрат.

3.2. Став. *Нека је $A : X \to Y$ линеарно пресликавање нормираних векторских простора X и Y. Тада је A непрекидно ако и само ако је ограничено.*

Доказ. Да ограниченост повлачи непрекидност смо већ установили. Докажимо обрат. Претпоставимо да A није ограничено. То значи да за сваки природан број n постоји вектор x_n са својством

$$\|Ax_n\| > n\|x_n\|, \tag{3}$$

и уочимо низ вектора $y_n = \dfrac{1}{n\|x_n\|}x_n$. Из $\|y_n\| = \|x_n\|/n\|x_n\| = 1/n$ видимо да $y_n \to 0$. Међутим, из (3) налазимо $\|Ay_n\| = \dfrac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| > 1$, одакле $Ay_n \not\to 0$. Тако A не може бити непрекидно. □

Примедба: Приметимо да у овом доказу није искоришћена цела непрекидност, већ само хомогеност: $A\lambda x = \lambda Ax$, а не и адитивност.

3.3. Став. *Нека је $A : X \to Y$ ограничено линеарно пресликавање Банахових простора X и Y. Тада:*

Језгро *пресликавања A, у ознаци $\ker A$, је Банахов потпростор простора X;*

Слика *пресликавања A, у ознаци $\operatorname{ran} A$, је линеаран потпростор простора Y, али не мора бити затворен.*

Доказ. Да су језгро и слика векторски потпростори, познато је од раније. Ограничено пресликавање A је непрекидно, а једночлан скуп $\{0\}$ је затворен у Y. Стога је $\ker A = A^{-1}(\{0\})$ затворен скуп у X.

Да слика не мора бити затворена видети вежбања 3.5, 3.6. □

3.4. Норма ограниченог линеарног пресликавања. Нека су X и Y нормирани векторски простори, и нека је $A : X \to Y$ ограничено линеарно пресликавање. Дефинишемо норму пресликавања A са

$$||A|| = \sup_{0\neq x\in X} \frac{||Ax||}{||x||}. \tag{4}$$

Постоје и други начини да се одреди норма пресликавања A. На пример:

(i) $||A|| = \inf\{M > 0 \mid \text{за све } x \in X \text{ важи (1)}\} = \min\{M > 0 \mid \text{за све } x \in X \text{ важи (1)}\}$;
(ii) $||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||$;
(iii) $||A|| = \sup_{||x||\leq 1} ||Ax||$.

Доказаћемо све ово, али за почетак искључимо нула вектор из даљег разматрања, јер је за њега неједнакост (1) тривијално испуњена.

Приметимо да је сваки елемент скупа $\{M > 0 \mid \text{за све } x \in X \text{ важи (1)}\}$ по дефиницији горње ограуничење скупа $\{||Ax||/||x|| \mid 0 \neq x \in X\}$. Стога је супремум овог другог, уједно минимум првог скупа, и важи прва формула.

За другу формулу уочимо прво да је $\sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x||=1} ||Ax||/||x|| \leq ||A||$. Да важи и обратна неједнакост, за било које $0 \neq x \in X$ вектор $x/||x||$ има норму једнаку један, па је $A(x/||x||) \leq \sup_{||x||=1} ||Ax||$, тј. $||Ax||/||x|| \leq \sup_{||x||=1} ||Ax||$, па узимајући супремум по свим $x \neq 0$ добијамо $||A|| \leq \sup_{||x||=1} ||Ax||$.

Најзад, што се тиче треће формуле, довољно је доказати да за $||x|| < 1$ не можемо постићи супремум. Заиста, ако је $||x|| < 1$, онда је $||x/||x|||| = 1$, па је $||Ax||/||x|| \leq \sup_{||x||=1} ||Ax||$, односно $||Ax|| \leq \sup_{||x||=1} ||Ax||$, па је израз у 2) мањи или једнак од израза у 3). Обратно је тривијално.

3.5. Став. *Нека је $L(X;Y)$ скуӣ свих оīраничених линеарних ӣресликавања из нормираноī векшорскоī ӣросшора X у нормиран векшорски ӣросшор Y.*

(а) *Скуӣ $L(X;Y)$ је векшорски ӣросшор, а функција $||A||$ дефинисана са (4) је једна норма на њему.*
(б) *Ако је ӣросшор Y комӣлешан, онда је и $L(X;Y)$ комӣлешан. Дакле, за комӣлешносш ӣросшора $L(X;Y)$ није важна комӣлешносш ӣросшора X.*

Доказ. (а) За A, $B \in L(X;Y)$ операторе $A+B$, односно λA стандардно дефинишемо са

$$(A+B)(x) = Ax + Bx, \qquad (\lambda A)(x) = \lambda Ax.$$

Лако се види да су $A+B$ и λA линеарна пресликавања. Да су ограничена доказаћемо успут, док будемо изводили својства норме.

Очигледно је $||A|| \geq 0$, као и $||0|| = 0$. Ако је $||A|| = 0$, онда је за сваки не нулти вектор x испуњено $||Ax||/||x|| \leq 0$, одакле је $||Ax|| = 0$, тј. $Ax = 0$, па је A нулто пресликавање, тј. $Ax = 0$, за све $x \in X$.

Даље, $||A\lambda x|| = \sup_{||x||=1} ||\lambda Ax|| = |\lambda| \sup_{||x||=1} ||Ax|| = |\lambda|\,||A||$. Одавде је, посебно λA ограничен, кад год је такав A.

Најзад, докажимо и неједнакост троугла. За A, $B \in L(X;Y)$ и $||x|| = 1$ имамо

$$||(A+B)x|| = ||Ax + Bx|| \leq ||Ax|| + ||Bx|| \leq ||A|| + ||B||,$$

па узимајући супремум налазимо $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$ и посебно, $A+B \in L(X;Y)$ кад год A, $B \in L(X;Y)$.

(б) Нека је Y комплетан. Уочимо Кошијев низ $A_n \in L(X;Y)$, тј. низ за који је $||A_m - A_n|| < \varepsilon$ за довољно велике m, n. Нека је $x \in X$. Тада је

$$||A_m x - A_n x|| \leq ||A_m - A_n|| < ||x||\varepsilon, \quad m, n \geq n_0, \tag{5}$$

односно низ $A_n x$ је Кошијев у Y, и стога конвергентан. Означимо $Ax = \lim A_n x$. Како је $\lim(A_n(\lambda x + \mu y)) = \lim(\lambda A_n x + \mu A_n y) = \lambda \lim A_n x + \mu \lim A_n y = \lambda Ax_\mu Ay$ закључујемо да је A линеарно.

Даље, како је A_n Кошијев, он је и ограничен, односно $M = \sup_n ||A_n|| < +\infty$, па за свако $x \in X$ имамо

$$||A_n x|| \leq ||A_n|| \, ||x|| \leq M||x||,$$

што после узимања лимеса постаје $||Ax|| \leq M||x||$. Одатле је $||A|| \leq M$, ондосно A је ограничен.

Најзад, узимајући $\lim$ кад $m \to \infty$ у (5), налазимо

$$||Ax - A_n x|| \leq ||x||\varepsilon, \quad n \geq n_0,$$

односно $||A - A_n|| \leq \varepsilon$ за $n \geq n_0$. Односно $A_n \to A$ у норми простора $L(X;Y)$. □

Функционали

3.6. Дефиниција. Нека је X нормиран векторски простор над пољем скалара K ($\mathrm{K} = \mathrm{R}$ или C). Линеарно пресликавање $\varphi : X \to \mathrm{K}$ називамо *функционал*. Дакле, функционал је посебан случај линеарног пресликавања, када је кодомен једнодимензионални простор, тј. поље скалара. За функционале, отуда, важи све што важи и за сва линеарна пресликавања.

Између осталог, функционал је непрекидан, ако и само ако је ограничен. Језгро ограниченог функционала је затворен линеаран потпростор.

Простор свих ограничених функционала на нормираном векторском простору X, тј. скуп $L(X;\mathrm{K})$ назива се *дуални* простор и означава се са X^*. Како је у овом случају кодомен комплетан (јер је коначне димензије, заправо димензије 1), то је X^* увек комплетан, без обзира на то да ли је X комплетан или није.

На Хилбертовим просторима, постоји једноставна карактеризација ограничених линеарних функционала.

3.7. Теорема (Рис). *Нека је H Хилбертов простор, и нека је $\varphi : H \to \mathrm{C}$ ограничен линеаран функционал. Тада постоји јединствен вектор $y \in H$ такав да за све $x \in H$ важи*

$$\varphi(x) = \langle x, y \rangle. \tag{6}$$

При томе важи и $||\varphi|| = ||y||$. Пресликавање $H \ni y \mapsto \varphi_y \in H^*$, где је φ_y дато са (6) је бијективно и антилинеарно, тј. важи $\varphi_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2} = \overline{\lambda}_1 \varphi_{y_1} + \overline{\lambda}_2 \varphi_{y_2}$.

Доказ. Докажимо јединственост вектора y. Ако постоје два таква, рецимо y и y', онда је $\langle x,y\rangle=\langle x,y'\rangle$ за све x, тј. $y-y'\perp H$ одакле је $y-y'=0$.

Докажимо, затим, да је пресликавање дато са (6) линеарно и ограничено. Линеарност је очигледна, а ограниченост следи на основу Коши Шварцове неједнакости: $|\varphi_y(x)|=|\langle x,y\rangle|\le||x||\,||y||$. Одатле је одмах

$$||\varphi_y||\le||y||. \tag{7}$$

Обратно, нека је $\varphi\in H^*$ произвољно. Скуп $\ker\varphi$ је затворен линеаран потпростор. Ако је $\ker\varphi=H$ онда је $\varphi\equiv0$, па можемо изабрати $y=0$ и (6) ће тривијално важити. Ако је $\ker\varphi\subsetneqq H$, онда постоји $z\in H\setminus\ker\varphi$. Можемо узети да је $z\perp\ker\varphi$. (Заиста, ако то не важи, онда према теореми о ортопројекцији $z=u+v$, за неке $u\in\ker\varphi$, $v\perp\ker\varphi$. Тада $v\notin\ker\varphi$, јер би иначе важило $z\in\ker\varphi$, па уместо z можемо посматрати v.) Из $z\perp\ker\varphi$ закључујемо $\varphi(z)\ne0$. Стога је за све $x\in H$ вектор

$$u_x=\frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}z-x,$$

коректно дефинисан. Израчунавамо да је $\varphi(u_x)=0$, тј. $u_x\in\ker\varphi$, односно $u_x\perp z$, тј.

$$\left\langle\frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}z-x,z\right\rangle=0.$$

Када се последња једнакост среди, она постаје

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(z)}||z||^2-\langle x,z\rangle=0,\quad\text{тј.}\quad\varphi(x)=\left\langle x,\frac{\overline{\varphi(z)}}{||z||^2}z\right\rangle=\langle x,y\rangle,$$

ако ставимо $y=\dfrac{\overline{\varphi(z)}}{||z||^2}z$. Одавде је

$$||y||=\frac{|\varphi(z)|}{||z||^2}||z||=\frac{|\varphi(z)|}{||z||}\le||\varphi||,$$

што заједно са (7) даје $||y||=||\varphi||$.

Овиме смо показали да је пресликавање $y\mapsto\varphi_y$ бијективно (сваком φ одговара једно y и сваком y једно φ), као и да је реч о изометрији. Антилинеарност следи из својстава скаларног производа.

$$\varphi_{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2}(x)=\langle x,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2\rangle=\overline{\lambda}_1\langle x,y_1\rangle+\overline{\lambda}_2\langle x,y_2\rangle=\overline{\lambda}_1\varphi_{y_1}(x)+\overline{\lambda}_2\varphi_{y_2}(x).$$

□

У одређеном смислу то значи да се Хилбертов простор H може поистоветити са својим дуалним простором H^*. Ограда „у одређеном смислу“, јер установљено пресликавање $H\to H^*$ није линеаерно, већ конјуговано линеарно. Код Банахових простора, ситуација је куд и камо сложенија, и постоје посебне теореме којима се одређује конкретан облик дуалног простора.

3.8. Став. *Дуални простор простора c_0 изоморфан је са l^1. Прецизније, за сваки фукционал $\varphi\in c_0^*$ постоји јединствено $y\in l^1$ тако да важи*

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\xi_k\eta_k,\qquad x=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in c_0,\quad y=(\eta_1,\eta_2,\dots)\in l^1. \tag{8}$$

Доказ. Да је формулом (8) заиста задат ограничен линеаран функционал на c_0 видимо на основу неједнакости $|\xi_k\eta_k| \le |\eta_k| \sup_{k\ge 1} |\xi_k| = \|x\| |\eta_k|$, одакле је

$$|\varphi(x)| \le \sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k\eta_k| \le \|x\| \sum_{k=1}^{+\infty} |\eta_k| = \|x\|_{c_0} \|y\|_{l^1}.$$

Одатле одмах имамо

$$\|\varphi\|_{c_0^*} \le \|y\|_{l^1}. \tag{9}$$

Да је y јединствено видимо овако. Ако постоје два таква вектора y, $y' \in l^1$, онда за све $x \in c_0$ имамо

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k\eta_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k\eta'_k,$$

па између осталог и за $x = e_n$,

$$e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots), \tag{10}$$

при чему се јединица налази на n-том месту. Тако добијамо $\eta_k = \eta'_k$ за све k, односно $y = y'$.

Нека је сада дат функционал $\varphi \in c_0^*$, односно ограничено линеарно пресликавање $\varphi : c_0 \to \mathbb{C}$. Дефинишемо $\eta_k = \varphi(e_k)$, где је e_k вектор дат са (10), и ставимо $y = (\eta_1, \eta_2, \dots)$. Докажимо да $y \in l^1$. Нека су бројеви θ_k одређени једнакошћу $\eta_k = |\eta_k| e^{i\theta_k}$ (односно $\theta_k = \arg \eta_k$. Посматрајући вектор $f_n = e^{-i\theta_1} e_1 + e^{-i\theta_2} e_2 + \dots + e^{-i\theta_n} e_n = (e^{-i\theta_1}, e^{-i\theta_2}, \dots, e^{-i\theta_n}, 0, \dots)$ налазимо $\|f_n\| = 1$ (у простору c_0), и према томе

$$\begin{aligned} |\eta_1| + |\eta_2| + \dots + |\eta_n| &= e^{-i\theta_1}\eta_1 + e^{-i\theta_2}\eta_2 + \dots + e^{-i\theta_n}\eta_n = \\ &= e^{-i\theta_1}\varphi(e_1) + e^{-i\theta_2}\varphi(e_2) + \dots + e^{-i\theta_n}\varphi(e_n) = \\ &= \varphi(e^{-i\theta_1}e_1 + e^{-i\theta_2}e_2 + \dots + e^{-i\theta_n}e_n) = \varphi(f_n) \le \\ &\le \|\varphi\| \|f_n\| = \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Одатле, узимајући лимес кад $n \to +\infty$ добијамо $\|y\|_{l^1} \le \|\varphi\|$, што заједно са (9) даје $\|\varphi\| = \|y\|$.

Докажимо још да (8) важи за све $x \in c_0$. Ако је $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in c_0$ тада је

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k e_k.$$

Заиста,

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k \right\| = \|(0, 0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \dots)\| = \sup_{k>n} |\xi_k| \to 0, \qquad n \to +\infty,$$

јер је $x = (\xi_k)$ низ који конвергира ка нули. Отуда је, због непрекидности (и линеарности) пресликавања φ

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \varphi(e_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \eta_k.$$

□

3.9. Став. *Нека је $(X,\mathfrak{M},\mu)$ простор са σ-коначом мером, нека је $p > 1$ и нека је q његов конјуговани коефицијент, тј. $1/p + 1/q = 1$. Тада је $L^p(X,\mu)^* \cong L^q(X,\mu)$. Прецизније, за сваки $\varphi \in L^p(X,\mu)^*$ постоји јединствена функција $y \in L^q(X,\mu)$ таква да за све $x \in L^p(X,\mu)$ важи*

$$\varphi(x) = \int_X x(t)y(t)\,\mathrm{d}\mu(t). \tag{11}$$

Пресликавање $L^q(X,\mu) \ni y \mapsto \varphi_y \in L^p(X,\mu)^*$ где је φ_y дато са (11) је бијективно, линеарно и изометрично, тј. важи $||\varphi_y|| = ||y||$.

Доказ. Докажимо прво да је формулом (11) задат ограничен линеаран функционал на простору $L^p(X,\mu)$. Линеарност је једноставна, а ограниченост следи на основу Хелдерове неједнакости

$$|\varphi(x)| = \left|\int_X x(t)y(t)\,\mathrm{d}\mu(t)\right| \le \left(\int_X |x(t)|^p\,\mathrm{d}\mu(t)\right)^{1/p}\left(\int_X |y(t)|^q\,\mathrm{d}\mu(t)\right)^{1/q} = ||y||_q||x||_p.$$

Одавде је одмах и

$$||\varphi_y|| \le ||y||_q. \tag{12}$$

Докажимо сада егзистенцију функције y. Претпоставимо за тренутак да је $\mu(X) < +\infty$ и посматрајмо пресликавање $\lambda : \mathfrak{M} \to \mathrm{C}$ дато са $\lambda(E) = \varphi(\chi_E)$, вредност функционала на карактеристичној функцији скупа. Претпоставка $\mu(X) < +\infty$ била је важна да би увек важило $\chi_E \in L^p$. Наиме

$$||\chi_E||_p = \left(\int_X |\chi_E|^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \mu(E)^{1/p}.$$

Важи и

$$|\lambda(E)| = |\varphi(\chi_E)| \le ||\varphi||\,||\chi_E|| = ||\varphi||\mu(E)^{1/p}. \tag{13}$$

Функција λ је мера, и то апсолутно непрекидна у односу на μ. Заиста, из (13) се види да је $\lambda(\emptyset) = 0$ као и $\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$. Даље, ако је $E = \bigsqcup_{k=1}^{+\infty} E_k$, онда је за свако $x \in X$

$$\chi_E(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \chi_{E_k}(x). \tag{14}$$

Питање конвергенције тачка по тачка се не поставља, јер највише један сабирак у реду на десној страни може бити различит од нуле. Међутим, ред (14) конвергира у норми простора $L^p(X,\mu)$. Наиме,

$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \chi_{E_k}\right\| = \left(\int_{\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} E_k} \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} = \mu(\bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} E_k)^{1/p} \to 0,$$

јер су све мере коначне, а фамилија $F_n = \bigsqcup_{k=n+1}^{+\infty} E_k$ опадајућа и има празан пресек. Стога

$$\lambda(E) = \varphi(\chi_E) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(\chi_{E_k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda(E_k).$$

Према Теореми Радон Никодима, постоји функција $y \in L^1(X,\mu)$ са својством $\lambda(E) = \int_E y\,\mathrm{d}\mu$, односно

$$\varphi(\chi_E) = \int_E y(t)\,\mathrm{d}\mu(t) = \int_X \chi_E(t)y(t)\,\mathrm{d}\mu(t).$$

То је управо релација (11) у специјалном случају, када је $x=\chi_E$. Како су обе стране у (11) линеарне, та релација важи и за све линеарне комбинације карактеристичних функција скупова, тј. важи и за просте функције. Продужићемо важење те релације и даље. Свака ограничена мерљива функција x може се приказати као равномерни лимес простих функција $s_n \rightrightarrows x$. Како равномерна конвергеница повлачи конвергенцију у норми простора L^p, то важи и $||x-s_n||_p \to 0$, а одатле $\varphi(x)=\lim\varphi(s_n)$. Дакле, имамо

$$\varphi(x)=\lim_{n\to+\infty}\varphi(s_n)=\lim_{n\to+\infty}\int_X s_n y\,\mathrm{d}\mu.$$

Међутим, низ $s_n y$, има интеграбилну доминанту, јер је $|s_n(t)y(t)|\le M|y(t)|\in L^1$, где је M ограничење функције $|x|$, и свих $|s_n|$. Стога лимес може проћи кроз интеграл, па (11) важи и за све ограничене мерљиве функције.

Сада ћемо доказати да $y\in L^q(X,\mu)$. Уочимо низ функција z_n задат са

$$z_n(t)=\begin{cases} e^{-i\theta(t)}|y(t)|^{q-1}, & |y(t)|\le n\\ 0, & |y(t)|\ge n\end{cases},$$

где је функција $\theta(t)$ задата релацијом $y(t)=|y(t)|e^{i\theta(t)}$. Како је $p(q-1)=pq-p=q$, то за p-норму функције z_n имамо

$$||z_n||_p^p=\int_X |z_n|^p\,\mathrm{d}\mu=\int_{|y(t)|\le n}|y(t)|^q\,\mathrm{d}\mu(t), \tag{15}$$

а како је z_n по дефиницији ограничена бројем n, то за њу важи (11), па имамо

$$\varphi(z_n)=\int_X z_n y\,\mathrm{d}\mu=\int_{|y(t)|\le n}|y(t)|^q\,\mathrm{d}\mu(t). \tag{16}$$

Како важи $|\varphi(z_n)|\le||\varphi||\,||z_n||$, то из (15) и (16) добијамо

$$\int_{|y(t)|\le n}|y(t)|^q\,\mathrm{d}\mu(t)\le||\varphi||\left(\int_{|y(t)|\le n}|y(t)|^q\,\mathrm{d}\mu(t)\right)^{1/p},$$

тј.

$$\left(\int_{|y(t)|\le n}|y(t)|^q\,\mathrm{d}\mu(t)\right)^{1/q}\le||\varphi||.$$

Узимањем лимеса кад $n\to+\infty$ закључујемо да $y\in L^q(X,\mu)$ и $||y||_q\le||\varphi||$, што заједно са (12) даје $||\varphi_y||=||y||_q$. Остаје још да докажемо да (11) важи и за све $x\in L^p$. То међутим, једноставно следи, јер су ограничене функције густе у L^p. Наиме, за $x\in L^p$ посматрамо низ сечених функција

$$x_n(t)=\begin{cases} x(t), & |x(t)|\le n\\ 0, & |x(t)|>n\end{cases},$$

за које већ важи (11) и онда применимо лимес. На левој страни лимес пролази кроз φ, јер $||x-x_n||_p\to 0$, а на десној по Теореми о доминантној конвергенцији.

Најзад, ослободимо се претпоставке да је $\mu(X)<+\infty$. Према претпоставци X је σ-коначан, па постоје X_n, такви да је $X=\bigsqcup X_n$, $\mu(X_n)<+\infty$. Између простора $L^p(X)$ и $L^p(X_n)$ (овај други, разуме се, у односу на рестрикцију мере μ) постоје уведимо пресликавања $P_n : L^p(X) \to L^p(X_n)$ и $S_n : L^p(X_n) \to L^p(X)$ дата са

$$P_n x = x|_{X_n}, \qquad (S_n x)(t) = \begin{cases} x(t), & t \in X_n \\ 0, & t \notin X_n \end{cases}$$

Лако се види да су оба пресликавања линеарна и норме не веће од 1. Наиме, $||P_n x|| = ||x|_{X_n}||^p_{L^p(X_n)} = \int_{X_n} |x|^p \leq \int_X |x|^p = ||x||_{L^p(X)}$, па је $||P_n|| \leq 1$, док је $||S_n x|| = ||x||$, тј. $||S_n|| \leq 1$. Такође важи и

$$P_n S_n x = x, \qquad S_n P_n x = x\chi_{X_n}.$$

Ако је φ ограничен фукционал на $L^p(X;\mu)$, онда је $\varphi_n = \varphi \circ S_n$ ограничен фукционал на $L^p(X_n)$ па постоје функције $y \in L^q(X_n)$ такве да је

$$\varphi_n(x) = \int_{X_n} x(t) y_n(t)\, \mathrm{d}\mu(t).$$

Међутим, у норми простора $L^p(X)$ важи $x = \sum_{n=1}^{+\infty} x\chi_{X_n}$, јер је

$$||x - x\sum_{k=1}^{n} \chi_k||_p^p = \int_X |x(t)|^p \sum_{k=n+1}^{+\infty} \chi_k(t)\, \mathrm{d}\mu(t) \to 0.$$

Наиме, низ подинтегралних функција тежи ка нули тачка по тачка, а за интеграбилну доминанту можемо узети функцију $|x(t)|^p$. Стога је

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x\chi_{X_n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(S_n P_n x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{X_n} P_n x(t) y_n(t)\, \mathrm{d}\mu(t),$$

а како се на скупу X_n функције x и $P_n x$ поклапају, то је и

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{X_n} x(t) y_n(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \int_X x(t) y(t)\, \mathrm{d}\mu(t),$$

где је y дата са $y(t) = y_n(t)$ где је $t \in X_n$. Остаје још да докажемо да $y \in L^q(X)$. Нека је $Y_n = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$. Имамо

$$\int_{Y_n} |y(t)|^q\, \mathrm{d}\mu(t) = \int_X x_n(t) y(t) = \varphi(x_n),$$

где је $x(t) = |y(t)|^{q-1} e^{-i \arg y(t)}$ за $t \in Y_n$ и $x_n(t) = 0$ иначе. Како је

$$||x_n||_p^p = \int_{Y_n} |y(t)|^{pq-p}\, \mathrm{d}\mu(t) = \sum_{k=1}^{n} |y_k(t)|^q\, \mathrm{d}\mu(t) < +\infty$$

и како је $|\varphi(x_n)| \leq ||\varphi||\, ||x_n||$ то закључујемо

$$\int_{Y_n} |y(t)|^q\, \mathrm{d}\mu(t) \leq ||\varphi|| \left(\int_{Y_n} |y(t)|^q\, \mathrm{d}\mu(t) \right)^{1/p},$$

тј.

$$\int_{Y_n} |y(t)|^q\, \mathrm{d}\mu(t) \leq ||\varphi||,$$

одакле следи тражено по ТМК. □

Хан-Банахова теорема и последице

3.10. Напомене. Из претходног става одмах следи и изоморфизам $(l^p)^* \cong l^q$, када је $1/p+1/q=1$.

Нимало изненађујуће, важи и изоморфизам $L^1(X,\mu)^* \cong L^\infty(X,\mu)$ при чему је произвољан функционал на L^1 опет задат формулом (11), само сада $y \in L^\infty$. Логика је у томе што из $p=1$ и $1/p+1/q=1$ закључујемо да је $q=+\infty$.

Међутим, сада следи изненађење. Наиме, $L^\infty(X,\mu)^* \ncong L^1(X,\mu)$. Наиме, дуални простор, простора L^∞ је изузетно велики. Он у себи садржи изоморфну слику простора L^1. Разуме се, и овде формула (11), при чему $y \in L^1$ задаје ограничен линеаран функционал на L^∞. Али то ни изблиза нису сви функционали на L^∞. Има их изузетно много који немају такав облик!

Ускоро ћемо доказати и да је $C[a,b]^* \cong NBV[a,b]$. Па иако за већину до сада наведених примеа Банахових простора имамо солидне описе дуалног простора, још увек не можемо да тврдимо да је дуални простор нетривијалан. Наиме, нулти функционал увек постоји, а ако других нема, онда кажемо да је дуални простор тривијалан.

Међутим, у случају Банахових простора то се не може догодити. То следи из наредне теореме која је један од камена темељаца функционалне анализе. Пре него што је формулишемо, подсетимо се важне тврдње теорије скупова.

3.11. Цорнова лема. *Нека је $(S,\leq)$ делимично уређен скуп. Ланац у том скупу је сваки његов потпуно уређен подскуп.*

Ако сваки ланац има горње ограничење, онда у S постоји максималан елемент.

Примедба 1: Иако бисмо најрадије ланац замислили као $\cdots \leq a_{-1} \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$, таква представа није реална, јер нико не гарантује да је ланац пребројив. Он може бити ма које кардиналности.

Примедба 2: Максималан елемент и максимум су једно те исто ако је поредак потпун. Ако је делимичан, онда постоји разлика. Максимум је, наиме, највећи елемент, елемент од кога су сви мањи. Елемент је максималан, ако од њега нема већих. Дакле, сви елементи скупа S су или мањи од максималног елемента или су са њим неупоредиви.

Уместо доказа. Цорнова лема је један од познатих еквивалената аксиоме избора. Остали познати еквиваленти су: Хаусдорфов став о максималности, Туки-Тајхмилерова лема, принцип доброг уређења, итд.

Дакле, Цорнова лема се може доказати на основу аксиоме избора (и осталих ZF-акисома теорије скупова), али и обратно – може се узети за аксиому, па онда аксиома избора постаје тврђење. □

Цорнова лема се често користи у анализи као нека врста непребројиве индукције. Како и на који начин видеће се већ у доказу наредне теореме.

3.12. Теорема (Хан-Банах). *Нека је X нормиран векторски простор, и L његов линеаран потпростор. (Нема никаквих претпоставки о затворености или комплетности.) Нека је, даље, $\varphi : L \to \mathbb{C}$ ограничен линеаран* *функционал. Тада постоји ограничен линеаран функционал* $\Lambda : X \to \mathrm{C}$ *такав да је* $\Lambda|_L = \varphi$ *и* $\|\Lambda\| = \|\varphi\|$. *Описно: функционал се може продужити са потпростора на цео простор без увећања норме.*

Доказ. Доказ ћемо прво доказати у случају реалног поља скалара $\mathrm{K} = \mathrm{R}$.

1° Прво ћемо показати да се функционал може продужити са L на мало већи потпростор, већи тачно за једну димензију. Дакле, нека је $y \in X$ и $y \notin L$. Посматрамо потпростор $L_y = \mathscr{L}in\{L, y\} = \{x + \lambda y \mid x \in L, \lambda \in \mathrm{R}\}$. Ако би хтели да продужимо функционал φ на простор L_y, онда је једино важно колико је $\varphi(y)$. Наиме, тада мора да буде $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda\varphi(y)$. Одредићемо $\varphi(y)$ на следећи начин.

За произвољне x_1, $x_2 \in L$ имамо

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) = \varphi(x_1 + x_2) \le \|\varphi\|\|x_1 + x_2\| = \\ = \|\varphi\|\|x_1 - y + x_2 + y\| \le \|\varphi\|\|x_1 - y\| + \|\varphi\|\|x_2 + y\|,$$

односно

$$\varphi(x_1) - \|\varphi\|\|x_1 - y\| \le \|\varphi\|\|x_2 + y\| - \varphi(x_2).$$

Лева страна не зависи од x_2, а десна не зависи од x_1. Зато је супремум израза на левој страни по свим $x_1 \in L$ мањи од инфимума израза на десној страни по свим $x_2 \in L$, односно

$$\sup_{x\in L}(\varphi(x) - \|\varphi\|\|x - y\|) \le \inf_{x\in L}(\|\varphi\|\|x + y\| - \varphi(x)).$$

Између ова два израза може се, према томе, уметнути реалан број s. За тако одабрано s и за све $x \in L$ имамо

$$\varphi(x) - \|\varphi\|\|x - y\| \le s, \quad s \le \|\varphi\|\|x + y\| - \varphi(x). \tag{17}$$

Дефинишимо функционал $\varphi_1 : L_1 \to \mathrm{R}$ са $\varphi_1(y) = s$, односно $\varphi_1(x + \lambda y) = \varphi(x) + \lambda s$. Очигледно је $\varphi_1|_L = \varphi$, па остаје још да се провери да се норма не повећава. За $\lambda > 0$, на основу друге неједнакости у (17) имамо

$$\varphi_1(x + \lambda y) = \lambda\Big(\varphi\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) + s\Big) \le \lambda\Big(-s + \|\varphi\|\,\Big\|\frac{x}{\lambda} + y\Big\| + s\Big) = \|\varphi\|\|x + \lambda y\|.$$

а на основу прве

$$-\varphi_1(x + \lambda y) = \lambda\Big(\varphi\Big(-\frac{x}{\lambda}\Big) - s\Big) \le \lambda\Big(s + \|\varphi\|\,\Big\|-\frac{x}{\lambda} - y\Big\| - s\Big) = \|\varphi\|\|-x - \lambda y\|,$$

па је у сваком случају

$$|\varphi_1(x + \lambda y)| \le \|\varphi\|\|x + \lambda y\|,$$

односно $\|\varphi_1\| = \|\varphi\|$, јер за негативне λ слично изводимо одговарајуће неједнакости.

2° У реду. Доказали смо да се функционал може продужити за једну димензију. Онда може и за још једну, тј. за две. Онда може и за три и тако редом. Нажалост, овде се не може непосредно применити принцип математичке индукције. Немамо никакве гаранције, да до целог простора имамо само пребројиво корака, а немамо гаранције ни да се пребројиво много корака неће зауставити негде пре целог простора X. На овом месту интервенише Цорнова лема.

Уочимо фамилију $\mathscr{G}$ која се састоји од уређених парова облика (M, φ_M) где је M линеаран потпростор, $L \subseteq M \subseteq X$, а $\varphi_M : M \to \mathrm{R}$ линеаран функционал такав да је $\varphi_M|_L = \varphi$ и $\|\varphi_M\| = \|\varphi\|$. Дакле, $\mathscr{G}$ је фамилија свих продужења функционала φ на неки шири простор без увећања норме.

За (M,φ_M), $(N,\varphi_N)\in\mathcal{G}$ дефинишемо релацију $(M,\varphi_M)\le(N,\varphi_N)$ ако и само ако је $M\subseteq N$ и $\varphi_N|_M=\varphi_M$, тј. ако је „већи“ пар продужење „мањег“. Очигледно је у питању релација поретка. Доказаћемо да $(\mathcal{G},\le)$ испуњава услове Цорнове леме. Нека је (M_i,φ_i), $i\in I$ ланац, тј. потпуно уређен подскуп скупа $\mathcal{G}$. Уочимо скуп $M=\bigcup_{i\in I}M_i$ – очито је у питању векторски потпростор простора X. Дефинишимо функционал $\psi:M\to\mathrm{R}$. За $x\in M$ постоји бар једно $i\in I$ тако да је $x\in M_i$. Тада ставимо $\psi(x)=\varphi_i(x)$. Уверимо се да је ψ коректно дефинисан. Ако $x\in M_i$ и $x\in M_j$ тада је или $M_i\subseteq M_j$ или $M_j\subseteq M_i$, јер је $\mathcal{G}$ ланац. У првом случају је $\varphi_j|_{M_i}=\varphi_i$, а у другом $\varphi_i|_{M_j}=\varphi_j$, па је у оба случаја $\varphi_i(x)=\varphi_j(x)$.

Пар (M,ψ) је горње ограничење ланца $\mathcal{G}$. Заиста за $i\in I$ је $M_i\subseteq M$, али и $\psi|_{M_i}=\varphi_i$ непосредно по дефиницији. Према Цорновој леми, фамилија $\mathcal{G}$ има максималан елемент, на пример (Y,Λ). Остаје да докажемо да је $Y=X$. Претпоставимо супротно, $Y\subsetneqq X$. Тада постоји $y\in X\setminus Y$, па према већ доказаном постоји продужење функционала Λ на потпростор $Lin\{Y,y\}$ што противречи максималности пара (Y,Λ). Дакле, $Y=X$ и доказ је завршен у реалном случају.

3° Нека је сада X нормиран простор над пољем C, L линеаран потпростор од X и $\varphi:L\to\mathrm{C}$ ограничен функционал. Простор X је уједно и векторски простор над ужим пољем скалара R, а исто важи и за потпростор L. Уочимо пресликавање $\varphi_0:L\to\mathrm{R}$ дато са $\varphi_0(x)=\mathrm{Re}\,\varphi(x)$. Лако се види да је $|\varphi_0(x)|\le|\varphi(x)|\le||\varphi||\,||x||$, односно $||\varphi_0||\le||\varphi||$. Сада смо припремили терен за употребу већ доказаног реалног случаја.

Међутим, пре тога приметимо да се φ може реконструисати на основу φ_0. Наиме, користећи да је за сваки комплексан број z испуњено $\mathrm{Im}(iz)=\mathrm{Re}\,z$ налазимо

$$\mathrm{Im}\,\varphi(x)=\mathrm{Im}(-i\varphi(ix))=-\mathrm{Re}\,\varphi(ix)=-\varphi_0(ix),$$

односно

$$\varphi(x)=\mathrm{Re}\,\varphi(x)+i\,\mathrm{Im}\,\varphi(x)=\varphi_0(x)-i\varphi_0(ix). \tag{18}$$

Сада применимо већ доказани случај на реално линеаран функционал φ_0, и утврдимо да постоји његово продужење $\Lambda_0:X\to\mathrm{R}$ са истом нормом $||\Lambda_0||=||\varphi_0||$, и дефинишемо $\Lambda:X\to\mathrm{C}$ са

$$\Lambda(x)=\Lambda_0(x)-i\Lambda_0(ix).$$

Добијени функционал је адитиван и хомоген у односу на множење реалним скаларом. Да би био хомоген и у односу на множење комплексним скаларом треба још једино доказати да је $\Lambda(ix)=i\Lambda(x)$. То међутим, следи из

$$\Lambda(ix)=\Lambda_0(ix)-i\Lambda_0(i^2x)=\Lambda_0(ix)+i\Lambda_0(x)=i(\Lambda_0(x)-i\Lambda_0(ix)).$$

Докажимо и да је $\Lambda|_L=\varphi$. Како за $x\in L$ важи $ix\in L$, то је $\Lambda_0(x)=\varphi_0(x)$, али и $\Lambda_0(ix)=\varphi_0(ix)$, и отуда и из (18) имамо (за $x\in L$)

$$\Lambda(x)=\Lambda_0(x)-i\Lambda_0(ix)=\varphi_0(x)-i\varphi_0(ix)=\varphi(x),$$

тј. важи $\Lambda|_L=\varphi$.

Остаје још да докажемо да се норма не повећава. Нека је $x\in X$ произвољно. Одаберимо реалан број θ тако да важи $\Lambda(x)=|\Lambda(x)|e^{i\theta}$. Биће тада $\Lambda(e^{-i\theta}x)=|\Lambda(x)|\ge0$, па имамо

$$|\Lambda(x)|=\Lambda(e^{-i\theta}x)=\Lambda_0(e^{-i\theta}x)-i\Lambda_0(ie^{-i\theta}x).$$

Међутим, умањилац у последњем изразу једнак је нула, јер су вредности функционала Λ_0 реални бројеви, а цео израз такође припада $\mathbb{R}$. Тако је

$$|\Lambda(x)| = \Lambda_0(e^{-i\theta}x) \leq ||\Lambda_0||\,||e^{-i\theta}x|| = ||\varphi_0||\,||x||,$$

односно $||\Lambda|| \leq ||\varphi||$, чиме је доказ завршен. □

3.13. Последице. Тек на основу Хан-Банахове теореме можемо да тврдимо да дуални простор X^* произвољног Банаховог простора X није тривијалан. И не само да није тривијалан, он је довољно богат да потпуно опише полазни простор X.

Последице су ове:

(а) *Нека је $0 \neq x \in X$ призвољан вектор. Тада постоји $\varphi \in X^*$ тако да је $||\varphi|| = 1$ и $\varphi(x) = ||x||$. Другим речима, постоји функционал φ који достиже своју норму на вектору x.*

(б) *За било које $x \neq y \in X$ постоји функционал $\varphi \in X^*$ такав да је $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Кажемо и да дуални простор раздваја тачке.*

(в) *За све $x \in X$ важи $||x|| = \sup\limits_{\varphi\in X^*, ||\varphi||=1} |\varphi(x)|$.*

(г) *Нека је $L \leq X$ затворен потпростор, и $y \in X$ такав да је $d(y, L) = d > 0$ (тиме наравно $y \notin L$). Тада постоји функционал $\varphi \in X^*$ такав да је $\varphi(y) = 1$, $\varphi(x) = 0$ за све $x \in L$ и $||f|| = 1/d$. Другим речима дуални простор раздваја тачку и потпростор.*

Доказ. (а) Дефинишемо функционал φ_0 на једнодимензионалном потпростору $\mathscr{L}in\{x\} = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ са $\varphi_0(\lambda x) = \lambda ||x||$. Пресликавање је очигледно линеарно, и важи $|\varphi_0(\lambda x)| = |\lambda|\,||x|| = ||\lambda x||$, па је $||\varphi_0|| = 1$. Према Хан-Банаховој теореми φ_0 се може продужити до функционала φ на читавом простору X без увећања норме. Тада је $||\varphi|| = 1$, али и $\varphi(x) = \varphi_0(x) = ||x||$.

(б) Применимо претходно на вектор $x - y \neq 0$. Значи постоји $\varphi \in X^*$ са својством $\varphi(x - y) = ||x - y|| > 0$, тј. $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

(в) Ако је $\varphi \in X^*$, $||\varphi|| = 1$ онда је $|\varphi(x)| \leq ||\varphi||\,||x|| \leq ||x||$, па је десна страна мања или једнака од леве. Према првој последици постоји $\varphi \in X^*$ такво да је $||\varphi|| = 1$ и $\varphi(x) = ||x||$, па се супремум претвара у максимум и једнак је управо $||x||$.

(г) Нека је $L_1 = \mathscr{L}in\{L, y\} = \{x + \lambda y \mid x \in L, \lambda \in \mathbb{K}\}$. На потпростору L_1 дефинишемо функционал φ_0 са $\varphi_0(x + \lambda y) = \lambda$. Очигледно је у питању линеаран функционал, $\varphi_0|_L = 0$ и $\varphi_0(y) = 1$. Докажимо и да је ограничен. За $\lambda \neq 0$ имамо

$$\frac{|\varphi_0(x + \lambda y)|}{||x + \lambda y||} = \frac{|\varphi_0(x/\lambda + y)|}{||x/\lambda + y||} = \frac{1}{||x/\lambda + y||} \leq \frac{1}{d},$$

што је довољно да закључимо $||\varphi_0|| \leq 1/d$. Да је норма баш једнака видимо ако узмемо низ x_n такав да $||x_n + y|| \to d$. Тада је, наиме, $1 = \varphi_0(x_n + y) \leq ||\varphi_0||\,||x_n + y|| \to ||\varphi_0|| d$, односно $||\varphi_0|| \geq 1/d$.

Према Хан Банаховој теореми постоји $\varphi \in X^*$, продужење функционала φ_0 које задржава сва битна својства. □

3.14. Анихилатор. Нека је X нормиран векторски простор и $S \subseteq X$ неки скуп. *Анихилатор* скупа S (у ознаци S°, а понегде и $S^\perp$) је

$$S^\circ = \{\varphi \in X^* \mid \varphi(x) = 0 \text{ за све } x \in S\}.$$

С друге стране, за скуп $T \subseteq X^*$ можемо дефинисати *преданихилатор*

$$T_\circ = \{x \in X \mid \varphi(x) = 0 \text{ за све } \varphi \in T\}.$$

Анихилатор и преданихилатор су затворени линеарни потпростори, тј. $S^\circ \leq X^*$, $T_\circ \leq X$, без обзира на то какви су S и T.

Заиста, ако φ_1, $\varphi_2 \in S^\circ$, тада је за све $x \in S$, $(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \lambda_2\varphi_2(x) = 0$, па и $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \in S^\circ$. Тако је S° векторски потпростор. Да би се уверили да је затворен, узмимо $S^\circ \ni \varphi_n \to \varphi$. Конвергенција је у норми дуалног простора, тј. $||\varphi_n - \varphi|| \to 0$. Одатле и за свако $x \in X$, $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq ||\varphi_n - \varphi|| ||x|| \to 0$, па је $\varphi(x) = \lim \varphi_n(x) = 0$.

Слично се доказује и за преданихилатор. Наиме, ако x_1, $x_2 \in T_\circ$ онда за све $\varphi \in T$ имамо $\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1\varphi(x_1) + \lambda_2\varphi(x_2) = 0$, па и $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in T_\circ$. А, ако $T_\circ \ni x_n \to x$, тј. $||x_n - x|| \to 0$, онда и за све $\varphi \in X^*$ имамо $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \leq ||\varphi|| ||x_n - x|| \to 0$, одакле је $\varphi(x) = \lim \varphi(x_n) = 0$, па је $T_\circ$ линеаран и затворен.

3.15. Став. *Нека је X Банахов простор и $L \leq X$. Тада за дуалне просторе L^* и $(X/L)^*$ важи*

$$L^* \cong X^*/L^\circ, \qquad (X/L)^* \cong L^\circ.$$

Доказ. За први изоморфизам дефинишимо пресликавање $\Phi : X^*/L^\circ \to L^*$ са

$$\Phi(\Lambda + L^\circ) = \Lambda|_L. \tag{19}$$

Треба прво доказати да је дефиниција коректна, односно да резултат у (19) не зависи од избора представника класе. Заиста, ако је $\Lambda_1 + L^\circ = \Lambda_2 + L^\circ$, онда је $\Lambda_1 - \Lambda_2 \in L^\circ$, па је $(\Lambda_1 - \Lambda_2)|_L = 0$ и отуда $\Lambda_1|_L = \Lambda_2|_L$.

Линеарност пресликавања Φ је очигледна. Да је пресликавање Φ сурјективно следи из Хан-Банахове теореме, јер се сваки функционал $\varphi \in L^*$ може продужити без увећања норме до функционала $\Lambda \in X^*$.

Остаје да докажемо да је Φ изометрично, јер одатле одмах следи да је инјективно. Нека је $\Phi(\Lambda + L^\circ) = \varphi$, $\varphi \in L^*$. Како било које продужење функционала φ има норму већу или једнаку од $||\varphi||$ то имамо $||\varphi|| \leq ||\Lambda + L^\circ||$, а како постоји и Хан Банахово продужење и припада $\Lambda + L^\circ$, то је $||\varphi|| = ||\Lambda + L^\circ||$.

За други изоморфизам уочимо канонску пројекцију

$$\pi : X \to X/L, \qquad \pi(x) = x + L.$$

Канонска пројекција је линеарна и има норму једнаку један. Линеарност је очигледна, као и то да је норма ≤ 1. Да је једнака један следи из леме о скоро ортогоналном вектору. Наиме, постоји $x \notin L$, $||x|| = 1$, $d(x, L) > 1 - \delta$, и тада $||\pi(x)|| = ||x + L|| > 1 - \delta$, а с друге стране $||\pi(x)|| \leq ||\pi|| ||x|| = ||\pi||$, па је $||\pi|| > 1 - \delta$ за све $\delta > 0$.

Конструишемо пресликавање $\Phi : (X/L)^* \to X^*$ са

$$\Phi(\Lambda) = \Lambda \circ \pi, \quad \text{тј.} \quad \Phi(\Lambda)(x) = \Lambda(\pi(x)) = \Lambda(x + L). \tag{20}$$

Ако је $x \in L$, онда је $x + L = 0 + L$, па је $\Phi(\Lambda)(x) = \Lambda(0 + L) = 0$. Тако је увек $\Phi(\Lambda) \in L^\circ$. Са друге стране, за било које $\varphi \in L^\circ$, пресликавање $\Lambda : X/L \to \mathrm{K}$ дато са $\Lambda(x + L) = \varphi(x)$ је коректно дефинисано и важи $\Phi(\Lambda) = \varphi$. Тако је слика пресликавања Φ задатог са (20) једнака L°, тј. Φ је „на“.

Како је Φ очигледно линеарно, треба још доказати да је реч о изометрији. За $x \in X$ имамо

$$|\Phi(\Lambda)(x)| = |\Lambda(x+L)| \leq ||\Lambda||\,||x+L|| \leq ||\Lambda||\,||x||, \tag{21}$$

па је $||\Phi(\Lambda)|| \leq ||\Lambda||$.

С друге стране за $\Lambda \in (X/L)^*$ имамо

$$|\Lambda(x+L)| = |\Phi(\Lambda)(x)| \leq ||\Phi(\Lambda)||\,||x||.$$

Када то применимо на векторе облика $x+y$, где $y \in L$ (водећи рачуна о $x+y+L = x+L$ добијамо $|\Lambda(x+L)| \leq ||\Phi(\Lambda)||\,||x+y||$, што после узимања инфимума по свим $y \in L$ постаје $|\Lambda(x+L)| \leq ||\Phi(\Lambda)||\,||x+L||$, односно $||\Lambda|| \leq ||\Phi(\Lambda)||$. Тиме је доказ завршен. □

3.16. Став. *Нека је $S \subseteq X$ произвољан подскуп простора X. Тада је*

$$(S^\circ)_\circ = \overline{\mathscr{L}inS}.$$

Доказ. Непосредно по дефиницији је $S \subseteq (S^\circ)_\circ$, па како је преданихилатор увек затворен и линеаран, то обавезно важи $\overline{\mathscr{L}inS} \leq (S^\circ)_\circ$. Претпоставимо да не важи обратна инклузија, тј. да је $L = \overline{\mathscr{L}inS} \subsetneqq (S^\circ)_\circ$. Према леми о скоро ортогоналном вектору, постоји онда $y \in (S^\circ)_\circ$, $||y|| = 1$, $d(y,L) > 1/2$. Према последици 3.13.(г) постоји функционал ψ такав да је $||\psi|| = 2$, $\psi(y) = 1$ и $\psi(x) = 0$ за све $x \in L$, а тиме и за све $x \in S \subseteq L$, односно $\psi \in S^\circ$. Међутим, из последња два својства излази да $y \notin (S^\circ)_\circ$ супротно претпоставци. □

Примедба: Може се доказати и да је $(T_\circ)^\circ = \overline{\mathscr{L}inT}$, али докази које знам захтевају даљу теорију. ????

3.17. Други дуал. *Други дуал* Банаховог простора X је дуални простор његовог дуалног простора. Означава се са X^{**} уместо са $(X^*)^*$.

Уопштено је тешко замислити елементе другог дуала, али се неки од њих могу пронаћи у полазном простору X. Наиме за фиксирано $x \in X$, пресликавање

$$X^* \to \mathbb{K}, \qquad \varphi \mapsto \varphi(x),$$

такозвано израчунавање у тачки је линеарно. Означимо га са Λ_x. Оно је и ограничено, јер је $|\Lambda_x(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq ||\varphi||\,||x||$, па је $||\Lambda_x|| \leq ||x||$. Овде заправо важи једнакост. Наиме, према првој последици Хан-Банахове теореме постоји $\varphi \in X^*$ такво да је $\varphi(x) = ||x||$ и $||\varphi|| = 1$. Отуда је $||x|| = \varphi(x) = \Lambda_x(\varphi) \leq ||\Lambda||\,||\varphi|| = ||\Lambda||$.

Према томе, пресликавање

$$X \ni x \mapsto \Lambda_x \in X^{**} \tag{22}$$

јесте изометричко утапање простора X у његов други дуални простор, или краће у други дуал.

Дефиниција: За Банахов простор X кажемо да је *рефлексиван*, ако је поменуто пресликавање сурјективно, односно ако се њиме постиже изоморфизам $X \cong X^{**}$.

На пример, простори $L^p(X,\mu)$ за $1 < p < +\infty$ јесу рефлексивни. Простор c_0 није рефлексиван, јер је $c_0^{**} = (c_0^*)^* \cong (l^1)^* \cong l^\infty \supsetneqq c_0$. Ни простор $L^1(X,\mu)$ није рефлексиван, јер је $L^1(X,\mu)^* \cong L^\infty(X,\mu)$, док је $L^\infty(X,\mu)^* \supsetneqq L^1(X,\mu)$ што ћемо ускоро видети.

Примедба: За рефлексивност није довољно само да важи $X \cong X^{**}$ већ да се изоморфизам остварује управо пресликавањем (22). Постоји, наиме, пример простора $X \cong X^{**}$ где пресликавање (22) није „на“. Тај пример није нимало једноставан. ????

Важна напомена: Дуалност у Банаховим просторима је заправо замена за скаларни производ. Стога многи аутори вредност функционала φ у тачки x која, видели смо, може бити и вредност функционала Λ_x у тачки φ записују у симетричном облику

$$\varphi(x) =: \langle x, \varphi \rangle. \tag{23}$$

На исти начин, појмови анихлатора и преданихилатора су замена за појам ортогоналносг комплемента. Наиме, у симетричном запису (23) дефиниција анихилатора S° гласи

$$S^\circ = \{\varphi \in X^* \mid \langle x, \varphi \rangle = 0 \text{ за све } x \in S\},$$

што (нимало случајно) личи на формулу (2) дефиниције 2.4.

Процес можемо наставити, па дефинисати и трећи, четврти итд. дуал.

$$X^{***} := (X^{**})^*, \qquad X^{****} = (X^{***})^*, \qquad \text{итд.}$$

Ако је X рефлексиван, онда су сви дуали парног реда изоморфни са X, а сви непарни са X^*. Међутим у случају нерефлексивних простора низови парних, односно непарних дуала се неограничено повећавају.

Описаћемо сада дуални простор простора $C[a,b]$. То нисмо могли учинити раније, јер смо чекали Хан Банахову теорему.

3.18. Став. *Дуални простор простора $C[a,b]$ изоморфан је са $NBV[a,b]$. Прецизније за сваки функционал $\varphi \in C[a,b]^*$ постоји јединствена нормализована финкција ограничене варијације $y \in NBV[a,b]$ таква да важи*

$$\varphi(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t), \tag{24}$$

где је реч о Стилтјесовом интегралу. При томе важи

$$||\varphi||_{C^*} = ||y||_{NBV}. \tag{25}$$

Доказ. Да је интегралом у (24) задат линеаран функционал на простору $C[a,b]$ је очигледно. Да је ограничен, следи из

$$\left| \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t) \right| \le \int_a^b |x(t)|\,\mathrm{d}Vy(t) \le \max_{a \le t \le b} |x(t)| V_a^b y = V_a^b y ||x||.$$

Одатле је одмах

$$||\varphi||_{C^*} \le ||y||_{NBV}. \tag{26}$$

Како је свака непрекидна функција ограничена, и како је за њу максимум једнак супремуму, то је $C[a,b] \le L^\infty((a,b),m)$, где је m Лебегова мера. Ако је $\varphi \in C[a,b]^*$ он се може, према Хан-Банаховој теореми продужити до функционала $\Lambda \in (L^\infty)^*$, без увећања норме.

Да бисмо конструисали функцију y ставимо $y(t) = \Lambda(\chi_{[a,t)})$, где је, као и до сада χ_A ознака за карактеристичну функцију скупа A. Услов $y(a) = 0$ је испуњен по дефиницији. Докажимо прво да је функција y ограничене варијације. Нека је

$$\mathscr{P} : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \tag{27}$$

произвољна подела интервала $[a,b]$. Одредимо бројеве $\theta_k \in [0,2\pi)$ тако да важи $y(t_k) - y(t_{k-1}) = |y(t_k) - y(t_{k-1})|e^{i\theta_k}$, тј. $\theta_k = \arg(y(t_k) - y(t_{k-1}))$. Функција

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k} \chi_{[t_{k-1},t_k)}$$

у свакој тачки има апсолутну вредност једнаку један, па је њена L^∞ норма једнака један. Како је $\chi_{[t_{k-1},t_k)} = \chi_{[0,t_k)} - \chi_{[0,t_{k-1})}$, то је $\Lambda(\chi_{[t_{k-1},t_k)}) = y(t_k) - y(t_{k-1})$, па имамо

$$\sum_{k=1}^{n} |y(t_k) - y(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}(y(t_k) - y(t_{k-1})) =$$
$$= \Lambda\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k} \chi_{[t_{k-1},t_k)}\right) \le ||\Lambda|| \left\|\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k} \chi_{[t_{k-1},t_k)}\right\| = ||\Lambda||,$$

што после узимања супремума по свим поделама интервала $[a,b]$ постаје

$$||y||_{NBV} = V_a^b y \le ||\Lambda||.$$

То заједно са (26) даје (25).

Функција y је ограничене варијације, па има највише пребројиво много прекида. По потреби, у тачкама прекида, фукцију y предефинишемо тако да буде непрекидна с лева, тј. у тачкама прекида ставимо $y(t) = y(t-)$. Тада је са $\lambda_y([\alpha,\beta)) = y(\beta) - y(\alpha)$ задата комплексна Борелова мера на $[a,b]$.

Докажимо сада да за тако одабрану функцију y важи (24). Нека је $x \in C[a,b]$ дато, и нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Уочимо $\delta > 0$ тако да важи услов равномерне непрекидности, тј. тако да $|s - t| < \delta$ повлачи $|x(s) - x(t)| < \varepsilon$. Нека је подела $\mathscr{P}$ дата са (27) таква да је $\lambda(\mathscr{P}) < \delta$. Дефинишимо функцију $x_{\mathscr{P}}$ са

$$x_{\mathscr{P}}(t) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\chi_{[t_{k-1},t_k)}(t). \tag{28}$$

За $t \in [t_{k-1}, t_k)$ важи $|t - t_k| \le \lambda(\mathscr{P}) < \delta$ и отуда $|x(t) - x(t_k)| < \varepsilon$, па је $||x - x_{\mathscr{P}}||_{L^\infty} \le \varepsilon$. Отуда је

$$|\Lambda(x) - \Lambda(x_{\mathscr{P}})| \le ||\Lambda||\varepsilon. \tag{29}$$

С друге стране, имамо

$$\Lambda(x_{\mathscr{P}}) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\Lambda(\chi_{[t_{k-1},t_k)}) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)(y(t_k) - y(t_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} x(t_k)\lambda_y([t_{k-1},t_k)) =$$
$$= \int_a^b x_{\mathscr{P}}\, \mathrm{d}\lambda_y,$$

па је

$$\left|\int_a^b x\, \mathrm{d}\lambda_y - \Lambda(x_{\mathscr{P}})\right| = \left|\int_a^b x\, \mathrm{d}\lambda_y - \int_a^b x_{\mathscr{P}}\, \mathrm{d}\lambda\right| \le ||x - x_{\mathscr{P}}||_\infty V_a^b y < V_a^b y\varepsilon.$$

Одатле, и из (29) налазимо $\left|\Lambda(x) - \int_a^b x\, \mathrm{d}\lambda_y\right| \le \varepsilon(||\Lambda|| + V_a^b y)$, односно $\varphi(x) = \Lambda(x) = \int_a^b x\, \mathrm{d}\lambda_y$, јер ε може бити произвољно мало.

Најзад, да је функција y јединствена, следи, јер ако једнакост важи за две функције y_1 и y_2, онда је и $y_1 - y_2 \in NBV[a,b]$, па је

$$0 = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}(y_1(t) - y_2(t)),$$

па на основу једнакости (25) налазимо $\|y_1 - y_2\| = 0$, тј. $y_1 = y_2$. Овиме је доказ завршен. □

3.19. Последица. $L^\infty((a,b),m)^* \supsetneqq L^1((a,b),m)$. *Дакле у општем случају дуални простор, простора L^∞ није изоморфан са L^1.*

Доказ. Из претходног става можемо закључити да је $C[a,b]^* \supsetneqq L^1(a,b)$. Заиста, пресликавање

$$L^1(a,b) \ni f \mapsto f\,\mathrm{d}m \in \mathscr{M}(a,b)$$

је изометричко утапање, јер је

$$\|f\,\mathrm{d}m\|_{\mathscr{M}} = |f\,\mathrm{d}m|(a,b) = \int_a^b |f|\,\mathrm{d}m = \|f\|_1.$$

Међутим, слика тог пресликавања није цео простор $\mathscr{M}$, наиме, њега сачињавају искључиво мере апсолутно непрекдине у односу на Лебегову.

С друге стране, простори $\mathscr{M}(a,b)$ и $NBV[a,b]$ су изоморфни, јер је пресликавање

$$NBV[a,b] \ni g \mapsto \lambda_g \in \mathscr{M}(a,b)$$

које функцији g додељује одговарајућу Лебег-Стилтјесову меру, изометрички изоморфизам. Наиме, $|\lambda_g|(a,b) = V_a^b g$.

Када смо закључили $C[a,b]^* \supsetneqq L^1(a,b)$, онда на основу Става 3.15 имамо $L^1(a,b) \subsetneqq C[a,b]^* \cong L^\infty(a,b)^*/C[a,b]^\circ$, одакле се види да је $L^\infty(a,b)^*$ знатно већи простор од $L^1(a,b)$. □

Постоје наравно, примери простора са мером $(X,\mathfrak{M},\mu)$ такви да је $L^\infty(X,\mu)^* \cong L^1(X,\mu)$. На пример, $X = \{1,2,\dots,n\}$, а $\mu = \nu$ бројачка мера.

Адјунгован и конјугован оператор

3.20. Билинеарне форме. Нека је H Хилбертов простор, и нека је $A : H \to H$ ограничен линеаран оператор. Пресликавање $\Omega : H \times H \to \mathbb{K}$

$$\Omega(x,y) = \langle Ax, y\rangle, \tag{30}$$

има следећа својства

(i) $\Omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \Omega(x_1,y) + \lambda_2 \Omega(x_2,y)$;
(ii) $\Omega(x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \overline{\mu}_1 \Omega(x,y_1) + \overline{\mu}_2 \Omega(x,y_2)$;
(iii) Постоји константа $M > 0$ таква да је $|\Omega(x,y)| \le M\|x\|\,\|y\|$.

Прва два су једноставне последице линеарности, односно антилинеарности скаларног производа, док се треће лако изводи помоћу Коши Шварцове неједнакости

$$|\Omega(x,y)| = |\langle Ax, y\rangle| \le \|Ax\|\,\|y\| \le \|A\|\,\|x\|\,\|y\|. \tag{31}$$

Подстакнути овим примером дефинишемо појам *билинеарне форме.* Наиме, пресликавање $\Omega : H \times H \to \mathbb{K}$ које испуњава својства (i), (ii) и (iii) називамо *ограничена билинеарна форма* или *ограничен билинеаран функционал.*

Примедба: Термин „билинеарна“ није до краја прецизан, јер Ω није линеарно по обе променљиве, него је линеарно по првој, а антилинеарно по другој променљивој. И енглески и руски језик имају згодне термине којима описују овај феномен. Они у нашој транскрипцији гласе „сесквилинеарна“, односно „полуторалинеарна“ форма и отприлике значе „један и по пута линеарна“. Сви поменути изрази не звуче лепо, те се овде користи израз „билинеарна“ упркос томе што је непрецизан.

Најмања константа M за коју важи својство (iii) назива се *норма билинеарног фуинкционала* Ω и означава се са $||\Omega||$. Као и у случају оператора, могу се извести формуле за израчунавање норме $||\Omega||$:

$$||\Omega|| = \sup_{0\neq x,y\in H} \frac{|\Omega(x,y)|}{||x||\,||y||} = \sup_{||x||=||y||=1} |\Omega(x,y)| = \sup_{||x||,||y||\le 1} |\Omega(x,y)|.$$

Приметимо да из (31) излази

$$||\Omega|| \le ||A||. \tag{32}$$

Међутим важи и обратно:

3.21. Став. *За сваки ограничен билинеаран функционал, постоји јединствен ограничен оператор $A \in L(H)$ такав да важи (30). Тада важи и $||\Omega|| = ||A||$.*

Доказ. Фиксирамо $x \in H$ и посматрамо пресликавање $\varphi_x : H \to \mathbb{K}$ дато са $\varphi_x(y) = \overline{\Omega(x,y)}$. На основу својства (ii), пресликавање φ_x је линеарно, а на основу својства (iii) оно је ограничено. Прецизније важи $||\varphi_x|| \le ||\Omega||\,||x||$, јер је $|\varphi_x(y)| = |\Omega(x,y)| \le ||M||\,||x||\,||y||$.

Према Рисовој теореми, постоји јединствен вектор $z = z(x) \in H$ такав да важи $\varphi_x(y) = \langle y,z\rangle$, тј. $\overline{\Omega(x,y)} = \langle y,z\rangle = \overline{\langle z,y\rangle}$, односно

$$\Omega(x,y) = \langle z,y\rangle.$$

Дефинишемо пресликавање $A : H \to H$ са $Ax = z(x)$. Тада је

$$\Omega(x,y) = \langle Ax,y\rangle.$$

За сада не знамо чак ни да је A линеарно. Међутим, на основу својства (i), за све x_1, x_2, $y \in H$ и све λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$ имамо

$$\langle A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2), y\rangle = \Omega(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 \Omega(x_1,y) + \lambda_2 \Omega(x_2,y) = \\ \lambda_1\langle Ax_1,y\rangle + \lambda_2\langle Ax_2,y\rangle = \langle \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2, y\rangle,$$

тј. $\langle A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2), y\rangle = 0$ за све y одакле је $A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2) = 0$, па је A линеарно.

С друге стране, важи и

$$|\langle Ax,y\rangle| = |\Omega(x,y)| \le ||\Omega||\,||x||\,||y||,$$

за све x, $y \in H$, па када ставимо $y = Ax$ налазимо $||Ax||^2 \le ||\Omega||\,||x||\,||Ax||$, тј. $||Ax|| \le ||\Omega||\,||x||$, одакле је $||A|| \le ||\Omega||$, што заједно са (32) даје $||A|| = ||\Omega||$. □

3.22. Став (адјунгован оператор). *Нека је H Хилбертов простор, и нека је $A : H \to H$ ограничен линеаран оператор. Тада постоји јединствен оператор $A^* : H \to H$ такав да за све x, $y \in H$ важи*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle. \qquad (33)$$

При томе је $||A^*|| = ||A||$. Оператор A^* назива се адјунгован *оператор оператору A.*

Придруживање $A \mapsto A^*$ има следећа својства

(i) $(A^*)^* = A$;

(ii) $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$;

(iii) $(AB)^* = B^* A^*$

(iv) $||A^* A|| = ||A||^2$.

Доказ. Пресликавање $\Omega : H \times H \to \mathbb{K}$ дато са $\Omega(y, x) = \overline{\langle Ax, y\rangle}$ је један ограничен билинеаран функционал. Лако се види и да је $||\Omega|| = ||A||$ (јер је $|\overline{\langle Ax, y\rangle}| = |\langle Ax, y\rangle|$). Према претходном ставу постоји јединствен оператор B са својством $\Omega(y, x) = \langle By, x\rangle$, тј. $\overline{\langle Ax, y\rangle} = \langle By, x\rangle = \overline{\langle x, By\rangle}$, па је

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle.$$

Стога можемо ставити $A^* := B$, јер је $||B|| = ||\Omega|| = ||A||$.

Једнакост (33) у потпуности одређује адјунгован оператор, те помоћу ње доказујемо својства пресликавања $A \mapsto A^*$. Наиме, за све x, $y \in H$ имамо

$$\langle x, A^{**} y\rangle = \langle A^* x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle,$$

одакле је $A^{**} y - Ay$ ортогонално на све $x \in H$, па је једнако нули. Тако важи (i).

За доказ особине (ii) рачунамо

$$\langle x, (\lambda A + \mu B)^* y\rangle = \langle \lambda Ax + \mu Bx, y\rangle = \lambda\langle Ax, y\rangle + \mu\langle Bx, y\rangle =$$
$$= \lambda\langle x, A^* y\rangle + \mu\langle x, B^* y\rangle = \langle x, (\overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*) y\rangle,$$

а за доказ особине (iii)

$$\langle x, (AB)^* y\rangle = \langle ABx, y\rangle = \langle Bx, A^* y\rangle = \langle x, B^* A^* y\rangle,$$

Што се тиче особине (iv) имамо прво $||A^* A|| \le ||A^*||\,||A|| = ||A||^2$ што чини једну неједнакост. Што се тиче обратне, за било које $||x|| = 1$, имамо

$$||Ax||^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^* Ax, x\rangle \le ||A^* A||\,||x||^2 = ||A^* A||,$$

па када узмемо супремум по свим x, $||x|| = 1$ добијамо $||A||^2 \le ||A^* A||$. □

Примедба: Појам адјунгованог оператора заснован је на скаларном производу. Адјунгован оператор је уопштење појма транспоноване матрице. О томе видети вежбање 3.26. У Банаховим просторима скаларног производа нема, али постоји каква таква замена, појам дуалног простора. Стога:

3.23. Конјугован оператор. Нека су X и Y Банахови простори, $A \in L(X; Y)$ и нека је $\varphi \in Y^*$. Пресликавање $\varphi \circ A = \varphi A : X \to \mathbb{K}$ је линеарно као композиција два линеарна, и ограничено, јер је

$$|(\varphi A)(x)| = |\varphi(Ax)| \le ||\varphi||\,||Ax|| \le ||\varphi||\,||A||\,||x||,$$

одакле је и $||\varphi A|| \le ||\varphi||\,||A||$.

Дефинишемо пресликавање $A^* : Y^* \to X^*$ са

$$A^*\varphi = \varphi A.$$

Пресликавање A^* назива се *конјуговани оператор* оператору A.

Конјуговани оператор A^* је линеаран, ограничен и важи $||A^*|| = ||A||$.

Заиста, да је A^* линеаран следи јер за све $x \in X$ имамо

$$A^*(\lambda\varphi + \mu\psi)(x) = (\lambda\varphi + \mu\psi)Ax = \lambda\varphi Ax + \mu\psi Ax = (\lambda A^*\varphi + \mu A^*\psi)(x),$$

тј.

$$A^*(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda A^*\varphi + \mu A^*\psi.$$

Ограниченост следи из $||A^*\varphi|| = ||\varphi A|| \leq ||A||\,||\varphi||$, одакле је и $||A^*|| \leq ||A||$. Докажимо сада и обратну неједнакост. Нека је $x \in X$, $||x|| = 1$ вектор за који важи $||Ax|| > ||A|| - \varepsilon$, где је $\varepsilon > 0$ унапред задат број. Према првој последици Хан-Банахове теореме постоји функционал φ такав да је $||\varphi|| = 1$ и $\varphi(Ax) = ||Ax||$. За тако одабране φ и x имамо

$$||A^*\varphi|| \geq |(A^*\varphi)x| = |\varphi(Ax)| = ||Ax|| > ||A|| - \varepsilon, \qquad \text{тј.} \qquad ||A^*|| \geq ||A^*\varphi|| > ||A|| - \varepsilon,$$

па је и $||A^*|| \geq ||A||$ јер ε може бити произвољно.

3.24. Став. *Пресликавање $^* : L(X;Y) \to L(Y^*;X^*)$ има следећа својства:*

(i) $(\lambda A + \mu B)^* = \lambda A^* + \mu B^*$;
(ii) *Ако $A \in L(Y;Z)$ и $B \in L(X;Y)$ онда $(AB)^* = B^*A^*$;*
(iii) *Ако су X и Y рефлексивни Банахови простори, онда је $A^{**} = A$.*

Доказ. (i) За $\varphi \in Y^*$ и $x \in X$, имамо $(\lambda A + \mu B)^*\varphi(x) = \varphi((\lambda A + \mu B)x) = \lambda\varphi(Ax) + \mu\varphi(Bx) = (\lambda A^* + \mu B^*)\varphi(x)$.

(ii) За $\varphi \in Z^*$ и $x \in X$ имамо $(AB)^*\varphi(x) = \varphi(ABx) = A^*\varphi(Bx) = B^*A^*\varphi(x)$.

(iii) Нека је $\Lambda_x \in X^{**}$ функционал задат са $\Lambda_x(\varphi) = \varphi(x)$ за све $\varphi \in X^*$. Тада је за $\psi \in Y^*$ $A^{**}\Lambda_x(\varphi) = \Lambda_x(A^*\psi) = A^*\psi(x) = \psi(Ax) = \Lambda_{Ax}\psi$, па је $A^{**}\Lambda_x = \Lambda_{Ax}$, што уз изоморфизам, тј. идентификацију $x \longleftrightarrow \Lambda_x$ даје $A^{**}x = Ax$. ☐

Вежбања

3.1. Доказати да је са $\eta_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2k^2}\xi_k$ дефинисано једно линеарно пресликавање $A : l^2 \to l^2$, $Ax = y$, $x = (\xi_k)_{k=0}^{+\infty}$, $y = (\eta_k)_{k=0}^{+\infty}$. Доказати да је A ограничен и израчунати му норму.

3.2. Нека је $\Omega \subseteq C[0,1]$ дат са $\Omega = \{x \in C[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$.
а) Доказати да је Ω затворен векторски потпростор од $C[0,1]$;
б) Нека је $C_0(-\infty,+\infty)$ скуп дат са

$$C_0(-\infty,+\infty) = \{x : (-\infty,+\infty) \to \mathrm{C} \mid x \text{ непрекидна}, \lim_{t\to\pm\infty} x(t) = 0\},$$

а норма на њему је дата са $||x|| = \sup_{t\in\mathrm{R}} |x(t)|$. Доказати да се $\sup$ може заменити са $\max$. Доказати да је пресликавање $T : \Omega \to C_0(-\infty,+\infty)$ дато са $(Tx)(t) = x\left(\frac{2t-1}{t(1-t)}\right)$ изометрички изоморфизам, тј. да је линеарно и да је $||Tx|| = ||x||$. Закључити одатле да је $C_0(-\infty,+\infty)$ Банахов простор. [Упутство: искористити чињеницу да се пресликавањем $t \mapsto (2t-1)/t(1-t)$ интервал $(0,1)$ бијективно пресликава на $(-\infty,+\infty)$.]

3.3. За функцију $x \in L^1(\mathrm{R})$ њена Фуријеова трансформација је дата са

$$(Fx)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} x(t)\, \mathrm{d}t. \tag{34}$$

а) Доказати да је функција Fx непрекидна (искористити ТДК);

б) Доказати да је $\lim_{s\to\pm\infty} Fx(s) = 0$;

в) Доказати да је пресликавање $F : L^1(\mathrm{R}) \to C_0(-\infty, +\infty)$ дато са (34) коректно дефинисано, линеарно и ограничено;

г) Доказати да је $\|F\| = 1/\sqrt{2\pi}$. [Упутство: За $x \geq 0$ је $(Fx)(0) = (1/\sqrt{2\pi})\|x\|$.

3.4. Нека је a реалан број.

а) Доказати да је скуп

$$L^1([0,+\infty), e^{-at}\,\mathrm{d}t) = \{x : [0,+\infty) \to \mathrm{C} \mid x \text{ мерљива}, \|x\|_a = \int_0^{+\infty} e^{-at}|x(t)| < +\infty\}$$

Банахов простор.

б) Доказати да је скуп $C_0[a,+\infty) = \{x : [a,+\infty) \mid x \text{ непрекидна}, \lim_{t\to+\infty} x(t) = 0\}$ Банахов простор ако се на њему уведе норма са $\|x\| = \sup_{t\geq 0}|x(t)|$. Да ли уместо $\sup$ може да стоји $\max$?

в) Доказати да је пресликавање $L : M_a \to C[a,+\infty)$ дато са

$$Lx(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} x(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{(Лапласова трансформација)}$$

коректно дефинисано, линеарно и ограничено;

г) Одредити $\|L\|$.

3.5. Дато је пресликавање $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ са

$$(Vf)(t) = \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \text{(Волтерин оператор).}$$

а) Доказати да је V линеаран, ограничен и оценити му норму, тј. наћи константу M такву да је $\|V\| \leq M$. [Упутство: применити Хелдерову неједнакост на f и 1];

б) Да ли је слика $\operatorname{ran} V$ затворен потпростор?

3.6. Дато је пресликавање $A : l^p \to l^p$ $(p > 1)$ са $Ax = A(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_1, \xi_2/2, \ldots, \xi_n/n, \ldots)$.

а) Доказати да је A линеаран, ограничен и да је $\|A\| = 1$;

б) Доказати да слика $\operatorname{ran} A$ није затворена. [Упутство: $\operatorname{ran} A$ садржи базне векторе e_1, али не садржи вектор $(1/n)_{n\geq 1}$.]

3.7. Нека је X Банахов простор и нека је $L(X) = L(X;X)$ простор свих ограничених линеарних пресликавања простора X у самог себе.

а) Ако A, $B \in L(X)$ доказати да и композиција AB (скраћена ознака за $A \circ B$) припада $L(X)$. Доказати и $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$;

б) Доказати да важе оба закона дистрибутивности $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$. Примером показати да не важи закон комутативности $AB = BA$. [Упутство: Ако је $\dim X = n < +\infty$, онда се $L(X)$ може описати матрицама типа $n \times n$.]

в) $L(X)$ је прстен у односу на операције $+$ и $\circ$. Доказати. Да ли тај прстен има јединични елемент?

3.8. Нека је $A \in L(x) = L(X;X)$, и нека је $\|A\| < 1$.

а) Доказати да је ред $B = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$ апсолутно конвергентан, па тиме и конвергентан;

б) Доказати да је $B(I - A) = (I - A)B = I$, где је I ознака за идентички оператор, па извести закључак да је $I - A$ инвертибилно пресликавање кад год је $\|A\| < 1$.

3.9. Нека је A ограничен линеаран оператор на Банаховом простору X. Испитати да ли изрази $\|x\|_1 = \|Ax\|$, $\|x\|_2 = \|x\| + \|Ax\|$ задају увек норму на X? Да ли је X Банахов простор у односу на те норме? Да ли су те норме еквивалентне полазној?

3.10. Нека је $X = \{x \in C[0,1] \mid \exists x', x''\text{- непрекидни}, x(0) = x(1) = 0\}$ потпростор простора $C[0,1]$ и нека је $A : X \to C[0,1]$ $Ax = x''$.

а) Доказати да је X векторски потпростор, да није затворен и да није свуда густ у $C[0,1]$. [За последње $x_n \to x$ повлачи $x_n(0) \to x(0)$.]

б) Доказати да $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow Ax_1 \neq Ax_2$;

в) За $y \in C[0,1]$ конструишемо функцију $x(s) = \int\limits_0^1 K(s,t)y(t)\,\mathrm{d}t$, где је

$$K(s,t) = \begin{cases} -t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1 \\ -s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}.$$

Доказати да је $Ax = y$;

г) Доказати да постоји инверзни оператор $A^{-1} : C[0,1] \to X$;

д) Доказати да је $\|A^{-1}\| < 1$ и наћи сва решења једначине $Ax = x$.

3.11. Доказати да је $c^* \cong l^1$, тј. да за $\varphi \in c^*$ постоји јединствено $y = (\eta_0, \eta_1, \ldots) \in l^1$ са својством

$$\varphi(x) = \eta_0 \lim_{n\to+\infty} \xi_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n \eta_n, \qquad x = (\xi_n), \tag{35}$$

као и да је $\|\varphi\| = \|y\|_1$. [Поред e_n посматрати и вектор $e = (1,1,\ldots)$ и показати да за $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, и $\xi = \lim_{n\to+\infty} \xi_n$ важи $\|x - (\xi e - \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \xi) e_k)\| \to 0$.]

3.12. Доказати да је $L^1(X;\mu)^* \cong L^\infty(X;\mu)$, тј. да за сваки $\varphi \in L^1(X;\mu)$ постоји јединствена функција $y \in L^\infty$ таква да је

$$\varphi(x) = \int_X x(t)y(t)\,\mathrm{d}\mu(t),$$

као и да је $\|\varphi\| = \|y\|_\infty$.

3.13. Нека је c_1 скуп оних низова $x = (\xi_n) \in l^\infty$ за које постоји

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}. \tag{36}$$

а) Доказати да је c_1 линеаран потпростор од l^∞. Да ли је c_1 затворен?

б) Показати да је са (36) дефинисан ограничен линеаран функционал на c_1. Доказати да постоји $\varphi \in (l^\infty)^*$ такав да је $\varphi|_{c_1}$ облика (36).

в) Доказати да φ не може бити облика (35) нити облика (8), па закључити да је $(l^\infty)^* \supsetneqq l^1$.

3.14. Нека је X Банахов простор, и нека $\varphi \in X^*$.

а) Доказати да је $\dim(X/\ker\varphi) = 1$. [За ма које x, $y \in X$, $\varphi(x)y - \varphi(y)x \in \ker\varphi$, па су свака два $x + \ker\varphi$ и $y + \ker\varphi$ линеарно зависна.]

б) Ако је $\varphi(x) \neq 0$ доказати да је $\|\varphi\| = |\varphi(x)|/d(x, \ker\varphi)$. [Имитирати доказ четврте последице Хан-Банахове теореме.]

3.15. Нека је X Банахов простор и $L \le X$, $\dim L = n < +\infty$. Доказати да је L комплементаран. [За базу x_j, $1 \le j \le n$ од L формирати функционале φ_j, $\|\varphi_j\| = 1$, $\varphi_j(x_j) = \|x_j\|$ и показати да је $X = L + M$, где је $M = \ker\varphi_1 \cap \ldots \ker\varphi_n$.]

3.16. Нека је X Банахов простори $L \le X$ потпростор коначне кодимензије, тј. $\dim(X/L) = n < +\infty$.

а) Доказати да је L комплементаран. [Искористити лему о скоро ортогоналном вектору, да се нађу $x_1, \ldots, x_n$ тдј. $x_j + L$ база за X/L.]

б) Доказати да постоје $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$ тдј. $L = \ker\varphi_1 \cap \cdots \cap \ker\varphi_n$.

3.17. Нека су $t_1, \ldots, t_n \in [a,b]$, нека су $c_j \in \mathrm{C}$, и нека је $\varphi : C[a,b] \to \mathrm{C}$ дато са $\varphi(x) = c_1 x(t_1) + c_2 x(t_2) + \cdots + c_n x(t_n)$.

а) Доказати да је φ ограничен линеаран функционал на простору $C[a,b]$.

б) С обзиром на репрезентацију дуалног простора $C[a,b]^*$ одредити функцију $g \in NBV[a,b]$ тако да је $\varphi(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}g(t)$.

в) Одредити норму $\|\varphi\|$.

3.18. Нека је $\varphi : c_0 \to \mathrm{C}$ дат са $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k / 2^k$.

а) Одредити $\|\varphi\|$.

б) Доказати да постоји непребројиво много различитих функционала $\Lambda : c \to \mathrm{C}$ таквих да је $\Lambda|_{c_0} = \varphi$. [Упоредити формуле (8) и (35).]

3.19. Нека је $h:[a,b]\to[a,b]$ непрекидна, растућа функција, таква да је $g(a)=a$ и $g(b)=b$.

а) Доказати да је са $\varphi(x)=\int_a^b x(h(t))\,\mathrm{d}t$ дефинисан ограничен линеаран функционал на простору $C[a,b]$.

б) С обзиром на репрезентацију дуалног простора $C[a,b]^*$ одредити функцију $g\in NBV[a,b]$ тако да је $\varphi(x)=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}g(t)$. [Прво специјалан случај када су функције h и h^{-1} дифернецијабилне (смена променљиве), а после смена променљиве у Стилтјесовом интегралу. По потреби може прво и још конкретније, нпр. $a=0$, $b=1$, $h(t)=t^2$.]

3.20. Нека је Y векторски потпростор Банаховог простора X и нека је $T:Y\to l^\infty$ ограничен линеаран оператор. Доказати да постоји продужење $T_1:X\to l^\infty$ оператора T такво да је $\|T_1\|=\|T\|$. [Нека је $T_j:Y\to\mathrm{C}$ функционал који вектору из $y\in Y$ додељује j-ту координату вектора $Ty\in l^\infty$. Сваки од њих продужити по теореми Хана Банаха.]

3.21. Нека је q_n низ свих рационалних бројева из $[0,1]$, нека је

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}x(q_k),$$

а) Доказати да је φ ограничен линеаран функционал на $C[0,1]$.

б) Како сада изгледа функција g тако да је $\varphi(x)=\int_0^1 x\,\mathrm{d}g$?

в) Одредити норму $\|\varphi\|$.

3.22. Нека је $\varphi(x)=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}g(t)$ ограничен линеаран функционал на $C[a,b]$. Показати да је g растућа (тј. да је одговарајућа Лебег-Стилтјесова мера позитивна) ако и само ако φ има својство да је $\varphi(x)\geq 0$ за све x за које је $\forall t,\ x(t)\geq 0$. [За тежи смер: непрекидне су густе у L^1, па применити интеграл на χ_E.]

3.23. Нека је $\varphi\in C[a,b]^*$. Доказати да је φ мултипликативан (тј. да је $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ ако и само ако је облика $\varphi(x)=x(t)$ за неко $t\in[a,b]$. [За тежи смер: ако постоје дисјунктни скупови A и B тдј. $\lambda_g(A)$, $\lambda_g(B)\neq 0$ конструисати функције x и y које обарају мултипликативност. Одатле закључити да је λ_g атомарна мера, тј. да је $\lambda_g([a,b]\setminus\{t\})=0$.]

3.24. Нека је X рефлексиван Банахов простор, и нека је $\varphi\in X^*$. Доказатио да постоји $x\in X$, такво да је $\|x\|=1$ и $\varphi(x)=\|\varphi\|$. [Према првој последици Хан-Банахове теореме наћи одговарајуће $\Lambda\in X^{**}$, а затим на основу рефлексивности x, тдј. $\Lambda=\Lambda_x$.]

3.25. Нека је X рефлексиван Банахов простор, и нека је $T\subseteq X^*$. Доказати да је $(T_\circ)^\circ=\overline{\mathscr{L}in(T)}$. [Искористити $(T^\circ)_\circ=\overline{\mathscr{L}in(T)}$ и $X^{**}\cong X$.]

3.26. Нека је $H=\mathrm{C}^n$ коначно димензионалан Хилбертов простор са скаларним производом

$$\langle x,y\rangle=\langle(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n),(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)\rangle=\xi_1\overline{\eta}_1+\xi_2\overline{\eta}_2+\dots+\xi_n\overline{\eta}_n,$$

и нека је $A:H\to H$ линеарно пресликавање са матрицом $[\alpha_{ij}]_{i=1,\,j=1}^{n\quad n}$. Доказати да адјунговано пресликавање A^* има матрицу $[\overline{\alpha}_{ji}]_{i=1,\,j=1}^{n\quad n}$, тј. да је матрица адјунгованог оператора транспонована матрица којој су сви чланови комплексно конјуговани.

3.27. Нека је $A:C[0,1]\to C[0,1]$ дато са $y=Ax$,

$$y(s)=\int_0^1 x(t)\sin(st)\,\mathrm{d}t.$$

а) Доказати да је A линеаран, ограничен и оценити норму.

б) Одредити конјугован оператор $A^*:NBV[0,1]\to NBV[0,1]$.

в) Користећи теорему Арцела-Асколија, доказати да је слика јединичне лопте $\{Ax\mid\|x\|\leq 1\}$ релативно компактан скуп.

3.28. Нека је $A:l^1\to L^p(0,1)$, $1<p<+\infty$ дато са $y=Ax$,

$$y(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\xi_k t^k,\qquad x=(\xi_0,\xi_1,\dots).$$

а) Доказати да је A линеаран, ограничен и оценити норму.

б) Одредити конјугован оператор $A^*:L^q(0,1)\to l^\infty$.

в) Мења ли се шта, ако је $p = +\infty$?

3.29. Нека је $\delta > 0$. Дато је пресликавање $T : l^2 \to l^2$ са $Tx = y$,

$$\eta_n = \frac{1}{n^{1+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad x = (\xi_k)_{k \geq 1}, y = (\eta_k)_{k \geq 1}.$$

а) Доказати да је T линеаран, ограничен и оценити норму.
б) Одредити адјугован оператор T^*.

3.30. Дато је пресликавање $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ са $Tx = y$,

$$y(t) = g(t)x(t).$$

а) Доказати да је T линеаран, ограничен и оценити норму.
б) Одредити адјугован оператор T^*.
в) Доказати да је $T = T^*$ ако и само ако $g(t) \in \mathrm{R}$ скоро свуда у односу на меру Лебега.

3.31. Дато је пресликавање $A : C[0,1] \to C[0,1]$ са $Ax(s) = x(s) + \int_0^s \sin(s+t)x(t)\,\mathrm{d}t$.
а) Доказати да је реч о ограниченом линеарном пресликавању, чија норма не превазилази 2.
б) Одредити конјуговани оператор $A^* : NBV[0,1] \to NBV[0,1]$.

3.32. На Хилбертовом простору l^2 са уобичајеним скаларним производом дат је оператор $U : l^2 \to l^2$, са $U(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots) = (\xi_2, \xi_4, \xi_6, \dots)$.
а) Одредити адјунгован оператор U^*.
б) Доказати да опратор U није $1-1$, али да јесте „на“.

3.33. На Хилбертовом простору $L^2(0, +\infty)$ дато је пресликавање $Tf(x) = f(x+1)$.
а) Одредити адјунгован оператор T^*.
б) Испитати да ли важи $TT^* = T^*T$.

3.34. Нека је $\alpha > 0$, $p > 1$ и $1/p + 1/q = 1$. Формулом $\eta_n = n^{-\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t)\,\mathrm{d}t$, дато је пресликавање $A : L^p(0, +\infty) \to l^q$, $y = (\eta_n)_{n=1}^{+\infty} = Af$.
а) Доказати да је A линеаран и ограничен оператор.
б) Одредити конјугован оператор $A^* : l^{q*} \to L^p(0, +\infty)^*$.

3.35. Низу $(\xi_n) \in c_0$od делимо функцију f на следећи начин. $f(x) = n(n+1)(\xi_n - \xi_{n+1})x + (n+1)\xi_{n+1} - n\xi_n$, за $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$.
а) Показати да је функција f непрекидна на $(0,1]$, те да је тиме коректно задато пресликавање $A : c_0 \to C[0,1]$.
б) Доказати да је A ограничено линеарно пресликавање и одредити његову норму.
в) Наћи конјугован оператор $A^* : NBV[0,1] \to l^1$.

3.36. Дато је пресликавање $A : L^p(0,1) \to l^p$, помоћу $Ax = y$, $\eta_n = \frac{1}{n^2} \int_0^1 t^{n^2} x(t)\,\mathrm{d}t$. Доказати да је A линеаран и ограничен оператор и одредити A^*.

4. КОНВЕРГЕНЦИЈЕ

Категорије

4.1. Дефиниција. Нека је (M,d) метрички простор.

(а) За скуп $A\subseteq M$ кажемо да је *нигде густ* ако његово затворење нема унутрашњих тачака, тј. ако је $\operatorname{int}\overline{A}=\emptyset$. Очогледно је сваки подскуп нигде густог скупа такође нигде густ.

(б) За скуп $A\subseteq M$ кажемо да је *прве категорије* или *прве Берове*[1] *категорије* ако се може приказати као највише пребројива унија нигде густих скупова, тј. ако је $A=\bigcup_{n=1}^{+\infty}F_n$, где су F_n нигде густи скупови.

На пример, скуп рационалних бројева је прве категорије у метричком простору (R,d), где је $d(x,y)=|x-y|$ стандардна метрика. Заиста, скупови

$$F_n=\left\{\frac{k}{n}\mid k\in\mathrm{Z}\right\},\qquad n\in\mathrm{N}$$

су затворени и састоје се од изолованих тачака, па су нигде густи, а очито $\mathrm{Q}=\bigcup_{n=1}^{+\infty}F_n$.

Такође подскуп скупа прве категорије такође је прве категорије.

(в) За скуп $A\subseteq M$ кажемо да је *друге категорије* или *друге Берове категорије* ако није прве категорије.

4.2. Теорема (Берова о категоријама). *Нека је (M,d) комплетан метрички простор. Тада је M друге (Берове) категорије у самом себи.*

Доказ. Претпоставимо супротно, да је

$$M=\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n,\tag{1}$$

---

[1] René-Louis Baire (1874-1932) – француски математичар

где су A_n нигде густи скупови. Како је за свако n, $A_n \subseteq \overline{A}_n$, то је онда и $M = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{A}_n$, при чему сви скупови $\overline{A}_n$ имају празну унутрашњост, тј. не садрже ни једну отворену лопту.

Формирамо индуктивно, низ тачака x_n и низ бројева $r_n > 0$ тако да важи

$$B(x_n; r_n) \subseteq B(x_{n-1}; r_{n-1}/2) \cap \overline{A}_n^C \tag{2}$$

на следећи начин.

Нека је $x_1 \in \overline{A}_1^C$ произвољно. (Такво x_1 постоји, јер $\overline{A}_1$ има празну унутрашњост, па је сигурно $\overline{A}_1 \subsetneqq M$.) Како је $\overline{A}_1^C$ отворен (јер је комплемент затвореног) то постоји $r_1 > 0$ са својством $B(x_1; r_1) \subseteq \overline{A}_1^C$.

Како скуп $\overline{A}_2$ не садржи ниједну лопту, то не може бити $B(x_1; r_1/2) \subseteq \overline{A}_2$, па постоји $x_2 \in B(x_1; r_1/2)$, $x_2 \in \overline{A}_2^C$. Даље, скуп $B(x_1; r_1/2) \cap \overline{A}_2^C$ је отворен, као пресек два отворена, па постоји $r_2 > 0$ са својством $B(x_2; r_2) \subseteq B(x_1; r_1/2) \cap \overline{A}_2^C$.

!!!СЛИКА!!!

Поступак настављамо индуктивно. Нека су $x_1, \dots, x_n$ и $r_1, \dots, r_n$ већ одређени. Скуп $\overline{A}_{n+1}^C$ има празну унутрашњост па не може бити $B(x_n; r_n/2) \subseteq \overline{A}_{n+1}$, па постоји $x_{n+1} \in B(x_n; r_n/2)$, $x_n \in \overline{A}_{n+1}^C$. С обзиром да је $B(x_n; r_n/2) \cap \overline{A}_{n+1}^C$ отворен, то постоји r_{n+1} тако да је $B(x_{n+1}; r_{n+1}) \subseteq B(x_n; r_n/2) \cap \overline{A}_{n+1}^C$. Овиме је конструкција низова x_n и r_n завршена.

Из услова (2) непосредно излази $r_n < r_{n-1}/2$, одакле једноставно закључујемо да r_n опадајуће тежи ка нули. Такође из (2) имамо и да за $m > n$ важи

$$B(x_m; r_m) \subseteq B(x_n; r_n/2),$$

па је посебно $x_m \in B(x_n; r_n/2)$, тј.

$$d(x_m, x_n) < r_n/2 \tag{3}$$

што се може учинити мањим од произвољног унапред задатог $\varepsilon > 0$ за довољно велике m, n. Дакле, низ x_n је Кошијев низ, па конвергира, јер је M комплетан. Означимо његов лимес са x.

Нека је $n \in \mathrm{N}$ произвољно. Проласком лимесом кад $m \to +\infty$ у (3) налазимо да је $d(x, x_n) \le r_n/2 < r_n$, тј. $x \in B(x_n; r_n)$. Због (2) онда имамо и $x \in \overline{A}_n^C$. Отуда $x \notin A_n$ ни за једно $n \in \mathrm{N}$. То се, међутим противи једнакости (1). ☐

Дакле, скуп реалних бројева је друге категорије, за разлику од скупа рационалних бројева (у метричком простору (R, d)). Стога скупове прве категорије схватамо као мале скупове у комплетном метричком простору.

Наредни став је, у том смислу, посебно занимљив. У почетку се чини да непрекидност функције гарантује диференцијабилност бар негде. То је тако зато што у почетку радимо са елементарним функцијама које немају извод тек у по некој тачки. Када се први пут види, пример Вајерштрасове функције, функције која је непрекидна у свакој тачки, а нема извод ни у једној представља изненађење. Али, ... такве функције нису изузетак. Оне су правило...

4.3. Став. *Скуп D свих непрекидних функција које имају извод у бар једној тачки је скуп прве категорије у простору $C[a,b]$.*

Доказ. Нека је F_k, $k \in \mathrm{N}$ скуп свих функција $x \in C[a,b]$ за које постоји $t \in [a,b]$ тако да је

$$\left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \right| \leq k \tag{4}$$

за све $h \in \mathrm{R}$ за које наведени израз има смисла. Ако је x диференцијабилна у некој тачки t онда постоји гранична вредност количника под модулом у (4), па је тај количник ограничен за h блиско нули, нпр. за $|h| < h_0$. Фукција x је и непрекидна на $[a,b]$ и тиме огрнаичена, нпр. $|x(t)| \leq M$ и тада за $|h| \geq h_0$ имамо $|(f(t+h)-f(t))/h| \leq 2M/h_0$. Дакле постоји $k \in \mathrm{N}$ такво да (4) важи за све h, тј. $x \in F_k$ за неко k и отуда

$$D \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k.$$

Стога је довољно доказати да су скупови F_k нигде густи, јер је онда D подскуп скупа прве категорије, па је и сам такав.

Докажимо прво да је скуп F_k затворен. Нека је $F_k \ni x_n \to x$, тј. $x_n \rightrightarrows x$, и нека је $t_n \in [a,b]$ тачка у којој функција x_n испуњава услов (4). Низ t_n има конвергентан подниз који ћемо да не би компликовали ознаке такође означити са t_n. Нека је његов лимес једнак t. Тада је

$$\begin{aligned} \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \right| \leq \left| \frac{x(t+h)-x(t_n+h)}{h} \right| + \left| \frac{x(t_n+h)-x_n(t_n+h)}{h} \right| + \\ + \left| \frac{x_n(t_n+h)-x_n(t_n)}{h} \right| + \left| \frac{x_n(t_n)-x(t_n)}{h} \right| + \left| \frac{x(t_n)-x(t)}{h} \right|. \end{aligned} \tag{5}$$

Ако је $\varepsilon > 0$ дато, онда се због непрекидности функције x први и последњи сабирак у (5) може учинити мањим од $\varepsilon/4$ за n довољно велико. И други и четврти сабирак се могу учинити мањим од $\varepsilon/4$ јер x_n равномерно конвергира ка x. Најзад, трећи сабирак је мањи од k, јер $x_n \in F_k$. Тако је

$$\left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \right| \leq k+\varepsilon, \quad \text{тј.} \quad \left| \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \right| \leq k,$$

јер ε може бити произвољно мало. Тако су сви скупови F_k затворени.

Да би доказали да F_k има празну унутрашњост довољно је доказати да је његов комплемент F_k^C свуда густ. (Наиме, тада је $\operatorname{int} F_k = \left(\overline{F_k^C}\right)^C = C[a,b]^C = \emptyset$.) Другим речима треба доказати да се свака функција $x \in C[a,b]$ може равномерно апроксимирати функцијама из F_k^C.

За дату $x \in C[a,b]$ и дато $\varepsilon >$ уочимо $\delta > 0$ одређено условом равномерне непрекидности, тј. такво да из $|s-t| < \delta$ следује $|x(s)-x(t)| < \varepsilon/4$. Затим уочимо поделу $\mathscr{P} : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ интервала $[a,b]$ чији је параметар мањи од δ. Тада је за све $1 \leq j \leq n$, $|x(t_j)-x(t_{j-1})| < \varepsilon/4$.

Конструисаћемо, део по део линеарну функцију y такву да је $y(t_j) = x(t_j)$ за све j, $|x(t)-y(t)| < \varepsilon$ за све $t \in [a,b]$ и такву да је коефицијент правца сваког дела већи од k. Слика која следи би требало да увери читаоца да је то могуће.

!!!СЛИКА!!!

Ако се нисте уверили ево конкретне конструкције. Посматрајмо функцију $\psi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $\psi(x) = d(x, \mathrm{Z})$, тзв. „тестеру“. (Видети слику ????) Та функција је линеарна у интервалима облика $[n/2, (n+1)/2]$, $n \in \mathrm{Z}$ са коефинцијентом правца ± 1. Стога за свако $t \in \mathrm{R}$ постоји $\eta > 0$ такво да важи

$$|s-t| < \eta \quad \Rightarrow \quad \psi(t) - \psi(s) = \pm(t-s). \tag{6}$$

За $t \in [t_{k-1}, t_k]$ ставимо

$$y(t) = x(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(x(t_j) - x(t_{j-1})) + \varepsilon\psi\left(n\frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right), \tag{7}$$

где је n природан број који ћемо накнадно одредити. (При чему различити индекси j могу имати различите n-ове.)

Једноставном заменом $t = t_j$, $t = t_{j-1}$ налазимо $y(t_j) = x(t_j)$, као и $y(t_{j-1}) = x(t_{j-1})$ што значи да је y коректно дефинисана. (Парчићи функције y на подеоним интервалима $[t_{j-1}, t_j]$ су добро „залепљени“.)

Оцењујемо разлику између фунцкија x и y. За $t \in [t_{j-1}, t_j]$ на основу (7) добијамо

$$y(t) - x(t) = x(t_{j-1}) - x(t) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(x(t_j) - x(t_{j-1})) + \varepsilon\psi\left(n\frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right).$$

Како је $0 \le \psi \le 1/2$, последњи сабирак у претходној формули по модулу не превазилази $\varepsilon/2$. На основу избора поделе (t и t_{j-1} су на растојању мањем од δ), разлика $x(t_{j-1}) - x(t)$ је по модулу строго мања од $\varepsilon/4$. Из истих разлога је и $|x(t_j) - x(t_{j-1})| < \varepsilon/4$, па како је

$$0 \le \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \le 1,$$

имамо

$$|y(t) - x(t)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Дакле, $\|y - x\| < \varepsilon$.

Доказујемо сада да $y \notin F_k$. Нека је t произвољно, и нека је j индекс за који $t \in [t_{j-1}, t_j]$. Тада за s блиско броју t, на основу (7), имамо

$$y(s) - y(t) = \frac{s-t}{t_j - t_{j-1}}(x(t_j) - x(t_{j-1})) + \varepsilon\left(\psi\left(n\frac{s - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right) - \psi\left(n\frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)\right).$$

Због (6) имамо

$$\varepsilon\left(\psi\left(n\frac{s - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right) - \psi\left(n\frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\right)\right) = \pm\varepsilon n\frac{s-t}{t_j - t_{j-1}},$$

па је стога

$$\frac{y(s) - y(t)}{s-t} = \frac{x(t_j) - x(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \pm \frac{\varepsilon n}{t_j - t_{j-1}},$$

а то ће бити по модулу строго веће од k кад год је n довољно велико – прецизније кад год је

$$n > \frac{k(t_j - t_{j-1}) + |x(t_j) - x(t_{j-1})|}{\varepsilon}.$$

□

Банах-Штајнхаусова[1] теорема

4.4. Фундаменталан скуп. Нека је X Банахов простор. За његов подскуп S кажемо да је *фундаментлан* ако је његов линеарни омотач густ у X, тј. ако је $\overline{\mathscr{L}in(S)} = X$.

Фундаменталан скуп је замена за појам генераторског скупа. Фундаменталан скуп није генераторски у правом смислу речи. Наиме, није сваки вектор из X леинарна комбинација вектора из S, већ је једнак граничној вредности низа линеарних комбинација вектора из S.

Једноставно се проверава да је S фундаменталан ако и само ако за сваки функционал $\varphi \in X^*$ важи

$$\varphi(x) = 0 \text{ за све } x \in S \Rightarrow \varphi \equiv 0. \tag{8}$$

Другим речима, S је фундаменталан ако је његов анихилатор $S^\circ = \{0\}$. Заиста, то следи из једнакости $(S^\circ)_\circ = \overline{\mathscr{L}in(S)}$ која важи без обзира на то какав је скуп S. Заиста, ако важи (8), тј. ако је $S^\circ = \{0\}$, онда је $\overline{\mathscr{L}in(S)} = (S^\circ)_\circ = \{0\}_\circ = X$. Обратно, ако је S фундаменталан, онда је $(S^\circ)_\circ = X$, и одатле $S^\circ = \{0\}$, тј. (8).

На пример, скуп вектора $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (јединица на n-том месту) је фундаменталан у сваком од простора l^p, $1 \le p < +\infty$, c_0. Показаћемо да важи (8). Произвољан функционал на сваком од поменутих простора има облик

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \eta_k, \quad \text{одакле је} \quad 0 = \varphi(e_n) = \eta_n,$$

па је $\eta_n = 0$, тј. $\varphi \equiv 0$.

Као други пример, скуп карактеристичних функција $\chi_{(\alpha,\beta)}$, где је $a \le \alpha < \beta \le b$ је фундаменталан у простору $L^p(a,b)$. Заиста, прозивољан функционал $\varphi \in L^p(a,b)^*$ има облик $\varphi(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,\mathrm{d}t$ за неко $y \in L^q(a,b)$. Ако је $\varphi(\chi_{(\alpha,\beta)}) = 0$ за сваку карактеристичну функцију интервала, онда је

$$\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{за све } a \le \alpha < \beta < b,$$

одакле једноставно закључујемо да је $y(t) \equiv 0$ на основу теореме о анихилацији интеграла.

То се може установити и непосредно, без позивања на дуалност. Заиста, скуп непрекидних функција је свуда густ у $L^1(a,b)$, а свака непрекидна функција се може равномерно апроксимирати коначним линеарним комбинацијама карактеристичних интервала (како што видели у доказу репрезентације простора $C[a,b]^*$), а тиме и у L^p норми (јер је $\|x\|_p \le (b-a)^{1/p}\|x\|_{\max}$).

4.5. Став (принцип конвергенције). *Нека су X и Y Банахови простори и нека је $A_n : X \longrightarrow Y$ низ ограничених линерних оператора такав да важи*

(i) $M = \sup\limits_{n\ge1} \|A_n\| < +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n x$ *постоји за све $x \in S$, где је S неки фундаментлан скуп.*

---

[1] Hugo Steinhaus (1887-1972) – пољски математичар

Тада низ $A_n x$ *конвергира за свако* $x \in X$, *гранична вредност*

$$Ax = \lim_{n\to+\infty} A_n x$$

је ограничен линеаран оператор, и важи $||A|| \leq M$.

Доказ. Како је лимес линеарне комбинације, линеарна комбинација лимеса, то $\lim_{n\to+\infty} A_n x$ постоји и за све $x \in \mathscr{L}in(S)$. Сада да пређемо на затворење.

Нека је $x \in X$ произвољно, и $\varepsilon > 0$ дато. Тада постоји $y \in \mathscr{L}in(S)$ такво да је $||x-y|| < \varepsilon/4M$, и тада

$$\begin{aligned}||A_m x - A_n x|| &\leq ||A_m x - A_m y|| + ||A_m y - A_n y|| + ||A_n y - A_n x|| \leq \\ &\leq 2M||x-y|| + ||A_m y - A_n y|| \leq \frac{\varepsilon}{2} + ||A_m y - A_n y||.\end{aligned} \tag{9}$$

Како је низ $A_n y$ конвергентан, он је и Кошијев, па се последњи сабирак у (9) може учинити мањим од $\varepsilon/2$ за m, n довољно велике. Отуда је и низ $A_n x$ Кошијев, и тиме конвергентан, јер је Y комплетан.

Како је лимес сагласан са линеарним комбинацијама, одмах закључујемо да је $Ax := \lim_{n\to+\infty} A_n x$ линеарно пресликавање. Да је ограничено видимо ако на неједнакост

$$||A_n x|| \leq ||A_n||\,||x|| \leq M||x||$$

делујемо лимесом кад $n \to +\infty$. Одатле је и $||A|| \leq M = \sup_{n\geq 1}||A_n||$. ☐

Приметимо да је у доказу коришћена само комплетност простора Y, а не и X. Услови (i) и (ii) су дакле довољни за конвергенцију низа оператора тачка по тачка. Да је услов (ii) потребан види се одмах, што се не може унапред рећи за услов (i). Међутим, и он је потребан, што тврди:

4.6. Став (принцип униформне ограничености). *Нека су* X *и* Y *Банахови простори, нека је* $A_\gamma : X \to Y$, $\gamma \in \Gamma$ *нека фамилија ограничених линеарних оператора таква да је*

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} ||A_\gamma|| = +\infty. \tag{10}$$

Тада постоји $x \in X$ *такав да је*

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} ||A_\gamma x|| = +\infty.$$

Другим речима, ако је фамилија норми неограничена, онда се та неограниченост види на неком конкретном вектору x. Употребом контрапозиције, закључујемо да ако $A_n x$ конвергира за сваки вектор $x \in X$, онда низ $||A_n x||$ мора бити ограничен за свако $x \in X$, па је онда и низ $||A_n||$ ограничен.

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да за све $x \in X$ важи $\sup_{\gamma\in\Gamma}||A_\gamma x|| < +\infty$ и уочимо скупове F_k дате са

$$F_k = \{x \in X \mid \sup_{\gamma\in\Gamma} ||A_\gamma x|| \leq k\}.$$

Према нашој претпоставци, важи $X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k$, па како је X комплетан и тиме друге категорије, бар један од скупова F_k није нигде густ, односно за бар једно k скуп $\overline{F}_k$ има непразну унутрашњост.

Међутим, сви скупови F_k су затворени. Заиста, ако $F_k \ni x_n \to x$, онда за произвољно фиксирано γ важи и $A_\gamma x_n \to A_\gamma x$, па је

$$||A_\gamma x|| \leq ||A_\gamma x_n|| + ||A_\gamma x - A_\gamma x_n|| \leq k + ||A_\gamma x_n - A_\gamma x|| \to k, \qquad k \to +\infty,$$

а како је γ било произвољно то $x \in F_k$. Према томе постоји лопта $B(x;\delta) \subseteq F_k$. Ову лопту ћемо једном транслацијом и једном хомотетијом довести на место јединчне лопте. Важи, наиме, $B(x;\delta) = x + \delta B(0;1)$. Другим речима, ако је $||y|| < 1$, онда $x + \delta y \in B(x;\delta)$ па из $y = (x + \delta y)/\delta - x/\delta$ налазимо

$$||A_\gamma y|| \leq \frac{1}{\delta}(||A_\gamma(x + \delta y)|| + ||A_\gamma x||) \leq \frac{2k}{\delta}.$$

Када узмемо супремум по свим $||y|| < 1$ добијамо $||A_\gamma|| \leq 2k/\delta$, а како је γ било произвољно, добијамо и $\sup_\gamma ||A_\gamma|| \leq 2k\delta$ што је у супротности са (10). ☐

Приметимо да у доказу принципа униформне ограничености користимо само комплетност простора X, а не и Y. Принцип конвергенције и принцип униформне ограничености се заједно исказују ка Банах Штајнхаусова теорема.

4.7. Теорема (Банах-Штајнхаус). *Нека су X и Y Банахови простори и $A_n : X \to Y$ низ ограничених линеарних оператора. Да би гранична вредност*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n x \tag{11}$$

постојала за све $x \in X$ потребно је и довољно да важи:

(i) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||A_n|| < +\infty$;

(ii) *гранична вредност (11) постоји за све $x \in S$, где је S неки фундаментalан скуп.*

Доказ. Директан смер следи из принципа униформне ограничености, а обратан из принципа конвергенције. ☐

Примене Банах-Штајнаусове теореме

4.8. Перманентан поступак конвергенције. Сваки конвергентан низ је ограничен, али није сваки ограничен низ конвергентан. Ипак, повремено желимо и да неким (неодређено) дивергентним низовима придружимо неки број који би могао у одређеном смислу да имитира граничну вредност. Рецимо, познато је да важи импликација

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \gamma \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \gamma, \tag{12}$$

али да обратно није тачно. Постоје, дакле, дивергентни низови чији низ аритметичких средина конвергира. Такав један низ је $(-1)^n$; он је дивергентан, али низ његових аритемтичких средина конвергира ка нули.

Зато кажемо да низ реалних бројева x_n конвергира у *Ћезаровом*[1] смислу ка броју γ ако $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n \to \gamma$. Ћезарова конвергенција је уопштење обичне,

---

[1] Ernesto Cesàro (1859-1906) – Талијански математичар

тј. ако низ x_n у обичном смислу конвергира ка γ онда конвергира истом броју и у Ћезаровом смислу. То тврди импликација (12).

Ћезарова конвергенција показала се корисна приликом изучавања Фуријеових редова. Иако постоје непрекидне функције чији Фуријеов ред дивергира, он увек равномерно конвергира полазној функцији у Ћезаровом смислу. То тврди позната Фејерова[1] теорема.

Но, може се ићи и даље са уопштавањем. Узмемо аритметичке средине низа аритметичких средина низа x_n. Због импликације (12) добићемо још општији поступак конвергенције. Такву конвергенцију називамо C_2-конвергенција, за разлику од „обичне“ Ћезарове коју означавамо са C_1. Средине у C_2 смислу се преко основног низа x_n изражавају као

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}x_j=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j}+\frac{1}{j+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x_j.$$

Наравно можемо ићи још даље, па дефинисати C_3, C_4 итд. конвергенције.

Још општије, за дату бесконачну матрицу бројева $A=\alpha_{nk}$, n, $k\geq 1$ дефинишемо поступак конвергенције на следећи начин. Кажемо да низ x_n A-конвергира ка γ ако је

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_{nk}x_k=\gamma, \qquad \text{ознака } A-\lim_{n\to+\infty}x_n=\gamma. \tag{13}$$

Тако је C_1-поступак одређен матрицом бројева $\alpha_{nk}=1/k$ за $k\leq n$, односно $\alpha_{nk}=0$, за $k>n$, а C_2 поступак са $\alpha_{nk}=(1/k+1/(k+1)+\cdots+1/n)/n$ за $k\leq n$, односно $\alpha_{nk}=0$ за $k>n$.

Кажемо да је A-поступак конвергенције *перманентан* ако важи импликација

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\gamma\Rightarrow A-\lim_{n\to+\infty}x_n=\gamma, \tag{14}$$

тј. ако се новим поступком не кваре већ конвергентни низови.

Наредни Теплицов[2] став даје потребне и довољне услова да A-поступак конвергенције буде перманентан.

4.9. Став (Теплиц). *Поступак конвергенције (13) задат матрицом* $A=[\alpha_{nk}]_{n,k=1}^{+\infty}$ *је перманентан ако и само ако важи:*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_{nk}=0$, *за све* $k\geq 1$;

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\alpha_{nk}=1$;

(iii) $\sup\limits_{n\geq 1}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|\alpha_{nk}|<+\infty$.

Доказ. На Банаховом простору свих конвергентних низова c посматрамо низ функционала $\varphi_n : c\to\mathbb{C}$ дат са

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_{nk}\xi_k, \qquad x=(\xi_k)_{k=1}^{+\infty}.$$

---

[1] Lipót Fejér (1880-1959) – мађарско јеврејски математичар

[2] Otto Töplitz (1881-1940) – немачко-јеврејски математичар

Због репрезентације дуалног простора $c^* \cong l^1$, функционали φ_n су линеарни, ограничени и важи

$$||\varphi_n|| = \sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_{nk}|, \tag{15}$$

што је коначно због услова (iii). Упоредо са њима, посматрамо и функционал $\psi : c \to \mathbb{C}$ дат са

$$\psi(x) = \lim_{n\to+\infty} \xi_k, \qquad x = (\xi_k)_{k=1}^{+\infty},$$

за који такође знамо да је норме једнаке 1. Оно што треба да докажемо је да за свако $x \in c$ важи

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \psi(x), \qquad \text{за све } x \in c. \tag{16}$$

Прво ћемо пронаћи погодан фундаменталан скуп. Реч је о векторима облика $e_n = (0,0,\dots,0,1,0,\dots)$, где је јединица на n-том месту, којима је придружен и вектор $e = (1,1,\dots,1,\dots)$ који се састоји само од јединица. Докажимо да је тај систем вектора фундаменталан.

Ако $x = (\xi_k) \in c$, и $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \xi_n$, важи $\sup_{k>n} |\xi_k - \gamma| \to 0$, па имамо

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \gamma) e_k - \gamma e \right\| = ||(0,0,\dots,0,\xi_{n+1}-\gamma,\xi_{n+2}-\gamma,\dots)|| = \sup_{k>n} |\xi_k - \gamma| \to 0, \quad n \to +\infty,$$

односно

$$x = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (\xi_k - \gamma) e_k + \gamma e \right),$$

што доказује да је одабрани систем фундаменталан.

Приметимо да је

$$\varphi_n(e_k) = \alpha_{nk}, \qquad \psi(e_k) = 0,$$

као и

$$\varphi_n(e) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{nk}, \qquad \psi(e) = 1,$$

па је услов (16) примењен на векторе e_k, $k \geq 1$ еквивалентан првом услову у исказу става, а примењен на вектор e еквивалентан је другом услову става. Најзад трећи услов је због (15) еквивалентан са $\sup ||\varphi_n|| < +\infty$, па закључак изводимо на основу Банах Штајнхаусове теореме. ☐

На овом месту вреди поменути да постоји разуман начин да сваком ограниченом низу доделимо број који би могао да представља замену за граничну вредност. Да такав поступак постоји доказаћемо помоћу Хан-Банахове теореме. Доказ не почива на Банах-Штајнхаусовој теореми, и нажалост није конструктиван, па иако знамо да тако нешто постоји немамо начина да ефективно израчунамо.

4.10. Став (Банахов лимес). *Постоји функционал* $\Lambda : l^\infty_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}$ *(*$l^\infty_{\mathbb{R}}$ *је простор* реалних *ограничених низова са* sup*-нормом) са следећим својствима:*

(i) Λ *је линеаран;*

(ii) *За свако* $x = (\xi_k)_{k=1}^{+\infty}$ *важи* $\liminf_{n\to+\infty} \xi_n \leq \Lambda(x) \leq \limsup_{n\to+\infty} \xi_n$*;*

(iii) $\Lambda(Sx)=\Lambda(x)$, *где је* $S:l^\infty_{\mathbb{R}}\to l^\infty_{\mathbb{R}}$ *тзв. оператор помака,*

$$S(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\dots)=(\xi_2,\dots,\xi_n,\dots).$$

Краће, мада мање прецизно записано, $\Lambda(\xi_n)=\Lambda(\xi_{n-1})$.

Приметимо да из другог услова непосредно следи да је

$$\Lambda(x)=\lim_{n\to+\infty}\xi_n \qquad \text{за свако } x=(\xi_n)\in c. \tag{17}$$

Стога се функционал Λ назива *Банахов уопштени лимес*, и често се означава са glim.

Доказ. Због (17) мора бити $\Lambda(e)=1$, где је $e=(1,1,\dots,1,\dots)$. Такође из трећег услова става следује да је $\Lambda\equiv 0$ на слици оператора $I-S$. Заиста $\Lambda((I-S)x)=\Lambda(x)-\Lambda(Sx)=0$. Показаће се да су ова два својства довољна да одреде Λ. Дакле, план је дефинисати Λ на линеарном омотачу слике $\operatorname{ran}(I-S)$ и вектора e, а затим га продужити по Хан-Банаховој теореми.

У ту сврху треба израчунати $d(e,\operatorname{ran}(I-S))$. Нека $x-Sx\in\operatorname{ran}(I-S)$, $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)$. Низ $x-Sx$ на k-том месту има $\xi_k-\xi_{k+1}$. Како за свако k важи $-\|x\|\le\xi_k\le\|x\|$, и како је

$$\sum_{j=1}^{k}(\xi_j-\xi_{j+1})=\xi_1-\xi_{k+1}\ge\xi_1-\|x\|,$$

то је и

$$\sum_{j=1}^{k}(1+\xi_j-\xi_{j+1})\ge k+\xi_1-\|x\|.$$

Међутим, $1+\xi_j-\xi_{j+1}$ је општи члан низа $e+x-Sx$ и мањи је од $\|e+x-Sx\|$. Стога је

$$k\|e+x-Sx\|\ge k+\xi_1-\|x\|, \qquad \text{тј.} \qquad \|e+x-Sx\|\ge 1+\frac{\xi_1-\|x\|}{k}\to 1, \quad k\to+\infty.$$

Тако је $d(e,\operatorname{ran}(I-S))\ge 1$. Да важи и обратна неједнакост следи из $0\in\operatorname{ran}(I-S)$, па $d(e,\operatorname{ran}(I-S))\le\|e-0\|=1$.

Према четвртој последици Хан-Банахове теореме, постоји функционал $\Lambda\in(l^\infty)^*$, такав да је $\Lambda|_{\operatorname{ran}(I-S)}=0$, $\Lambda(e)=1$ и $\|\Lambda\|=1/d(e,\operatorname{ran}(I-S))=1$. Докажимо да је Λ тражени функционал.

Фукционал Λ је по дефиницији линеаран. Такође, за било које x, вектор $x-Sx\in\operatorname{ran}(I-S)$ па је $\Lambda(x-Sx)=0$. Стога остаје још да докажемо друго својство.

За почетак ћемо доказати да је $\Lambda(x)\ge 0$ кад год су сви чланови низа $x=(\xi_n)$ позитивни. Заиста, за такав низ x имамо $0\le\xi_n\le\|x\|=M$, за све n. Општи члан низа $Me-x$ једнак је $M-\xi_n$, и он припада интервалу $[0,M]=[0,\|x\|]$. Стога је $\|Me-x\|\le M$, па имамо

$$M-\Lambda(x)=\Lambda(Me-x)\le\|\Lambda\|\|Me-x\|\le M, \qquad \text{тј.} \qquad \Lambda(x)\ge 0.$$

Сада доказујемо друго својство. За $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in l^\infty$ је $S^nx=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\dots)$ и тиме $\|S^nx\|=\sup_{k>n}|\xi_k|=M$. Тако су сви чланови низа $Me-S^nx$ позитивни, па је

$$M-\Lambda(x)=\Lambda(Me-S^nx)\ge 0, \qquad \text{тј.} \qquad \Lambda(x)\le M=\sup_{k>n}|\xi_k|.$$

Узимајући инфимум по свим $n \geq 1$ добијамо $\Lambda(x) \leq \limsup \xi_n$. Одговарајућа неједнакост за доњи лимес се слично изводи. □

Иако претходна тврдња делује врло јако, Банхов уопштени лимес има своје недостатке. Прво, функционал Λ не мора да буде мултипликативан, тј. у општем случају може бити

$$\operatorname*{glim}_{n\to+\infty} \xi_n \eta_n \neq \operatorname*{glim}_{n\to+\infty} \xi_n \cdot \operatorname*{glim}_{n\to+\infty} \eta_n.$$

Друго доказ није конструктиван. Знамо да уопштени лимес постоји, али нисмо у могућности да га израчунамо.

Наредним ставовима примењујемо Банах-Штајнхаусову теорему на Фуријеове редове.

4.11. Став (Риман-Лебегова лема). *Нека је* $x \in L^1(-\pi,\pi)$. *Тада је*

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \textit{и} \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin\lambda t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Доказ. Доказаћемо само прву једнакост. Због Хајнеове теореме, довољно је ограничити се на поизвољан низ $\lambda_n \to +\infty$. Пресликавања

$$L^1(a,b) \ni x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos\lambda_n t\,\mathrm{d}t \in \mathrm{C}$$

су ограничена и линеарна. Означимо их са φ_n. Како је $L^1(-\pi,\pi)^* \cong L^\infty(-\pi,\pi)$ то је $||\varphi_n|| = ||\cos\lambda_n t||_\infty = 1$. Дакле, низ норми је униформно ограничен, па је на основу принципа конвергенције довољно доказати да $\varphi_n(x) \to 0$ за x из неког фундаменталног скупа.

Скуп карактеристичних функција интервала $\chi_{[\alpha,\beta]}$, $-\pi \leq \alpha < \beta \leq \pi$, чини фундаменталан скуп, а за $x = \chi_{[\alpha,\beta]}$ имамо

$$\varphi_n(\chi_{[\alpha,\beta]}) = \int_{\alpha}^{\beta} \cos\lambda_n t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\lambda_n}\sin\lambda_n\pi \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

Слично и за други лимес. □

4.12. Став. *Постоји непрекидна,* 2π*-периодична функција чији Фуријеов ред дивергира у тачки* 0.

Доказ. Подсетимо се, ако је $S_n(x;f)$ ознака за n-ту парцијалну суму Фуријеовог реда функције f у тачки x, онда је

$$S_n(x;f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)(x-t)}{\sin((x-t)/2)f(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Ако је $x = 0$ онда је

$$S_n(0;f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)} f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{18}$$

Представићемо израз (18) као низ огранчених функционала на згодно одабраном Банаховом простору. Ако је f непрекидна 2π периодична функција, онда је $f \in C[-\pi,\pi]$ и важи $f(-\pi) = f(\pi)$. И обратно, ако је $f \in C[-\pi,\pi]$ непрекидна, и ако важи $f(-\pi)=f(\pi)$ она се на јединствен начин продужује до непрекидне 2π-периодичне функције. Зато скуп непрекидних 2π-периодичних функција можемо поистоветити са подскупом скупа $C[-\pi,\pi]$

$$\tilde{C}[-\pi,\pi]:=\{f\in C[-\pi,\pi]\mid f(-\pi)=f(\pi)\}.$$

Како је пресликавање $f\mapsto f(\pi)-f(-\pi)=:\psi(f)$ линеарно и ограничено, то је $\tilde{C}[-\pi,\pi]=\ker\psi$ затворен линеаран потпростор, односно посматран сам за себе то је један Банахов простор.

Како је $\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t$ једна мера, и то апсолутно непрекидна у односу на Лебегову, то на основу репрезентације дуалног простора $C[-\pi,\pi]^*$ закључујемо да је изразом (18) дефинисан ограничен линеран функционал $S_n : C[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$, те да је његова норма једнака

$$\|S_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\right|\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Показаћемо да је низ норми (19) неограничен. Дакле, треба нам оцена одоздо. Због парности подинтегралне функције, можемо интеграл заменити двоструком вредношћу интеграла од 0 до π. Интервал $[0,\pi]$ изделимо на делове на којима функција $\sin(n+1/2)t$ има сталан знак. У питању су подеоне тачке, где се назначена функција анулира, тј. тачке $t_k=2k\pi/(2n+1)$, $0\le k\le n$. Тако је

$$\pi\|S_n\|=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\right|\mathrm{d}t+\int_{t_n}^{\pi}\left|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\right|\mathrm{d}t.$$

Последњи сабирак ћемо да занемаримо (треба нам оцена одоздо), а сабирке у суми означимо са A_k. Тада је, због сталности знака подинтегралне функције

$$\begin{aligned}A_k=\pm\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\,\mathrm{d}t\ge\pm\frac{1}{\sin(t_k/2)}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\sin(n+1/2)t\,\mathrm{d}t=\\=\frac{4}{(2n+1)\sin(t_k/2)}\ge\frac{8}{(2n+1)t_k},\end{aligned}$$

јер је на интервалу $[0,\pi]$ функција $t\mapsto\sin t/2$ опадајућа, и $\sin(t_k/2)\le t_k/2$. Како је $(2n+1)t_k=2k\pi$ то је

$$\pi\|S_n\|\ge\sum_{k=1}^{n}A_k\ge\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$$

а то је парцијална сума дивергентног реда.

Према томе $\sup_n\|S_n\|=+\infty$, па на основу принципа униформне ограничености постоји непрекидна 2π-периодична функција x таква да низ $S_n(x)$ дивергира. Низ $S_n(x)$ је, међутим, управо низ делимичних сума Фуријеовог реда у тачки 0. ☐

Слаба конвергенција

4.13. Дефиниција. Нека је $x_n\in X$, X Банахов простор. Кажемо да низ x_n *слабо конвергира* ка x ако за сваки функционал $\varphi\in X^*$ важи $\varphi(x_n)\to\varphi(x)$. То обележавамо на неки од следећих начина:

$$x_n \xrightarrow{w} x, \qquad x_n \rightharpoonup x, \qquad x = w - \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Слаби лимес је јединствен, односно није могуће да исти низ x_n слабо конвергира ка два различита вектора x и y. Заиста, у супротном би за сваки фунцкионал $\varphi \in X^*$ важило

$$\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \varphi(x_n) = \varphi(y),$$

што је противно другој последици Хан-Банахове теореме.

Уколико постоји опасност од забуне, конвергенцију у норми простора X називаћемо и *јака конвергенција* и означаваћемо са

$$x_n \xrightarrow{s} x \qquad \text{или} \qquad x = s - \lim_{n\to+\infty} x_n.$$

Дакле, јака конвергенција није никаква нова конвергенција него само начин да нагласимо да она није слаба.

Оправдање за употребу придева јака и слаба налазимо у следећој импликаици

$$x_n \xrightarrow{s} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x,$$

која непосредно следи из неједнакости $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| \le ||\varphi||\,||x_n - x||$.

Да обратно не важи показује следећи пример. Низ $e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ (јединица на n-том месту) слабо конвергира ка нули у простору l^p $(p > 1)$. Заиста, нека је $\varphi \in (l^p)^*$. На основу репрезентације дуалног простора постоји низ $y = (\eta_n) \in l^q$ такав да је

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \eta_k, \qquad \text{одакле је} \qquad \varphi(e_n) = \eta_n \to 0,$$

јер је $|\eta_n|^q$ општи члан конвергентног реда.

Дакле, $e_n \xrightarrow{w} 0$. Међутим нетачно је да $e_n \xrightarrow{s} 0$, јер је $||e_n - 0|| = 1 \not\to 0$. Штавише, тај низ нема ниједан Кошијев подниз.

Из истог примера видимо да из $x_n \xrightarrow{w} x$ не следи $||x_n|| \to x$. Међутим, ипак се нешто може рећи о низу норми слабо конвергентног низа.

4.14. Став. *Нека је X Банахов простор, и $x_n \in X$. Ако $x_n \xrightarrow{w} x$ онда:*

(а) *Низ норми $||x_n||$ је ограничен. Дакле, сваки слабо конвергентан низ је ограничен;*

(б) *Важи неједнакост $||x|| \le \liminf_{n\to+\infty} ||x_n||$ – норма није непрекидна у слабој конвергенцији, али је полунепрекидна одоздо.*

Доказ. (а) Низу x_n придружимо низ функционала $\Lambda_n \in X^{**}$ на стандардни начин

$$\Lambda_n(\varphi) = \varphi(x_n).$$

Чињеница да x_n слабо конвергира значи да лимес низа $\Lambda_n(\varphi)$ постоји за свако $\varphi \in X^*$. Према Банах-Штајнхаусовој теореми, то значи да је низ норми $||\Lambda_n||$ ограничен. Како је $||\Lambda_n|| = ||x_n||$, овај део је доказан.

(б) За било које $\varphi \in X^*$ имамо $|\varphi(x_n)| \le ||\varphi||\,||x_n||$, одакле је

$$|\varphi(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\varphi(x_n)| = \liminf_{n\to+\infty} |\varphi(x_n)| \le \liminf_{n\to+\infty} ||\varphi||\,||x_n||.$$

Како, међутим, знамо да је $||x|| = \sup|\varphi(x)|$ где се супремум узима по свим функционалима норме 1, то следи $||x|| \le \liminf ||x_n||$. ☐

Помоћу слабе конвергенције могу се описати ограничени оператори.

4.15. Став. *Линерано пресликавање $A : X \to Y$ између два Банахова простора је ограничено ако и само ако слабо конвергентне низове пресликава у слабо конвергентне, тј. ако за сваки низ x_n важи*

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Ax_n \xrightarrow{w} Ax. \tag{20}$$

Доказ. Нека је A ограничен, и нека $x_n \xrightarrow{w} x$, тј. $\varphi(x_n) \to \varphi$ за сваки ограничен функционал $\varphi \in X^*$.

Ако је $\psi \in Y^*$, онда је композиција $\psi \circ A$ ограничена, као композиција два огранчена пресликавања. Линеарност је очигледна. Тада $\psi(Ax_n) \to \psi(Ax)$, односно $Ax_n \xrightarrow{w} Ax$.

Претпоставимо сада да важи импликација (20) и докажимо да је A ограничен. Довољно је доказати непрекидност у нули. Стога претпоставимо да $x_n \to 0$ (јако), тј. да $||x_n|| \to 0$. Ако Ax_n не тежи ка нули, онда постоји подниз x_{n_k} и $\delta > 0$ тако да важи $||Ax_{n_k}|| > \delta$. Ако ставимо $y_k = x_{n_k}/||x_{n_k}||^{1/2}$ имаћемо $||y_k|| = ||x_{n_k}||^{1/2} \to 0$, односно $y_k \to 0$, док је с друге стране $||Ay_k|| = ||Ax_{n_k}||/||x_{n_k}||^{1/2} > \delta/||x_{n_k}||^{1/2} \to +\infty$ јер $||x_{n_k}|| \to 0$.

Укратко, ако A није ограничен, онда постоји низ y_k такав да истовремено важи

$$y_k \to 0, \qquad ||Ay_k|| \to +\infty.$$

Међутим, тада такође и $y_k \xrightarrow{w} 0$ одакле, на основу (20) закључујемо да $Ay_k \xrightarrow{w} 0$ одакле је на основу претходног става низ Ay_k ограничен, што чини контрадкцију. ☐

4.16. Став. *Нека је H Хилбертов простор. Тада низ $x_n \to x$ ако и само ако $x_n \xrightarrow{w} x$ и $||x_n|| \to ||x||$.*

Доказ. Директан смер је тривијалан. За обратан, имамо

$$||x_n - x||^2 = ||x_n||^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_n, x\rangle + ||x||^2.$$

Из чињенице да $||x_n|| \to ||x||$, први и трећи сабирак заједно конвергирају ка $2||x||^2$. С друге стране из чињенице да $x_n \xrightarrow{w} x$ закључујемо да $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = ||x||^2$, па други сабирак конвергира ка $-2||x||^2$, одакле $||x_n - x|| \to 0$. ☐

4.17. Став. *Низ функција $x_n \in C[a,b]$ слабо конвергира ка функцији x ако и само ако важи:*

(i) *Низ x_n је ограничен, тј. $||x_n|| = \max_{a\le t\le b}|x_n(t)| \le M$ за неко $M > 0$;*

(ii) *Низ x_n конвергира ка x тачка по тачка, тј. $\lim_{n\to+\infty} x_n(t) = x(t)$ за све $t \in [a,b]$.*

Доказ. Услов (i) је потребан на основу става 4.14 (a). Да је услов (ii) довољан уверићемо се посматрајући функционал израчунавања у тачки $C[a,b] \ni x \mapsto$

$x(t) = \varphi_t(x)$ за који једноставно утврђујемо да је линеаран и ограничен, јер $|\varphi_t(x)| = |x(t)| \leq ||x||$.

Нека важе услови (i) и (ii), и нека је $\psi \in C[a,b]^*$. Према Ставу о репрезентацији дуалног простора, ψ је облика

$$\psi(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\lambda_g(t),$$

за неку $g \in NBV[a,b]$. Отуда је

$$|\psi(x_n) - \psi(x)| = \left|\int_a^b (x_n(t) - x(t))\,\mathrm{d}\lambda_g(t)\right| \leq \int_a^b |x_n(t) - x(t)|\,\mathrm{d}|\lambda_g|(t).$$

Међутим, како је $|\lambda_g|([a,b]) < +\infty$ свака константна функција је интеграблна у односу на меру $|\lambda_g|$. Како је, још $|x_n(t) - x(t)| \leq ||x_n|| + ||x|| \leq 2M$, то можемо применити теорему о доминантној конвергенцији, па на основу услова (ii) имамо $\psi(x_n) \to \psi(x)$. □

Врсте конвергенције низа оператора

4.18. Дефиниција. Нека је дат низ $A_n \in L(X;Y)$, где су X и Y Банахови протори. Дефинишемо три различите врсте конвергенција овог низа

(i) Низ A_n *униформно* конвергира ка $A \in L(X;Y)$, ако $A_n \to A$ у норми простора $L(X;Y)$, тј. ако $||A_n - A|| \to 0$. То означавамо са

$$A_n \rightrightarrows A.$$

(ii) Низ A_n *јако* конвергира ка $A \in L(X;Y)$, ако за свако $x \in X$, $A_n x$ јако конвергира ка Ax у норми простора Y, тј. $||A_n x - Ax|| \to 0$. То означавамо са

$$A_n \xrightarrow{s} A, \qquad \text{или} \qquad A = s - \lim_{n\to+\infty} A_n.$$

(iii) Низ A_n *слабо* конвергира ка A ако за свако $x \in X$, низ $A_n x$ слабо конвергира ка Ax у простору Y. Другим речима, ако за све $x \in X$ и све $\varphi \in Y^*$ важи $\varphi(A_n x) \to \varphi(Ax)$. То означавамо са

$$A_n \rightharpoonup A \qquad \text{или} \qquad A_n \xrightarrow{w} A \qquad \text{или} \qquad A = w - \lim_{n\to+\infty} A_n.$$

Међу овим појмовима важе следеће импликације

$$A_n \rightrightarrows A \Rightarrow A_n \xrightarrow{s} A \Rightarrow A_n \xrightarrow{w} A.$$

То следи из неједнакости $||A_n x - Ax|| \leq ||A_n - A||\,||x||$, односно $|\varphi(A_n x) - \varphi(Ax)| \leq ||\varphi||\,||A_n x - Ax||$. Ни на једном месту не важи обрат. Видети, на пример вежбање 4.25.

Приметимо да Банах Штајнхаусова теорема даје потребне и довољне услове за јаку конвергенцију низа оператора. Посебно ако је A_n јако конвергентан низ, онда је низ норми $||A_n||$ ограничен.

Исто важи и за слабо конвергентне низове.

4.19. Став. *Ако је* $A_n \in L(X;Y)$ *слабо конвергентан низ, онда је низ норми* $\|A_n\|$ *ограничен.*

Доказ. За фиксирано x је низ $A_n x$ слабо конвергентан, па је према Ставу 4.14 (а) ограничен, тј. $\sup_n \|A_n x\| < +\infty$. Тада је према Банах-Штајнхаусовој теореми и низ $\|A_n\|$ ограничен. ☐

4.20. Став. *Нека је* H *Хилбертов простор. Тада су следећи услови еквивалентни.*

(i) *Низ* A_n *је слабо конвергентан;*
(ii) *За све* $x,\ y \in H$*, низ* $\langle A_n x, y\rangle$ *је конвергентан;*
(iii) *За све* $x \in H$*, низ* $\langle A_n x, x\rangle$ *је конвергентан.*

Доказ. Очигледно (ii) повлачи (i). Такође, еквиваленција између (i) и (ii) је последица Рисове теореме. Према њој, наиме, сваки функционал на H има облик $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$ за неко y, па је стога $\varphi(Ax) = \langle Ax, y\rangle$.

Остаје још да докажемо (iii) ⇒ (ii). То је међутим, последица поларизационог идентитета

$$\langle Ax, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle + \\ + i\langle A(x+iy), x+iy\rangle - i\langle A(x-iy), x-iy\rangle\big), \quad (21)$$

који се изводи на исти начин као и идентитет (4) главе 1. ☐

Вежбања

4.1. Доказати да $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\xi_{n+1}+\xi_{n+2}+\cdots+\xi_{2n}}{n}$ дефиниан један перманентан поступак конвергенције.

4.2. Нека је $f \in L^1(\mathrm{R})$. Доказати да се њена Фуријеова трансформација анулира у бесконачности, тј. да је $\displaystyle\lim_{\lambda\to\pm\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,\mathrm{d}t = 0$. [Посматрати низове $\lambda_n \to +\infty$, и функциоонале $\varphi_n(f) = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda_n t}\,\mathrm{d}t$, па применити принцип конвергенције.]

4.3. Доказати да ред $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n\eta_n$ конвергира за свако $x = (\xi_n) \in l^p$ ако и само ако $y = (\eta_n) \in l^q$, где је $1/p + 1/q = 1$. [За један смер Хелдерова неједнакост. За други смер уочити низ функционала $x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \xi_k\eta_k$ па применити принцип униформне ограничености.]

4.4. Дат је низ функционала $\varphi_n : C[0,1] \to \mathrm{C}$ са $\varphi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x(j/n)$.

а) Доказати да су φ_n линеарни и ограничени и одредити $\|\varphi_n\|$.

б) Доказати да за свако $x \in C[0,1]$ постоји $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)$ и одредити га.

4.5. Дат је низ функционала $\Lambda_n : L^p(0,+\infty) \to \mathrm{C}$ са $\Lambda_n(f) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+n^\alpha t)}{nt} f(t)\,\mathrm{d}t$, где је $\alpha > 0$.

а) Доказати да за $\alpha \le p$ важи $\lim_{n\to+\infty} \Lambda_n(f) = 0$, за све $f \in L^p(0,+\infty)$.

б) Доказати да за $\alpha > p$ постоји бар једна функција $f \in L^p(0,+\infty)$ таква да низ $\Lambda_n(f)$ дивергира.

4.6. а) На простору $L^q(0,1)$ $(q > 1)$ дат је низ функционала $\Lambda_n(x) = n^{1/p}\int_0^1 t^n x(t)\,\mathrm{d}t$, где је $1/p + 1/q = 1$. Доказати да су Λ_n ограничени линеарни функционали и да важи $\|\Lambda_n\| \le (1/p)^{1/p}$.

б) Доказати да низ функција $y_n(t) = n^{1/p} t^n$ слабо тежи ка нули у простору $L^p(0,1)$ $(p > 1)$.

4.7. Нека је $0 < h < 1/2$, и $A_h : L^1(0,1) \to L^1(0,1)$ оператор дат са $(A_h f)(x) = \frac{1}{h}\int_0^h (1-t/h) f(x+t)\,\mathrm{d}t$.

а) Доказати да је A_h линеаран ограничен оператор и да је $\|A_h\| \le 1/2$.

б) Доказати да $A_h f$ конвергира ка $(1/2)f$ кад $h \to 0^+$ по норми простора $L^1(0,1)$.

4.8. За $f \in L^1(-\pi,\pi)$ дефинишемо $\varphi_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{\sin t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

а) Доказати да су φ_n ограничени линеарни функционали на простору $L^1(-\pi,\pi)$.

б) Користећи Теорему Банаха Штајнхауса, или другачије, доказати да постоји интеграбилна на $(-\pi,\pi)$ функција f таква да низ $\varphi_n(f)$ дивергира.

4.9. Нека је φ периодична, есенцијално ограничена функција на R са периодом 1, и нека је $\Lambda_n : L(0,1) \to \mathrm{C}$, $\Lambda_n f = \int\limits_0^1 f(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t$.

а) Доказати да су Λ_n ограничени линеарни функционали на Банаховом простору $L^1(0,1)$ као и да постоји константа $M > 0$ таква да за све n важи $\|\Lambda_n\| \le M$.

б) Служећи се карактеристичним функцијама интервала и теоремом Банаха-Штајнхауса (или другачије) показати да низ Λ_n јако конвергира ка функционалу $\Lambda f = \int\limits_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

4.10. Дат је низ оператора $A_n : C[0,1] \to C[0,1]$ на следећи начин: $(A_n x)(t) = x(\sqrt[n]{t})$.

а) Доказати да је A_n ограничен линеаран оператор и израчунати $\|A_n\|$.

б) Испитати да ли за све $x \in C[0,1]$ постоји $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n x$, и ако постоји одредити шта је.

4.11. За дати нула низ a_k формирамо низ $b_n = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^n k a_k$.

а) За $\alpha \ge 1$, $b_n \to 0$ за све $(a_k) \in l^1$, а за $\alpha < 1$ постоји $(a_k) \in l^1$ тдј. $\limsup\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$.

б) За $\alpha \ge 2 - 1/p$, $b_n \to 0$ за све $(a_k) \in l^p$, а за $\alpha < 2 - 1/p$ постоји $(a_k) \in l^p$ тдј. $\limsup\limits_{n\to\infty} |b_n| = +\infty$.

в) Одредити за које α, $b_n \to 0$ за сваки нула низ $(a_k) \in c_0$.

4.12. Нека је $\alpha_n \in (0,1)$ такав да је $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$.

а) Показати да лимеси $\Lambda_1(f) = \lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ и $\Lambda_2(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\alpha_n}\int_{\alpha_n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ постоје за сваку непрекидну функцију f, и да представљају један исти ограничен, линеаран функционал на $C[0,1]$.

б) Одредити комплексну Борелову меру μ такву да је

$$\Lambda_1(f) = \Lambda_2(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}\mu(t). \tag{22}$$

в) Показати да постоји ограничен линеаран функционал $\Lambda : L^\infty(0,1) \to \mathrm{C}$, такав да је $\|\Lambda\| = 1$ и $\Lambda(f) = \Lambda_1(f)$ за f непрекидну. Да ли је тај функционал могуће задати са (22)?

4.13. Дат је скуп $A = \{e_m + m e_n \,|\, 1 \le m \le n\} \subset l^2$, и $A_1 = \overline{A}^{w,s}$ његово слабо секвенцијално затворење, то јест $A_1 = \{x \in l^2 \,|\, \exists x_j \in A, x = w - \lim\limits_{j\to+\infty} x_j\}$. Доказати да A_1 није слабо секвенцијално затворен, па одатле закључити да не постоји метрика која дефинише слабу конвергенцију.

4.14. Показати да низ функција $x_n(t) = \sin nt$ слабо конвергира у простору $L^p(0,2\pi)$ за $p > 1$. Да ли је то случај и за $p = 1$?

4.15. Абелове средине реда $\sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu$ дефинисане су са $A(r) = \sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} a_\nu r^\nu$ $(0 \le r < 1)$. Кажемо да је ред Абел збирљив ка s ако постоји $\lim\limits_{r\to1-0} A(r)$ и једнак је s.

а) Доказати да је низ s_n Абел збирљив ка s ако постоји $\lim\limits_{r\to1-0}(1-r)\sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} s_\nu r^\nu$ и једнак је s. $(s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu)$;

б) Показати да је Абелов поступак један перманентан поступак конвергенције (Теплицов став);

в) Нека је

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{+\infty}(a_\nu \cos\nu t + b_\nu \sin\nu t)$$

Фуријеов ред L^1-функције $x(t)$ (2π-периодичне). Показати да су Абелове средине реда (18) дате са

$$A(r,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(u)P(r,u-t)\,\mathrm{d}u, \tag{23}$$

где је $P(r,t)=\frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}$, као и да важи $\int\limits_0^{2\pi}|P(r,t)|\,\mathrm{d}t=\pi$;

г) За сваки бројни низ $r_n \to 1-0$ $(0 \le r_n \le 1)$ са (23) је дефинисан један низ ограничених линеарних оператора $A_n(x)=A(r_n,x)$ на простору $\tilde{C}[0,2\pi]$, непрекидних 2π-периодичних функција. Примењујући на овај низ оператора принцип конвергенције доказати да су Абелове средине Фуријеовог реда непрекидне и 2π-периодичне функције које конвергирају униформно по $t \in [0,2\pi]$ полазној функцији;

4.16. Доказати да Банахов лимес није мултипликативан. [Посмтрати низ $x=(1,0,1,0,1,0,\dots)\in l^\infty_{\mathrm{R}}$].

4.17. Доказати да постоји функционал $\Lambda : l^\infty_{\mathrm{R}} \to \mathrm{R}$ линеаран, мултипликативан, норме 1 и позитиван. Да ли за њега важи $\liminf x \le \Lambda(x) \le \limsup x$?

4.18. Нека је $(X,\mathfrak{M},\mu)$ простор са σ-коначном мером. Доказати да низ функција $x_n \in L^p(X,\mu)$ слабо конвергира ка x ако и само ако: (1) $\sup_n \|x_n\| < +\infty$; (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E x_n(t)\,\mathrm{d}\mu(t)=\int_E x(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$ за сваки мерљив скуп $E \in \mathfrak{M}$.

4.19. Нека је H Хилбертов простор.

а) Доказати да из $x_n \xrightarrow{w} x$ и $y_n \to y$ следи $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

б) Посматрајући низ $e_n \in l^2$ доказати да из $x_n \xrightarrow{w} x$ и $y_n \xrightarrow{w} y$ не мора да следи $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$.

4.20. Доказати да низ вектора $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\dots)$ слабо конвергира ка вектору $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)$ у простору l^p $(1<p<+\infty)$ ако и само ако: (1) $\sup_n\|x_n\|<+\infty$; (2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k$ за свако $k=1,2,\dots$.

4.21. Дати су оператори $T_t f(x)=f(x+t)$, $T_t : L^p(\mathrm{R}) \to L^p(\mathrm{R})$. Доказати да T_t јако тежи ка I кад $t \to 0^+$. Да ли је та конвергенција и униформна?

4.22. Доказати да низ функција $y_n(t)=n^{1/p}t^n$ слабо тежи ка нули у простору $L^p(0,1)$ $(p>1)$.

4.23. Дат је низ пресликавања $A_n : C[-1,1] \to C[-1,1]$, са $A_n f(x)=\int_{-1}^{x/n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

а) Доказати да су A_n ограничени линеарни оператори.

б) Показати да низ оператора A_n јако конвергира неком ограниченом линеарном оператору $A : C[-1,1] \to C[-1,1]$, и одредити оператор A.

в) Испитати да ли низ A_n униформно (т.ј. по норми простора $L(C[-1,1])$) конвергира ка оператору A.

4.24. Дат је оператор $A : C[0,1/2] \to C[0,1/2]$ са $Ax(t)=x(t^2)$. Испитати да ли низ оператора A^n конвергира слабо, јако, односно униформно.

4.25. Нека је $A : l^2 \to l^2$ оператор задат са $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots)=(0,\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots)$.

а) Доказати да низ оператора A^n слабо тежи ка нули, али не и јако.

б) Доказати да низ оператора A^{*n} јако тежи ка нули, али не и униформно.

4.26. Нека низ оператора A_n јако конвергира ка A, и нека низ вектора x_n конвергира ка x. Доказати да тада и $A_n x_n$ конвергира ка Ax.

4.27. На простору l^p дат је низ оператора B_n помоћу $B_n(\xi_1,\xi_2,\dots)=(0,0,\dots,0,\xi_{n+1},\xi_{n+2},\dots)$. Испитати да ли B_n тежи слабо, јако или униформно.

5. ИНВЕРТИБИЛНОСТ

Теорема о отвореном пресликавању и последице

5.1. Дефиниција. Нека су X и Y метрички простори. Познато је да је функција $f: X \to Y$ непрекидна ако и само ако је инверзна слика сваког отвореног подскупа простора Y, отворен подскуп простора X. А то је еквивалентно томе да је инверзна слика сваког затвореног подскупа простора Y затворен подскуп простора X.

Ништа слично се не може рећи за директну слику. На пример, нека је $X = Y = \mathrm{R}$, $f(x) = x^2$ и $g(x) = 1/(1+x^2)$. Функција f је непрекидна, али директна слика отвореног скупа $(-1, 1)$ једнака је скупу $[0, 1)$ који није отворен. И функција g је непрекидна, али слика затвореног скупа $[0, +\infty)$ једнака је скупу $(0, 1]$ који није затворен. (Овде није могуће направити пример са коначним затвореним интервалом, јер је он компактан, а непрекидна слика компакта је компакт.)

Стога посебно издвајамо функције које имају поменута својства.

Кажемо да је $f: X \to Y$ *отворено пресликавање* ако је слика сваког отвореног скупа у X, отворен скуп у Y.

Кажемо да је $f: X \to Y$ *затворено пресликавање* ако је слика сваког затвореног скупа у X, затворен скуп у Y.

Ова два новоуведена појам нису еквивалентна, што се може вдети из горња два примера.

Међутим, ако је $f: X \to Y$ бијекција, онда било који од њих (било да је f отворено, било да је затворено пресликавање) повлачи непрекидност инверзне функције $f^{-1}: Y \to X$. Заиста, директна слика скупа $A \subseteq X$ функцијом f је инверзна слика истог скупа функцијом f^{-1}, наравно ако ова последња постоји.

Наредна теорема је трећа од три кључне теореме функционалне анализе. Прве две су биле Хан-Банахова и Банах-Штајнхаусова.

5.2. Теорема (Банахова о отвореном пресликавању). *Нека су X и Y Банахови простори (дакле оба комплетна) и нека је $A: X \to Y$ ограничено линеарно пресликавање. Ако је A сурјективно, онда је A отворено пресликавање.*

Доказ. Нека је B_X ознака за отворену јединичну лопту у X, а B_Y за отворену јединичну лопту у Y. Било која лопта у X може се приказати преко B_X. Наиме, $B(x;r) = x + rB_X$.

1° У првом кораку, доказаћемо да је

$$\overline{AB_X} \supseteq rB_Y, \tag{1}$$

за неко $r > 0$, тј. да је слика јединичне лопте густа у некој лопти у Y.

Пресликавање A је „на“, па за свако $y \in Y$ постоји $x \in X$ тако да је $y = Ax$. За природан број $n > ||x||$ имамо $x \in nB_X$, тј. $y \in A(nB_X)$. Стога је

$$Y = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A(kB_X).$$

Како је Y комплетан, према Беровој теореми о категоријама не може се приказати као пребројива унија нигде густих скупова. Према томе, бар један од скупова $A(kB_X)$ није нигде густ. То значи да његово затворење има непразну унутрашњост, тј. да садржи неку куглу, рецимо $B(y_0;s) = y_0 + sB_Y$. Дакле,

$$\overline{A(kB_x)} \supseteq y_0 + sB_y.$$

Сада за било које $z \in B_Y$ (тј. $||z|| < 1$), вектор $y_0 + sz \in y_0 + sB_Y$, па постоје низови x_n', $x_n'' \in B_X$ (односно $||x_n'||$, $||x_n''|| < 1$), такви да $A(kx_n') \to y_0$ и $A(kx_n'') \to y_0 + sz$. Тада је

$$z = \frac{1}{s}(y_0 + sz - y_0) = \lim_{n\to+\infty} A\frac{1}{s}(kx_n'' - kx_n').$$

С обзиром да је $||(1/s)(kx_n'' - kx_n')|| < 2k/s$, вектор z је лимес слика вектора из $(2k/s)B_X$, односно $\overline{(2k/s)AB_X} \supseteq B_Y$. Како је A линеаран то важи (1) за $r = s/2k$.

2° У другом кораку, доказаћемо да се у (1) може изоставити знак за затворење. Формула (1) је већ доказана, и множењем скаларом закључујемо да важи

$$\overline{A(\alpha B_X)} \supseteq \alpha rB_Y.$$

односно, за све $\varepsilon > 0$ и све y такве да је $||y|| < \alpha r$ постоји $x \in X$ такво да је

$$||x|| < \alpha \qquad \text{и} \qquad ||Ax - y|| < \varepsilon. \tag{2}$$

Нека је $\varepsilon > 0$ дато, и нека је $y \in rB_Y$. Тада, на основу (2) уз $\alpha = 1$ и $\varepsilon r/2$ уместо ε, постоји x_1 такво да је $x_1 \in B_X$, тј. $||x_1|| < 1$ и $||y - Ax_1|| < \varepsilon r/2$. Сада применимо (2) на вектор $y - Ax_1 \in (\varepsilon r/2)B_Y$ (што значи $\alpha = \varepsilon/2$) и $\varepsilon r/4$ уместо ε. Закључујемо да постоји вектор $x_2 \in X$ са својствима $||x_2|| < \varepsilon/2$ и $||y - Ax_1 - Ax_2|| < r\varepsilon/4$. Поступак наставимо, па постоји низ вектора x_1, x_2, … такав да је

$$||x_n|| < \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} \qquad \text{и} \qquad ||y - Ax_1 - Ax_2 - \cdots - Ax_n|| < \frac{r\varepsilon}{2^n}, \qquad n \geq 2. \tag{3}$$

Из прве неједнакости у (3) закључујемо да је ред $\sum x_n$ апсолутно конвергентан, што због комплетности простора X значи да је и конвергентан. Његову суму означимо са x. Имамо

$$||x|| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} ||x_n|| < 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \cdots = 1 + \varepsilon,$$

тј. $x \in (1+\varepsilon)B_X$. Међутим, тада је $Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} Ax_n$, па из друге неједнакости у (3) имамо $y = Ax$. Према томе $(1+\varepsilon)AB_X \supseteq rB_Y$, односно $AB_X \supseteq \frac{r}{1+\varepsilon}B_Y$ за све $\varepsilon > 0$.

Како је, међутим $\bigcup_{\varepsilon>0} \frac{r}{1+\varepsilon} B_Y = rB_Y$ то добијамо

$$AB_X \supseteq rB_Y. \tag{4}$$

3° У последњем кораку доказујемо да је A отворено пресликавање. Нека је $G \subseteq X$ отворен скуп. Докажимо да је $A(G)$ отворен у Y. Нека $y_0 \in A(G)$. Тада је $y_0 = Ax_0$ за неко $x_0 \in G$, па како је G отворен постоји $\delta > 0$ такво да је $x_0 + \delta B_X \subseteq G$. Тада је, на основу (4)

$$A(G) \supseteq A(x_0 + \delta B_X) = y_0 + \delta AB_X \supseteq y_0 + \delta r B_Y,$$

па $A(G)$ заједно са y_0 садржи и лопту $B(y_0; \delta r)$, чиме је доказ завршен. □

Следе последице ове важне теореме.

5.3. Последица. *Нека су X и Y Банахови простори, и $A : X \to Y$ ограничен линеаран оператор. Ако је A бијекција, онда постоји $A^{-1} : Y \to X$ и A^{-1} је такође ограничен.*

Доказ. Ако је A бијективно, онда сигурно постоји инверзно пресликавање A^{-1}. Тривијално се изводи да је A^{-1} линеаран. Нетривијално је да ли је A^{-1} ограничен. Међутим, како је A сурјективно, оно је, према претходној теореми отворено пресликавање, а то значи да је A^{-1} непрекидно, а тиме и ограничено. □

5.4. Још једна последица. *Нека су на векторском простору X дате две норме $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$, и нека је X комплетан у односу обе. Ако постоји константа M таква да је*

$$||x||_1 \le M||x||_2 \tag{5}$$

за све $x \in X$ тада су те две норме еквивалентне.

Доказ. Простори $(X, ||\cdot||_1)$ и $(X, ||\cdot||_2)$ су Банахови – претпоставка комплетности. Уочимо идентичко пресликавање $I : (X, ||\cdot||_2) \to (X, ||\cdot||_1)$ задато са $Ix = x$. Услов (5) може се записати и као $||Ix|| \le M||x||$, односно I је ограничен. Како је он очигледно линеаран и бијективан, према претходној последици, он има ограничен инверз, тј. $||x|| \le C||Ix||$ за неко $C > 0$, тј. $||x||_2 \le C||x||_1$. Тада заједно са (5) имамо

$$m||x||_2 \le ||x||_1 \le M||x||_2,$$

ако означимо $1/C = m$, а то управо значи да су ове две норме еквивалентне. □

5.5. Теорема (о затвореном графику). *Нека су X и Y Банахови простори, и нека је $A : X \to Y$ линеаран оператор. Ако је график тог оператора $\Gamma_A = \{(x, Ax) \mid x \in X\}$ затворен потпростор Банаховог простора $X \times Y$ са нормом*

$$||(x, y)|| = ||x|| + ||y||, \tag{6}$$

онда је A ограничен.

Примедба: Није тешко доказати да је $X \times Y$ комплетан у односу на норму (6). На неки начин, избор норме није пресудан. Норма на производу $X \times Y$ се може увести и са $(||x||^p + ||y||^p)^{1/p}$ или са $\max\{||x||, ||y||\}$ и све такве норме су међусобно еквивалентне, што је и било за очекивати.

Доказ. График Γ_A је векторски потпростор, заиста, ако (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \Gamma_A$ онда $y_1 = Ax_1$, $y_2 = Ax_2$, па је $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$, и одатле $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) \in \Gamma_A$. Како је још и затворен, Γ_A се може посматрати и као Банахов простор.

Посматрајмо пресликавања $\pi_1 : \Gamma_A \to X$ и $\pi_2 : \Gamma_A \to Y$ дата са $\pi_1(x, Ax) = x$, односно $\pi_2(x, Ax) = Ax$. У питању су пројекције на прву, односно другу координату. Оба су непрекидна, јер је

$$||\pi_1(x, Ax)|| = ||x|| \leq ||x|| + ||Ax|| = ||(x, Ax)||,$$

$$||\pi_2(x, Ax)|| = ||Ax|| \leq ||x|| + ||Ax|| = ||(x, Ax)||.$$

Међутим, о пресликавању π_1 можемо рећи и нешто више. Оно је, наиме, бијекција. Заиста, свако $x \in X$ има свој Ax, односно свој пар $(x, Ax) \in \Gamma_A$, па је π_1 сурјективно. Оно је и injективно, јер ако $\pi_1(x', Ax') = \pi_1(x'', Ax'')$, тј. $x' = x''$, онда и $Ax' = Ax''$ па је $(x', Ax') = (x'', Ax'')$. Стога је према последици теореме о отвореном пресликавању инверзно пресликавање π_1^{-1} непрекидно. Но, сада за композицију

$$X \xrightarrow{\pi_1^{-1}} \Gamma_A \xrightarrow{\pi_2} Y,$$

имамо $\pi_2(\pi_1^{-1}(x)) = \pi_2(x, Ax) = Ax$, тј. $A = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. Стога је A непрекидно као композиција два непрекидна пресликавања.

!!!Дијаграм!!!

□

5.6. Пример неограниченог затвореног оператора. Оператор са затвореним графиком кратко зовемо *затворен оператор*. Због претходног става није могућ пример затвореног неограниченог оператора дефинисаног на читавом Банаховом простору X. Али има смисла посматрати затворен оператор са доменом стриктно мањим од X, на пример $A : \mathscr{D}(A) \to Y$, где је $\mathscr{D}(A)$ домен оператора A који је линеаран потпростор од X. Уколико је $\mathscr{D}(A)$ затворен, онда је он, посматран сам за себе, такође Банахов простор, па је затворен оператор на њему обавезно ограничен. Стога претпоставимо да $\mathscr{D}(A)$ није затворен. Претпостављаћемо и да је $\mathscr{D}(A)$ густ у X, јер у противном X можемо заменити његовим потпростором $\overline{\mathscr{D}(A)}$.

График оператора $A : \mathscr{D}(A) \to Y$ је затворен ако и само ако A задовољава следећи услов:

$$\mathscr{D}(A) \ni x_n \to x \wedge Ax_n \to y \Rightarrow x \in \mathscr{D}(A) \wedge y = Ax. \qquad (7)$$

Доказ. Услов (7) еквивалентан је овоме

$$x_n \in \mathscr{D}(A) \wedge ||x_n - x|| \to 0 \wedge ||Ax_n - y|| \to 0 \Rightarrow x \in \mathscr{D}(A) \wedge y = Ax. \qquad (8)$$

Заиста, како је $||(x_n, Ax_n) - (x, y)|| = ||x_n - x|| + ||Ax_n - y||$, то је премиса у импликацији (8) еквивалентна томе да је $(x, y) \in \overline{\Gamma}_A$, а закључак да $(x, y) \in \Gamma_A$. □

Услов (7) испуњава оператор диференцирања. Заиста, нека је $X = Y = C[0,1]$. Посматрајмо оператор диференцирања $x \mapsto Ax = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Он није дефинисан на целом X, јер као што знамо постоји прегршт непрекидних функција које немају извод нити у једној тачки. За домен оператора A узмимо $\mathscr{D}(A) = \{x \in C[0,1] \mid$ постоји $x'(t)$ за све $t \in [0,1]$ и непрекидан је$\}$.

Овај оператор има затворен график. Наиме, ако $\mathscr{D}(A) \ni x_n \to x$, и $Ax_n \to y$, то значи да низ x_n који се састоји од C^1-функција равномерно конвергира ка функцији x, а да низ x_n' равномерно конврергира ка y. Према познатој теореми класичне анализе, то значи да је x диференцијабилна, и $x' = y$. Дакле, $x \in \mathscr{D}(A)$, и $y = Ax$.

Оператор диференцирања, дакле, има затворен график, али није ограничен, јер на пример, све функције низа $x_n(t) = \sin nt$ имају норму једнаку 1, док функције $Ax_n(t) = x_n'(t) = n\cos nt$ имају норму једнаку n. Стога, ако би A био ограничен морало би бити $||Ax_n|| \le ||A||\,||x_n||$, тј. $n \le ||A||$ за све $n \in \mathbb{N}$ што је немогуће.

Готово идентично разматрање, са незнатно сложенијом техником може се извести за било који линеарни диференцијални оператор облика

$$x \mapsto x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_2x'' + a_1x' + a_0,$$

где су a_j непрекидне функције променљиве t.

Следи примена теореме о отвореном пресликавању на Фуријеове редове. Познато је да низ Фуријеових коефицијената ма које L^1-функције f образује нула низ. Видети Став 4.11. Међутим, на тај начин се не могу добити сви нула низови.

5.7. Став. *Постоји нула низ a_n који није низ Фуријоевих коефицијената нити једне функције из L^1. Другим речима постоји нула низ a_n такав да $a_n = (1/\pi)\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t$ не важи ни за једну функцију $f \in L^1(-\pi,\pi)$.*

Доказ. Пресликавање $A : L^1(-\pi,\pi) \to c_0$, дато са $Af = (a_n)_{n\ge 0}$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t$$

је линеарно и ограничено, јер је $|a_n| \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t = ||f||/\pi$. Према томе $||A|| \le 1/\pi$.

Претпоставимо супротно, да је пресликавање A сурјективно и уочимо $P \le L^1(-\pi,\pi)$ потпростор који се састоји искључиво од парних функција. Простор P је затворен, јер ако $P \ni f_n \to f$ у норми простора L^1 онда из Рис-Фишерове теореме следи да је $f(x)$ тачка по тачка лимес неког подниза низа f_n, а то чува парност. Ако је $a = (a_n)$ произвољан нула низ и ако је $a = Af$ за неку функцију $f \in L^1$, онда је $a = Ag$ и за неку функцију $g \in P$, конкретно за $g(x) = (f(x)+f(-x))/2$. То је очигледно.

Преликавање $A|_P$ је инјективно. Заиста, ако је $Af = 0$ и $f \in P$, онда су сви Фуријеови коефицијенти $a_n = 0$ (јер је $Af = 0$), али и $b_n = 0$, јер је $f \in P$. Посматрајмо функционал $\Lambda_f \in C[a,b]^*$ дат са

$$\Lambda_f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Према репрезентацији простора $C[a,b]^*$, Λ_f је линеаран и $||\Lambda_f|| = ||f||_1$. Чињеница да је $a_n = b_n = 0$ значи да је $\Lambda_f(x) = 0$ за све функције x из скупа $\{1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots\}$, а како према Фејеровој теореми поменути скуп функција чини фундаменталан скуп, то је $\Lambda_f \equiv 0$, односно $||f|| = ||\Lambda_f|| = 0$.

Сада имамо пресликавање $A : P \to c_0$ за које смо доказали да је ограничено, линеарно и $1-1$, и за које смо претпоставили да је „на“. Према теореми о отвореном пресликавању, то значи да постоји $A^{-1} : c_0 \to P$ и да је A^{-1} ограничено, тј. да постоји константа $M > 0$ са својством $||A^{-1}a|| \le M||a||$ за сваки нула низ $a = (a_n)$. После смене $a = Af$, то постаје

$$||Af|| \ge m||f||, \tag{9}$$

где је $m = 1/M$. Међутим, ако одаберемо $f = D_n$, где је D_n Дирихлеово језгро, тј.

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)} = D_n(t),$$

(Дирихлеово језгро), онда имамо $A(D_n) = (1, 1, \dots, 1, 0, \dots)$ (види се из представљања D_n као суме), тј. $||A(D_n)|| = 1$, док је, као што смо раније (у Ставу 4.12) установили $||D_n|| \to +\infty$. Тако (9) није одрживо за $f = D_n$, јер се своди на $1 \ge m||D_n|| \to +\infty$.

С обзиром да смо добили контрадикцију, претпоставка да је A сурјективно је неодржива. ☐

Спектар

5.8. Мотивација. У овом одељку бавимо се уопштењем појма сопствене вредности линеарног пресликавања. Да се подсетимо, ако је X коначно димензионалан простор и $A : X \to X$ линеарно пресликавање, онда за број $\lambda \in \mathrm{K}$ кажемо да је *сопствена вредност* пресликавања A ако је

$$Ax = \lambda x, \qquad \text{за неко } 0 \ne x \in X. \tag{10}$$

Када је простор X коначно димензионалан, онда је услов (10) еквивалентан са условом

$$A - \lambda I \text{ није инвертибилан} \tag{11}$$

Јано је да (10) повлачи (11). Обратно је последица познате чињенице да дефект и ранг произвољног линеарног пресликавања у збиру дају димензију простора. Примењено на пресликавање $A - \lambda I$ то значи да је

$$\dim\ker(A-\lambda I) + \dim\operatorname{ran}(A-\lambda I) = \dim X = n. \tag{12}$$

Према томе, $A - \lambda I$ је $1-1$ ако и само ако је „на“. Тако је услов (11) еквивалентан томе да $A - \lambda I$ има нетривијално језгро, а то је еквивалентно са (10).

Међутим, ако је X бесконачне димензије, формула (12) не обезбеђује да је оператор $A - \lambda I$ инјективан ако и само ако је сурјективан, видети вежбање ?????. Тако у општем случају из (10) следи (11), али не и обратно. Стога у општем случају имамо овакве дефиниције.

5.9. Дефиниција. Нека је X Банахов простор над пољем $\mathbb{C}$, и нека је $A \in L(X)$. Број $\lambda \in \mathbb{C}$ зовемо *регуларна тачка* ако постоји $(A-\lambda I)^{-1} \in L(X)$. Дакле, није довољно само да потоји $(A-\lambda I)^{-1}$ него треба да буде и ограничен. Скуп свих регуларних тачака означавамо са $\rho(A)$ и називамо *резолвентни скуп*.

Функција $R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ која пресликава скуп $\rho(A) \subseteq \mathbb{C}$ у $L(X)$ назива се *резолвента*.

Комплемент резолвентног скупа $\mathbb{C} \setminus \rho(A)$ називамо *спектар* оператора A и означавамо са $\sigma(A)$. Дакле,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{не постоји } (A-\lambda I)^{-1} \in L(X)\}.$$

Постоји више начина да $A-\lambda I$ не буде инвертибилан. Тек један од њих је да има нетривијално језгро. Стога тачке спектра можемо даље поделити на три врсте.

Тачкасти спектар – $\sigma_p(A)$. Тачка $\lambda \in \sigma(A)$ назива се *сопствена вредност* или тачка *пунктуалног спектра* ако оператор $A-\lambda I$ није инјективан. То значи да има нетривијално језгро, односно да постоји $0 \neq x \in X$ тдј. $Ax - \lambda x = 0$. Скуп свих сопствених вредности означавамо са $\sigma_p(A)$ и називамо *пунктуални* или *тачкасти* спектар.

Непрекидни спектар – $\sigma_c(A)$. Тачка $\lambda \in \sigma(A)$ назива се тачка *непрекидног спектра* ако је језгро пресликавања $A-\lambda I$ тривијално, а слика густа у X. Скуп таквих тачака називамо *континуални* или *непрекидни* спектар и обележавамо са $\sigma_c(A)$.

Резидуални спектар – $\sigma_r(A)$. Најзад, остале тачке из спектра називамо *резидуалне тачке*. Скуп таквих тачака означавамо са $\sigma_r(A)$ и називамо *резидуални* или *преостали* спектар.

Тачке резидуалног спектра су дакле они бројеви λ за које је $A-\lambda I$ инјективно, али слика $\operatorname{ran}(A-\lambda I)$ није густа у X. Слично, $\lambda \in \sigma_c(A)$ ако и само ако је $A-\lambda I$ инјективно, али $\operatorname{ran}(A-\lambda I) \subsetneq \overline{\operatorname{ran}(A-\lambda I)} = X$. Заиста, могућност да $A-\lambda I$ буде $1-1$ и „на“, али да при томе његов инверз није ограничен искључена је због теореме о отвореном пресликавању.

Следи став о основним особинама спектра.

5.10. Став. *Нека је $A \in L(X)$, X Банахов простор.*

(а) *Резолвентни скуп $\rho(A)$ је отворен, а резолвента је на њему холоморфна фукција.*
(б) *Ако је $|\lambda| > ||A||$, онда $\lambda \in \rho(A)$.*
(в) *Спектар $\sigma(A)$ је непразан компактан скуп.*

Доказ. У доказу користимо следећу чињеницу (вежбање 3.8). Ако је $||A|| < 1$ онда је $I-A$ инвертибилан, и важи

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n. \tag{13}$$

(а) Нека је $\lambda_0 \in \rho(A)$. Тада постоји $R_{\lambda_0}(A) = (A-\lambda_0 I)^{-1}$. Нека је $\lambda \in \mathbb{C}$ такво да је $|\lambda-\lambda_0| < \delta$, где је $\delta = ||R_{\lambda_0}||^{-1}$. Множећи једнакост $(A-\lambda_0 I)-(A-\lambda I) = (\lambda-\lambda_0)I$ резолвентом R_{λ_0} налазимо

$$I - R_{\lambda_0}(A-\lambda I) = (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}.$$

Међутим, $||(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}|| < \delta||R_{\lambda_0}|| = 1$, па је $R_{\lambda_0}(A-\lambda I) = I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}$ инвертибилан и важи

$$(R_{\lambda_0}(A-\lambda I))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_{\lambda_0}^n(\lambda-\lambda_0)^n.$$

Но тада је и $(A-\lambda I) = R_{\lambda_0}^{-1}R_{\lambda_0}(A-\lambda I)$ инвертибилан, као производ два инвертибилна оператора и важи

$$R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} = (R_{\lambda_0}(A-\lambda I))^{-1}R_{\lambda_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} R_{\lambda_0}^{n+1}(\lambda-\lambda_0)^n. \tag{14}$$

Тиме је доказано да $|\lambda-\lambda_0| < \delta$ повлачи $\lambda \in \rho(A)$, тј. да је $\rho(A)$ отворен. А формулом (14) резолвента R_λ је изражена као сума степеног реда по λ, па је реч о аналитичкој функцији.

Примедба: Овде је реч о операторно вредносној аналитичкој функцији, јер су коефицијенти у степеном реду (14) оператори. Ми не знамо (за сада) никаква својства операторно вредносних аналитичких функција. Ако будемо желели да искористимо нека позната својства аналитичких функција, направићемо скаларно вредносну функцију, тако што ћемо оператором (14) деловати на произвољан вектор $x \in X$, а затим израчунати вредност функционала $\Lambda \in X^*$.

(б) Ако је $|\lambda| > ||A||$, онда је $||(1/\lambda)A|| < 1$, па је оператор $I-(1/\lambda)A$ инвертибилан. Заједно са њим инвертибилан је и $A-\lambda I = -\lambda(I-(1/\lambda)A)$. Шта више, из (13) налазимо

$$R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1} = -\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda^n}A^n. \tag{15}$$

(в) Из тачке (а), спектар $\sigma(A)$ је затворен, као комплемент отвореног скупа $\rho(A)$. Из тачке (б) је $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathrm{C} \mid |\lambda| \le ||A||\}$, па је ограничен. А у скупу C затворен и ограничен скуп је компактан.

Стога још једино недостаје да докажемо да је $\sigma(A)$ непразан. Претпоставимо супротно, $\sigma(A) = \emptyset$, тј. $\rho(A) = \mathrm{C}$. Тада је резолвента аналитичка функција дефинисана у целој комплексној равни. Доказаћемо и да је ограничена. Из (15), за $|\lambda| > ||A||$ имамо

$$||R_\lambda|| \le |\lambda|\sum_{n=0}^{+\infty}||A||^n/|\lambda|^n = \frac{|\lambda|}{1-||A||/|\lambda|} = \frac{1}{|\lambda|-||A||} \to 0, \tag{16}$$

кад $|\lambda| \to +\infty$.

Нека су $x \in X$ и $\Lambda \in X^*$ произвољни. Тада је функција $h : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$ дата са $h(\lambda) = \Lambda(R_\lambda x)$ аналитичка због (14). Због (16) биће $|h(\lambda)| \le ||\Lambda||\,||x||\,||R_\lambda|| < \varepsilon$ за $|\lambda| \ge M$, а на скупу $\{\lambda \in \mathrm{C} \mid |\lambda| \le M\}$ функција h је ограничена јер је непрекидна.

Према томе, функција h је ограничена цела функција, па је према Лјувиловој теореми константна. И више, због (16), она је идентички једнака нули. Дакле $\Lambda(R_\lambda x) \equiv 0$. Како је $\Lambda \in X^*$ било произвољно, и како дуални простор X^* раздваја тачке, то је $R_\lambda x \equiv 0$ за све $x \in X$, тј. $R_\lambda = 0$ за све λ. То је међутим немогуће јер је R_λ инвертибилан оператор.

Стога је претпоставка $\sigma(A) = \emptyset$ неодржива. □

5.11. Нормални и самоадјунговани оператори. Нека је H Хилбертов простор и $A \in L(H)$. Подсетимо се да је адјунгован оператор $A^* \in L(H)$ јединствени оператор за који важи

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \qquad \text{за све } x, y \in H.$$

За оператор $A \in L(H)$ кажемо да је *самоадјунгован* ако је $A = A^*$. Како је A^* уопштење појма трансопоноване матрице, то је појам самоадјунгованог оператора уопштење појма симетричне матрице.

За оператор $A \in L(H)$ кажемо да је *нормалан* ако A комутира са својим адјунгованим, тј. ако је $AA^* = A^*A$. Јасно, сваки самоадјунгован оператор је нормалан, јер се у том случају оба производа AA^* и A^*A своде на A^2.

Оператор A је нормалан ако и само ако за све $x \in H$ важи

$$||Ax|| = ||A^*x||. \tag{17}$$

(То је јаче од $||A|| = ||A^*||$ што смо доказали да важи увек, тј. без обзира на то да ли је A нормалан или није.)

Заиста, ако је A нормалан, онда је $||Ax||^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^*Ax\rangle = \langle x, AA^*x\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle = ||A^*x||^2$, па је услов (17) потребан. Докажимо и да је довољан. Ако важи (17) онда на исти начин налазимо да је $\langle A^*Ax, x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle$ за све $x \in H$, тј. да је $\langle (A^*A - AA^*)x, x\rangle \equiv 0$. Међутим, онда применом поларизационог идентитета (формула (21) главе четири)

$$\langle Bx, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle B(x+y), x+y\rangle - \langle B(x-y), x-y\rangle + \\ + i\langle B(x+iy), x+iy\rangle - i\langle B(x-iy), x-iy\rangle\big)$$

на оператор $B = A^*A - AA^*$ налазимо и да је $\langle (A^*A - AA^*)x, y\rangle = 0$ за све x, $y \in H$. Одатле је $A^*A - AA^* = 0$, тј. A је нормалан.

Такође, лако се показује да је $\lambda A + \mu B$ нормалан, кад год су A и B нормални.

5.12. Став. *Нека је A нормалан. Тада је:*

(а) $(\operatorname{ran} A)^\perp = \ker A^*$*;* $\ker A^\perp = \overline{\operatorname{ran} A^*}$.
(б) $\sigma_r(A) = \emptyset$*, односно нормални оператори немају резидуални спектар.*

Доказ. (а) $y \perp \operatorname{ran} A \Leftrightarrow$ за све $x \in H$ важи $\langle Ay, x\rangle = 0$, тј. $\langle x, A^*y\rangle = 0$, тј. ако и само ако је $A^*y \perp H \Leftrightarrow A^*y = 0$, односно $y \in \ker A^*$.

Како је $A^{**} = A$ примењујући претходно на A^* налазимо $(\operatorname{ran} A^*)^\perp = \ker A$, па када се узме још један комплемент и искористи $S^{\perp\perp} = \overline{\mathscr{L}in(S)}$ добијамо $\overline{\operatorname{ran} A^*} = (\ker A)^\perp$.

(б) Заједно са оператором A, нормалан је и оператор $A - \lambda I$. Претпоставимо да слика $\operatorname{ran}(A - \lambda I)$ није густа у H. Тада је ортокомплемент $(\operatorname{ran}(A_\lambda I))^\perp$ нетривијалан, тј. постоји $0 \neq x \in H$ тдј. $x \perp \operatorname{ran}(A - \lambda I)$. Према претходном, то значи да $x \in \ker(A - \lambda I)^*$, тј. $(A - \lambda I)^*x = 0$. Међутим, због (17) тада је $||(A - \lambda I)x|| = ||(A - \lambda I)^*x|| = 0$, односно $Ax = \lambda x$. Према томе не може се догодити да оператор $A - \lambda I$ нема густу слику и да истовремено буде инјективан. Тако је $\sigma_r(A) = \emptyset$. □

5.13. Лема. *Нека је $A \in L(X)$, X Банахов простор, и нека постоји константа $m > 0$ таква да је за све $x \in X$ испуњено*

$$||Ax|| \geq m||x||. \tag{18}$$

Тада је A инјективан, слика $\operatorname{ran} A$ *је затворен потпростор, и* $A^{-1} : \operatorname{ran} A \to X$ *је ограничен оператор. Посебно, ако је A „на“, онда постоји* $A^{-1} \in L(X)$.

Доказ. Ако је $Ax = 0$, онда из (18) налазимо и да је $x = 0$, па је A инјективан.

Нека је $y_n \in \operatorname{ran} A$, и $y_n \to y$. Тада је $y_n = Ax_n$ за неки низ $x_n \in X$. (Тај низ је чак јединствен, јер је A инјективан.) Низ $y_n = Ax_n$ је конвергентан, па је тиме и Кошијев. На основу (18) налазимо и да је низ x_n Кошијев, па је конвергентан, рецимо $x_n \to x$. Но тада због ограничености оператора A имамо и $Ax_n \to Ax$, па како већ $Ax_n \to y$ то је $y = Ax$, тј. $y \in \operatorname{ran} A$. Тако је $\operatorname{ran} A$ затворен потпростор.

Оператор $A^{-1} : \operatorname{ran} A \to H$ је, онда ограничен на основу теореме о отвореном пресликавању. ☐

5.14. Став. *Нека је H Хилбертов простор, и нека је* $A \in L(H)$.

(а) *Ако* $\lambda \in \sigma(A)$ *онда* $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$. *И више* $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$.
(б) *Ако је A самоадјунгован, онда је* $\langle Ax, x\rangle \in \mathrm{R}$ *за све* $x \in H$.
(в) *Ако је A самоадјунгован, онда је* $\sigma(A) \subseteq \mathrm{R}$, *и* $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Доказ. (а) Докажимо прво да је A^* инвертибилан, кад год је A инвертибилан. Ако је A инвертибилан, онда је $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, одакле је адјунговањем $(A^{-1})^*A^* = A^*(A^{-1})^* = I^* = I$, па је $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Договоримо се да у наставку доказа $\overline{A}$, где је A скуп комплексних бројева означава скуп $\{\overline{\lambda} \mid \lambda \in A\}$, дакле „комплексни конјугат“ скупа A, а не његово затворење.

Ако $\lambda \notin \sigma(A)$ онда је $A - \lambda I$ инвертибилан, па је такав и $(A - \lambda I)^* = A^* - \overline{\lambda} I$, па $\overline{\lambda} \notin \sigma(A^*)$. Другим речима $\overline{\rho(A)} \subseteq \rho(A^*)$. Како је $A^{**} = A$ и $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$, када претходно применимо на A^* налазимо $\overline{\rho(A^*)} \subseteq \rho(A)$, односно $\rho(A^*) \subseteq \overline{\rho(A)}$. Тако је $\overline{\rho(A)} = \rho(A^*)$, а тиме и $\overline{\sigma(A)} = \sigma(A^*)$.

(б) Имамо $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle}$, па $\langle Ax, x\rangle \in \mathrm{R}$.

(в) Ако је A самоадјунгован онда је $A = A^*$. Нека је $\lambda \in \mathrm{C} \setminus \mathrm{R}$, тј. $\lambda = \alpha + i\beta$, α, $\beta \in \mathrm{R}$, $\beta \neq 0$. Имамо

$$\|(A-\lambda I)x\|^2 = \|(Ax-\alpha x) - i\beta x\|^2 = \|Ax - \alpha x\|^2 - 2\operatorname{Re} i\langle Ax - \alpha x, \beta x\rangle + \|\beta x\|^2. \quad (19)$$

Међутим, због претходног је

$$\langle Ax - \alpha x, \beta x\rangle = \beta\langle Ax, x\rangle - \alpha\beta\|x\|^2 \in \mathrm{R},$$

па је $i\langle Ax - \alpha x, \beta x\rangle$ чисто имагинаран број, и реални део му је једнак нули. Тако се (19) своди на

$$\|(A-\lambda I)x\|^2 = \|Ax - \alpha x\|^2 + \|\beta x\|^2 \geq |\beta|^2\|x\|^2, \qquad \text{тј.} \qquad \|(A-\lambda I)x\| \geq |\beta|\,\|x\|.$$

Како је $\beta \neq 0$, то значи да је $A - \lambda I$ инјективан, те да има затворену слику. Према томе, или је $\lambda \in \rho(A)$ или је $\lambda \in \sigma_r(A)$. Последње је искључено јер је сваки самоадјунгован оператор уједно и нормалан, па је $\sigma_r(A)$ празан.

Имамо дакле, $\lambda \notin \mathrm{R}$ повлачи $\lambda \notin \sigma(A)$ а то је и требало доказати. ☐

Вежбања

5.1. За $f \in L^1(0,1)$ формирамо низ $\xi_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

а) Доказати да $\xi_n \to 0$ кад $n \to \infty$.

б) Доказати да је оператор $A : L^1(0,1) \to c_0$, дат са $A(f) = (\xi_n)_0^{+\infty}$ линеаран, ограничен, и да је $||A|| = 1$.

в) Доказати да је A „$1-1$“.

г) Користећи низ функција $f_k(t) = k\chi_{[0,1/k]} - k\chi_{[1/k,2/k]}$ и Банахову теорему о отвореном пресликавању, доказати да A није „НА“.

5.2. Нека је z_n низ различитих тачака у ограниченом скупу $\Omega \subseteq \mathrm{C}$, и нека за сваки ограничен низ w_n комплексних бројева постоји ограничена аналитичка функција $f : \Omega \to \mathrm{C}$ таква да је $f(z_n) = w_n$ за све n. Тада постоји константа $K < +\infty$ таква да за сваку функцију f (ограничену и аналитичку) за коју важи $f(z_n) = w_n$, важи и $\sup\limits_{z\in\Omega} |f(z)| \le K \sup\limits_{n} |w_n|$.

[Посматрати пресликавање $H(\Omega) \ni f \mapsto f(w_n) \in l^\infty$, где је $H(\Omega)$ скуп ограничених аналитичких функција из Ω у C са $\sup$-нормом. Искористити теорему о отвореном пресликавању.]

5.3. Нека је $A : X \to Y$ ограничен линеаран оператор. Нека је $A(X) = Y$ и $y_n \to y_0 \in Y$. Тада постоји константа $c > 0$ и низ $x_n \in X$ такав да $x_n \to x_0$, $Ax_n = y_n$ и $\|x_n\| \le c\|y_n\|$.

5.4. Нека је A *нилпотентна* матрица формата $n \times n$ (тј. таква да је $A^k = 0$ за неко $k \in \mathrm{N}$). Доказати да је $\sigma(A) = \{0\}$.

5.5. Нека су A, $B \in L(X)$, X Банахов простор.

а) Доказати да је $I - AB$ инвертибилан ако и само ако је $I - BA$ инвертибилан. [Посматрати оператор $I + B(I - AB)^{-1}A$.]

б) Извести закључак: $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$.

5.6. Дат је оператор једностраног помака $T : l^2 \to l^2$, $T(\xi_1, \xi_2, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$. Одредити $\sigma(T)$. [Одредити сопствене вредности оператора T^* и искористити $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.]

5.7. За оператор $A \in L(X)$ дефинишемо његов *реални* и *имагинарни* део са $B = (A + A^*)/2$, $C = (A - A^*)/(2i)$.

а) Доказати $B = B^*$, $C = C^*$, $A = B + iC$, $A^* = B - iC$.

б) Доказати да је A нормалан ако и само ако B и C комутирају, тј. акко је $BC = CB$.

5.8. Дато је пресликавање $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ са $(Af)(x) = xf(x)$. Доказати да је $\sigma(A) = [0,1]$.

5.9. У Хилбертовом простору $H = L^2(0, +\infty)$ посматрамо скуп $\mathscr{D} = \{f \in H \mid \int_0^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < +\infty\}$.

а) Доказати да је $\mathscr{D}$ густ, прави потпростор простора H, и тиме није затворен. [$\mathscr{D}$ садржи функције $\equiv 0$ за $x > M$, а ове су густе у H.]

б) Доказати да је оператор $A : \mathscr{D} \to H$ дат са

$$(Af)(x) = xf(x) \tag{20}$$

неограничен затворен оператор.

в) Доказати да је $\sigma(A) = [0, +\infty)$.

г) Ако се узме $H = L^2(-\infty, +\infty)$, и A задат формулом (20), како онда изгледа његов домен? Шта је у овом случају $\sigma(A)$?

5.10. За оператор $U : H \to H$, H Хилбертов простор кажемо да је *унитаран* ако је $UU^* = U^*U = I$ (тј. ако је $U^{-1} = U^*$.)

а) Доказати да је $\sigma(U) \subseteq \{\lambda \in \mathrm{C} \mid \lambda\overline{\lambda} = 1\}$;

б) Уопштити. Шта се мозје рећи о спектру оператора A за који важи релација $P(A, A^*) = 0$, где је P полином две променљиве са реалним коефицијентима?

6. ПОЈАМ БАЗЕ

Хилбертова база

6.1. Ортонормирани системи. Нека је H Хилбертов простор. За скуп вектора $\{e_i \mid i \in I\}$ кажемо да је *ортогоналан* ако за $i \neq j$ важи $e_i \perp e_j$, тј. $\langle e_i, e_j\rangle = 0$. (Скуп индекса I не мора бити пребројив.)

За исти скуп кажемо да је *ортонормиран* ако је ортогоналан, и ако важи $||e_i|| = 1$. Укратко то значи да је $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, где је $\delta_{ij} = 1$ за $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ за $i \neq j$, тзв. Кронекеров делта симбол.

Полазећи од ма ког коначног линеарно независног система $\{x_1, \dots, x_n\}$, може се конструисати ортонормиран систем који генерише исти потпростор, тј. ортонормиран систем $\{e_1, \dots, e_n\}$ такав да је $\mathscr{L}in\{e_1, \dots, e_n\} = \mathscr{L}in\{x_1, \dots, x_n\}$. Поступак којим се то чини је тзв. *Грам-Шмитов поступак.*

Наиме, ако претпоставимо $e_k \in \mathscr{L}in\{x_1, \dots, x_k\}$, тј. $e_k = \alpha_{1k}x_1 + \alpha_{2k}x_2 + \cdots + \alpha_{kk}x_k$, услови $e_j \perp e_k$ довешће до система једначина по коефицијентима α_{jk} чијим решавањем добијамо

$$e_1 = \frac{x_1}{||x_1||};$$

$$e_2 = \frac{x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1}{||x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1||};$$

$$\dots\dots$$

$$e_k = \frac{x_k - \langle x_k, e_1\rangle e_1 - \langle x_k, e_2\rangle e_2 - \cdots - \langle x_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1}}{||x_k - \langle x_k, e_1\rangle e_1 - \langle x_k, e_2\rangle e_2 - \cdots - \langle x_k, e_{k-1}\rangle e_{k-1}||}.$$

Да систем e_j испуњава услове показујемо тако што за $j < k$ израчунавамо:

$$\begin{aligned}\langle x_k - \sum_{i=1}^{k-1}\langle x_k, e_i\rangle e_i, e_j\rangle &= \langle x_k, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{k-1}\langle x_k, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \\ &= \langle x_k, e_j\rangle - \sum_{i=1}^{k-1}\langle x_k, e_i\rangle\delta_{ij} = \\ &= \langle x_k, e_j\rangle - \langle x_k, e_j\rangle = 0.\end{aligned}$$

6.2. Став (Беселова неједнакост). *Нека је* e_1, e_2, …, e_n *ортонормиран систем. Тада је*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \tag{1}$$

и посебно

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le ||x||^2. \tag{2}$$

При томе једнакост важи ако и само ако $x \in \mathscr{L}in\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Примедба: Неједнакост (2) назива се *Беселова неједнакост*.

Доказ. Имамо

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle =$$

$$= ||x||^2 - 2\operatorname{Re}\left\langle x, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle + \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle =$$

$$= ||x||^2 - 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle x, e_k \rangle + \sum_{j,k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \overline{\langle x, e_j \rangle} \langle e_k, e_j \rangle.$$

Водећи рачуна о томе да је $\langle e_k, e_j \rangle = 0$ за $k \neq j$ последње постаје

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\| = ||x||^2 - 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2,$$

односно (1) када се узме у обзир да се у средњем сабирку већ налази реалан број, и то два пута већи од трећег сабирка.

Из (1) једноставно следи (2). Да би у (2) важила једнакост, неопходно је да израз у (1) буде једнак нули, а то ће бити ако и само ако је $x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k = 0$. Дакле, једнакост важи ако и само ако је

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

□

6.3. Последица. *Нека је* e_1, e_2, …, e_n *ортонормиран систем, и нека је* $L = \mathscr{L}in\{e_1, \ldots, e_n\}$, *а* P_L *ортогонална пројекција на* L. *(Она постоји јер је* L *коначно димензионалан, и тиме затворен.) Тада је:*

$$P_L x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k, \qquad и \qquad d(x, L) = \sqrt{||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2}.$$

Доказ. Нека је

$$z = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k.$$

Очигледно $z \in L$, али и

$$\begin{aligned}\langle x-z,z\rangle &= \left\langle x-\sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k, \sum_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k\right\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\overline{\langle x,e_k\rangle}\langle x,e_k\rangle - \sum_{j,k=1}^{n}\langle x,e_j\rangle\overline{\langle x,e_k\rangle}\langle e_j,e_k\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2 = 0,\end{aligned}$$

када се узме у обзир да је $\langle e_j,e_k\rangle = 0$ за $j \neq k$. Отуда је $x-z \perp z$, па како је разлагање у теореми о ортопројекцији јединствено закључујемо да је $z = P_L x$, $x-z \in L^{\perp}$ и $d(x,L) = ||x-z||$, односно

$$d(x,L)^2 = ||x-z||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2,$$

на основу (2). ☐

6.4. Последица. *Нека је e_j, $j \in I$ неки ортонормиран систем у Хилбертовом простору H, макар и непребројив, и нека је $x \in H$ произвољно. Тада је скуп индекса $j \in I$ за које је $\langle x,e_j\rangle \neq 0$ највише пребројив.*

Доказ. Претпоставимо да постоји n вектора из скупа $\{e_i \mid i \in I\}$, рецимо e_1, …, e_n за које је $|\langle x,e_i\rangle| \geq 1/k$. Тада је на основу Беселове неједнакости (2)

$$||x||^2 \geq \sum_{k=1}^{n}|\langle x,e_k\rangle|^2 \geq n/k^2, \qquad \text{тј.} \qquad n \leq k^2||x||^2.$$

Отуда је скуп индекса $I_k = \{i \in I \mid |\langle x,e_i\rangle| \geq 1/k\}$ коначан. Како је скуп индекса $i \in I$ за које је $\langle x,e_i\rangle \neq 0$ једнак $\bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k$, то је он највише пребројив. ☐

6.5. Став. *Нека је e_i, $i \in I$ неки ортонормиран систем. Тада су следећи услови међусобно еквивалентни:*

(i) *Скуп коначних линеарних комбинација вектора e_i, $\mathscr{L}in\{e_i \mid i \in I\}$ је густ у H;*
(ii) *За све $x \in H$ важи $x = \sum_{i\in I}\langle x,e_i\rangle e_i$.*
(iii) *За све $x \in H$ важи $||x||^2 = \sum_{i\in I}|\langle x,e_i\rangle|^2$.*
(iv) *За све x, $y \in H$ важи $\langle x,y\rangle = \sum_{i\in I}\langle x,e_k\rangle\overline{\langle y,e_k\rangle}$.*
(v) *Ако је $x \perp e_k$ за све $k \in I$ онда је $x = 0$.*

Примедба: Сви напред наведени редови заправо имају највише пребројиво сабирака различитих од нуле, те суме имају смисла. Бројеви $\langle x,e_k\rangle$ се називају *Фуријеови коефицијенти* вектора x. Ред у (ii) назива се *Фуријеов ред* вектора x. Једнакост (iii) назива се *Парсевалова једнакост*.

Доказ. Еквиваленција (i) $\iff$ (v) следи из једнакости $S^{\perp\perp} = \overline{\mathscr{L}in(S)}$. Наиме, (v) $\iff \{e_i\}^{\perp} = \{0\} \iff \overline{\mathscr{L}in\{e_i\}} = \{e_i\}^{\perp\perp} = H \iff$ (i).

Еквиваленција (ii) $\iff$ (iii) следи непосредно из једнакости (1).

Да (iv) повлачи (iii) једноставно видимо ако у (iv) ставимо $y = x$. Тада је, наиме, $\langle x, e_k\rangle\overline{\langle y, e_k\rangle} = |\langle x, e_k\rangle|^2$.

Да из (ii) следи (iv) видимо овако

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j\in I}\langle y, e_j\rangle e_j \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_j\rangle}\langle e_i, e_j\rangle = \\ &= \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_j\rangle},\end{aligned}$$

јер за $i \neq j$ важи $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, а за $i = j$, $\langle e_i, e_i\rangle = 1$.

Својство (v) непосредно следи из (ii), па остаје још да докажемо, на пример, да (v) повлачи (ii).

Претпоставимо да важи (v) и ставимо $y = x - \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle e_i$. За оне i за које је $\langle x, e_i\rangle = 0$ вектор e_i се не појављује у суми, па је $y \perp e_i$. Ако је, пак, $\langle x, e_j\rangle \neq 0$ онда је

$$\langle y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \sum_{i\in I}\langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle - \langle x, e_j\rangle = 0.$$

□

6.6. Дефиниција. Ортонормиран систем e_i, $i \in I$ за који је испуњен било који од услова претходног става (а тиме и сви) називамо *потпун ортонормиран систем* (скраћено ПОНС) или *Хилбертова база.*

Хилбертова база није исто што и алгебарска база. Наиме, било који вектор x се на јединствен начин може изразити као *коначна* линеарна комбинација елемената алгебарске базе. С друге стране, x се приказује као бесконачна (додуше највише пребројива) линеарна комбинација елемената Хилбертове базе – својство (ii).

6.7. Став. *Сваки нетривијалан Хилбертов простор* ($H \neq \{0\}$) *има бар једну Хилбертову базу.*

Доказ. Нека је H Хилбертов простор. Уочимо фамилију $\mathscr{M}$ свих ортонормираних система у H. Фамилија $\mathscr{M}$ је непразна јер садржи бар један једночлан систем, наиме $\{x/\|x\|\}$ за било које $0 \neq x \in H$. Скуп $\mathscr{M}$ уредимо инклузијом, тј. ставимо да је за B_1, $B_2 \in \mathscr{M}$, $B_1 \leq B_2$ ако и само ако је $B_1 \subseteq B_2$.

У фамилији $\mathscr{M}$ сваки ланац има горње ограничење. Наиме, ако је $\mathscr{L} = \{B_i \mid i \in I_0\}$ ланац у $\mathscr{M}$, онда је $\bigcup_{i\in I_0} B_i$ такође ортонормиран систем, јер за e, $f \in \bigcup_{i\in I_0} B_i$ имамо $e \in B_1$, $f \in B_2$ за неке B_1, $B_2 \in \mathscr{L}$. Како је $\mathscr{L}$ ланац, један од скупова B_1, B_2 је подскуп другог, рецимо $B_1 \subseteq B_2$. Тада e, $f \in B_2$, па је $\langle e, f\rangle = 0$, ако су различити, односно 1 ако је $e = f$. Очигледно је $B_i \subseteq \bigcup_{i\in I_0} B_i$, па је реч о једном горњем ограничењу ланца $\mathscr{L}$.

Према Цорновој леми, у $\mathscr{M}$ постоји максималан елемент. Нека је то B. Ако B није потпун, онда, између осталог не испуњава својство 5° става 6.5, односно постоји $0 \neq x \in H$ такво да је $x \perp e$ за све $e \in B$. Но, тада је $B \cup \{x/\|x\|\}$ ортонормиран систем који садржи B, те B није максималан, што чини контрадикцију. Дакле, B је потпун систем, тј. Хилбертова база. □

6.8. Став. *Нека је H Хилбертов простор и нека су B_1 и B_2 две његове Хилбертове базе. Тада B_1 и B_2 имају исту кардиналност, односно $\#B_1 = \#B_2$, ако је $\#$ ознака за кардинални број.*

Доказ. Ако H има коначну димензију, резултат следи на основу познатих тврђења линеарне алгебре.

У доказу бесконачно димензионалног случаја, поред Кантор Бернштајнове теореме, користимо и следећи резултат теорије скупова:

Ако је A бесконачан скуп, онда је $\#(\mathrm{N}\times A)=\#A$.

Нека је $B_1=\{e_i \mid i\in I\}$, и $B_2=\{f_j \mid j\in J\}$. За фиксирано $j\in J$ нека I_j означава скуп оних индекса $i\in I$ за које је $\langle e_i, f_j\rangle \neq 0$. Према последици 6.4 скуп I_j је највише пребројив, и може се поређати у низ $I_j=\{i_{j,1}, i_{j,2},\dots\}$. Важи и

$$I=\bigcup_{j\in J} I_j,$$

јер би у супротном постојао $i\in I$ који не припада нити једном од скупова I_j, односно такав да је $e_i\perp f_j$ за све j што би значило да ситем B_2 не испуњава услов (v) Става 6.5.

Пресликавање $\Psi:\mathrm{N}\times J\to\bigcup_{j\in J} I_j = I$ дато са $\Psi(k,j)=i_{j,k}$ је „на“, (мада можда није $1-1$), те је стога

$$\#I=\#\bigcup_{j\in J} I_j \geq \#(\mathrm{N}\times J)=\#J.$$

Обратну неједнакост добијамо заменом улога, па је $\#I=\#J$ према Кантор-Бернштајновој теореми. □

6.9. Дефиниција. Кардинални број произвољне Хилбертове базе датог Хилбертовог простора H назива се *Хилбертова* или *ортогонална димензија* простора H.

Према претходном ставу Хилбертова димензија је коректно дефинисана.

За Банахове просторе X_1 и X_2 кажемо да су *изометрички изоморфни* ако и само ако постоји бијекција $A: X_1\to X_2$ таква да важи

$$||Ax||=||x||, \qquad \text{за све } x \tag{3}$$

Сваки Хилбертов простор је Банахов, па и за Хилбертове просторе H_1 и H_2 кажемо да су изометрички изоморфни ако постоји бијекција $A: H_1\to H_2$ која испуњава услов (3). Међутим, у случају Хилбертових простора (3) је еквивалентно са

$$\langle Ax, Ay\rangle=\langle x,y\rangle, \qquad \text{за све } x,y \tag{4}$$

Очигледно (4) повлачи (3), јер можемо да ставимо $x=y$. Обратно следи из поларизационог идентитета (формула (21) четврте главе) примењеног на оператор A^*A:

$$\langle A^*Ax,y\rangle=\frac{1}{4}\big(\langle A^*A(x+y),x+y\rangle-\langle A^*A(x-y),x-y\rangle+ \\ +i\langle A^*A(x+iy),x+iy\rangle-i\langle A^*A(x-iy),x-iy\rangle\big)$$

и истог тог идентитета примењеног на јединични оператор I, тј. идентитета (4) прве главе.

6.10. Став. *Хилбертови простори* H_1 *и* H_2 *простори су изометрички изоморфни ако и само ако њихове базе имају исту кардиналност.*

Доказ. Нека је $A : H_1 \to H_2$ изоморфизам, и нека је e_i, $i \in I$ Хилбертова база простора H_1. Скуп $f_i = Ae_i$. $i \in I$ је ортонормиран у H_2, јер је због (4) $\langle f_i, f_j\rangle = \langle Ae_i, Ae_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Он је и потпун, јер ако $y \perp f_i$ за све $i \in I$, онда $y = Ax$ за неко $x \in H_1$, па имамо $0 = \langle y, f_i\rangle = \langle Ax, Ae_i\rangle = \langle x, e\rangle_i$, односно $x \perp e_i$ за све $i \in I$. Како је систем e_i потпун, то је $x = 0$, а тиме и $y = Ax = 0$.

Системи e_i и f_i имају исту кардиналност, јер је A бијекција између њих, чиме је један смер доказан.

Нека су e_i и f_i, $i \in I$ базе простора H_1 и H_2. Тада постоји бијекција $A : \{e_i \mid i \in I\} \to \{f_i \mid i \in I\}$. За произвољан вектор $x \in H_1$ постоје јединствени скалари α_i, $i \in I$ такви да је $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$. Дефинишимо $Ax = \sum_{i\in I} \alpha_i f_i$, тј.

$$A\sum_{i\in I}\alpha_i e_i = \sum_{i\in I}\alpha_i f_i.$$

Пресликавање A је добро дефинисано и линеарно. Очигледно је и бијективно, при чему је инверзно дато са $A^{-1}\sum_{i\in I}\alpha_i f_i = \sum_{i\in I}\alpha_i e_i$. Најзад, због Става 6.5 (iv) важи и

$$\left\langle A\sum_{i\in I}\alpha_i e_i, A\sum_{i\in I}\beta_i e_i\right\rangle = \left\langle \sum_{i\in I}\alpha_i f_i, \sum_{i\in I}\beta_i f_i\right\rangle = \sum_{i\in I}\alpha_i\overline{\beta_i} = \left\langle \sum_{i\in I}\alpha_i e_i, \sum_{i\in I}\alpha_i e_i\right\rangle,$$

па је A изометрија. □

6.11. Последица. *Постоји изоморфизам* $\Phi : H^* \to H$.

Доказ. Како је познато из Рисове теореме о репрезентацији ограничених линеарних функционала, постоји пресликавање $\Psi : H^* \to H$ које сваком линеарном функционалу φ додељује вектор $y = \Phi(\varphi)$ такав да је $\varphi(x) = \langle x, y\rangle$. То пресликавање је изометрично, јер је $||\varphi|| = ||y||$, али није линеарно, већ је антилинеарно, тј. ако функционалима φ_1, φ_2 одговарају вектори y_1 и y_2, онда функционалу $\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2$ одговара вектор $\overline{\alpha}_1 y_1 + \overline{\alpha}_2 y_2$.

Да би се ослободили незгодног комплексног конјуговања на скаларима, уочимо пресликавање $\Phi_1 : H \to H$ задато са

$$\Phi_1\left(\sum_{i\in I}\alpha_i e_i\right) = \sum_{i\in I}\overline{\alpha}_i e_i,$$

где је e_i нека Хилбертова база. Лако се проверава да је Φ_1 антилинеарно и изометрично, те је отуда композиција $\Psi = \Phi_1 \circ \Phi : H^* \to H$ линеарно и изометрично пресликавање. □

Шаудерова[1] база

6.12. Дефиниција. Нека је X Банахов простор. Низ вектора x_1, x_2, … из X се назива *Шаудерова база* ако се сваки други вектор из X може на јединствен

---

[1] Juliusz Pawel Schauder (1899-1943) – пољски математичар

начин приказати као сума реда

$$x=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j x_j \tag{5}$$

за неке скаларе α_j. Овде је реч, разуме се о конвергенцији у Банаховом простору X, односно, (5) значи да $\left\|x-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right\|\to 0$, кад $n\to+\infty$.

Јасно, свака Шаудерова база је линеарно независан скуп. Заиста, ако би неки његов коначан подскуп био линеарно зависан, односно, ако би важило

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k=0,$$

при чему нису сви λ_k једнаки нули, онда би се вектор (5) могао приказати и као

$$x=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+\lambda_j)x_j+\sum_{j=n+1}^{+\infty}\alpha_j x_j.$$

Посебно треба водити рачуна да је редослед сабирања у (5) битан. Нико не тврди да је тај ред комутативно конвергентан. Стога Шаудерова база није *скуп* вектора, него управо како је и дефинисано, *низ* вектора.

За Шаудерову базу кажемо да је *нормирана* ако је $||x_n||=1$ за све n. Јасно, свака се Шаудерова база може нормирати, узимајући $x_n/||x_n||$ место x_n што доводи да замене скалара α_n са $\alpha_n||x_n||$ у (5)

Познато је да постоје Банахови простори који немају Шаудерову базу. Неки примери су једноставни, а неки су и сложени. Видети напомену после става 6.18.

6.13. Став. *Нека је x_n Шаудерова база Банаховог простора X. Пресликавања $P_n: X\to X$ дата са*

$$P_n x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j,\qquad x=\sum_{j=1}^{+\infty}\alpha_j x_j$$

имају следећа својства:

(i) $P_n^2=P_n$, *односно P_n је пројектор;*
(ii) $P_nP_m=P_mP_n=P_{\min\{m,n\}}$*;*
(iii) *слика* $\operatorname{ran}P_n$ *је коначно димензионалан простор димензије n.*
(iv) $P_n\in L(X)$, *тј. P_n су ограничени линеарни оператори.*

Доказ. Својства (i), (ii) и (iii) су очигледна, као и то да је P_n линеаран. Једино нетривијално је ограниченост пресликавања P_n.

У ту сврху уочимо нову норму на X дату са:

$$|[x]|:=\sup_{n\ge1}||P_nx||.$$

Ова норма је коректно дефинисана, јер $P_nx\to x$, $n\to+\infty$, па је реч о ограниченом низу. Штавише, $||P_nx||\to||x||$, одакле је

$$||x||\le|[x]|. \tag{6}$$

Међутим, имамо и

$$|[P_nx]|=\sup_{m\ge1}||P_mP_nx||=\sup_{m\ge1}||P_{\min\{m,n\}}x||=\sup_{1\le m\le n}||P_mx||\le|[x]|,$$

што значи да је P_n ограничен у нормираном простору $(X,|[\cdot]|)$, и да је

$$|[P_n]|\le 1. \tag{7}$$

Даље, важи

$$|[x-P_nx]|=\sup_{m\ge1}\|P_m(x-P_nx)\|=\sup_{m\ge1}\|P_mx-P_{\min\{m,n\}}x\|=\sup_{m>n}\|P_mx-P_nx\|\to0, \tag{8}$$

кад $m,n\to+\infty$, јер је низ P_nx Кошијев у полазној норми, тј. у $(X,\|\cdot\|)$. Формула (8) онда значи да $P_nx\to x$ и у новој норми $|[\cdot]|$.

Доказаћемо сада да је простор X комплетан и у новој норми. Нека $\tilde X$ означава комплетирање простора X у односу на $|[\cdot]|$. За дато $\tilde x\in\tilde X$ постоји низ x_n, Кошијев у $|[\cdot]|$ такав да $|[\tilde x-x_n]|\to0$. Међутим, тада је, због (7) и низ P_kx_n Кошијев у $|[\cdot]|$, па постоји

$$P_k\tilde x=\lim_{n\to+\infty}P_kx_n. \tag{9}$$

Штавише, тај лимес не зависи од избора Кошијевог низа, већ само од $\tilde x$, јер ако су x_n и x_n' два Кошијева низа који конвергирају ка $\tilde x$, онда мора бити $|[x_n-x_n']|\to0$, а одатле и из (7) $|[P_kx_n-P_kx_n']|\to0$. Тако је са (9) коректно дефинисано $P_k\tilde x$. Како је потпростор $\operatorname{ran}P_k$ коначне димензије (и то димензије k) он је затворен, па $P_k\tilde x\in\operatorname{ran}P_k=\mathscr{L}in\{x_1,\ldots,x_k\}$, односно

$$P_k\tilde x=\sum_{j=1}^{k}\alpha_jx_j.$$

При томе су α_j једни те исти за било које k, јер за $l>k$ имамо $P_lP_k=P_k$.

Даље, имамо

$$|[\tilde x-P_k\tilde x]|\le|[\tilde x-x_n]|+|[x_n-P_kx_n]|+|[P_kx_n-P_k\tilde x]|\le2|[\tilde x-x_n]|+|[x_n-P_kx_n]|.$$

Први сабирак се може учинити мањим од ε независно од k, за довољно велико n, а други за тако одабрано n тежи ка нули. Отуда је

$$|[\tilde x-P_k\tilde x]|\to0.$$

Између осталог низ $P_k\tilde x$ је Кошијев у X (не заборавимо $P_k\tilde x\in\operatorname{ran}P_k\le X$). Међутим, тада је због (6) низ $P_k\tilde x$ Кошијев и у полазној норми, па је

$$\|x-P_k\tilde x\|\to0,\qquad\text{тј.}\qquad x=\sum_{k=1}^{+\infty}\alpha_kx_k.$$

Због (8) онда је и $|[x-P_k\tilde x]|\to0$ и отуда $\tilde x=x$. Дакле, произвољно $\tilde x\in\tilde X$ у ствари припада X, тј. $\tilde X=X$, па је X комплетан у односу на нову норму.

Сада на простору X имамо две норме, полазну $\|\cdot\|$ и нову $|[\cdot]|$. Простор X је комплетан у односу на обе и још је $\|x\|\le|[x]|$. Према последици теореме о затвореном графику, те две норме су еквивалентне, тј. постоји $m>0$ са својством

$$m|[x]|\le\|x\|\le|[x]|.$$

Због тога, и због (7) је

$$\|P_nx\|\le|[P_nx]|\le|[x]|\le\frac{1}{m}\|x\|,$$

односно P_n су ограничени пројектори. □

6.14. Последица. *Нека је x_n Шаудерова база Банаховог простора X. Пресликавање $\varphi_n : X \to \mathrm{K}$, $\varphi_n(x) = \alpha_n$, где је α_n јединствени скалар из развоја (5) је ограничен линеаран функционал. Ако је, још, база нормирана, онда су фукционали φ_n униформно ограничени.*

Доказ. Лако се види да је пресликавање φ_n линеарно. Заиста, ако је $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j x_j$ и $y = \sum_{j=1}^{+\infty} \beta_j x_j$, онда је $\lambda x + \mu y = \sum_{j=1}^{+\infty} (\lambda\alpha_j + \mu\beta_j) x_j$, па је $\varphi_n(\lambda x + \mu y) = \lambda\alpha_n + \mu\beta_n = \lambda\varphi_n(x) + \mu\varphi_n(y)$.

Што се тиче ограничености, имамо $\varphi_n(x)x_n = P_n x - P_{n-1}x$, и отуда

$$|\varphi_n(x)|\,\|x_n\| = \|\alpha_n x_n\| = \|P_n x - P_{n-1}x\| \leq (\|P_n\| + \|P_{n-1}\|)\|x\| \leq \frac{2}{m}\|x\|,$$

где је m константа из претходног става. Тако је $\|\varphi_n\| \leq 2/(m\|x_n\|)$. □

6.15. Примери. 1° Низ вектора e_1, e_2, …, где је $e_n = (0,0,\dots,0,1,0,\dots)$ (јединица на n-том месту) је Шаудерова база простора c_0. Заиста, за $x = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ је

$$x = \sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j e_j,$$

јер је

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j \right\| = \|(0,\dots,0,\xi_{n+1},\dots)\| = \sup_{k>n} |\xi_k| \to 0, \qquad n \to +\infty.$$

2° Исти низ вектора јесте Шаудерова база и у просторима l^p, $1 \leq p < +\infty$, што се показује на готово идентичан начин.

3° Низ вектора $x_n(t) = t^n$, $n = 0,1,2,\dots$ *није* Шаудерова база простора $C[a,b]$. Он је истина линеарно независан, и чак фундаменталан у $C[a,b]$ (због Вајерштрасове теореме), али није Шаудерова база.

На пример у простору $C[0,1]$, тј. за $a=0$, $b=1$ имамо $x_1(t) = x_1(t)$ што чини један развој облика (5), али и

$$x_1(t) = \sqrt{t^2} = \sqrt{1-(1-t^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n (1-t^2)^n, \tag{10}$$

при чему ред равномерно конвергира по $t \in [0,1]$. То следи из развоја функције $x \mapsto (1+x)^{1/2}$ у степени ред

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} x^n,$$

који има полупречник конвергенције 1 и који конвергира за $x = \pm 1$, јер је $\binom{1/2}{n} \sim (-1)^{n-1} \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$. Формула (10), према томе, чини другачији развој функције $x_1(t)$, и то само по базним векторима са парним индексима!

Сепарабилност

6.16. Дефиниција. За метрички простор M кажемо да је сепарабилан, ако у њему постоји пребројив свуда густ скуп. Рецимо, скуп реалних бројева (са уобичајеном метриком) јесте сепарабилан, јер је скуп рационалних бројева Q у њему свуда густ и пребројив.

И раван R^2 је сепрабилан простор, јер је у њему свуда густ скуп $\mathrm{Q}\times\mathrm{Q} = \{(a,b)\in\mathrm{R}^2 \mid a,b\in\mathrm{Q}\}$ за који се лако показује да је пребројив. Разматрање можемо наставити и даље, па констатовати (на сличан начин) да су коначно димензионални простори (над R, односно C) сепарабилни.

6.17. Став. *Банахов простор X је сепарабилан ако и само ако има највише пребројив фундаменталан скуп.*

Доказ. Нека је X сепарабилан. Он има пребројив свуда густ скуп, рецимо A. Како је $A\subseteq\mathscr{L}in(A)$ и $\overline{A}=X$, то је $X=\overline{A}\subseteq\overline{\mathscr{L}in(A)}\subseteq X$, па је $\overline{\mathscr{L}in(A)}=X$, односно A је и фундаменталан скуп. (Он не може бити линеарно независан, али то се и не тражи.) Тиме је доказан један смер.

Нека је A највише пребројив фундаменталан скуп у X. Скуп $\mathscr{L}in(A)$ је свуда густ у X али није пребројив, рецимо зато што садржи у себи верну копију поља скалара $\{\alpha x\mid\alpha\in\mathrm{K}\}$, где је $x\in A$ било који вектор. Међутим, ако заменимо скаларе само оним рационалним, такве линеарне комбинације чиниће пребројив свуда густ скуп.

Прецизније, уочимо скуп

$$\mathscr{L}in_{\mathrm{Q}}(A)=\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx_j\ \mathrm{Re}\,\alpha_j,\mathrm{Im}\,\alpha_j\in\mathrm{Q},x_j\in A\right\}.$$

и докажмо да је: 1° пребројив, 2° свуда густ у X.

1° Имамо $\mathscr{L}in_{\mathrm{Q}}(A)=\bigcup_{n=1}^{+\infty}L_n$, где је

$$L_n=\left\{\sum_{j=1}^{n}\alpha_jx_j\ \mathrm{Re}\,\alpha_j,\mathrm{Im}\,\alpha_j\in\mathrm{Q}\right\},$$

при чему смо претпоставили да је фундаменталан скуп A поређан у низ, $A=\{x_1,x_2,\dots\}$. (Истина, није свака коначна линеарна комбинација вектора из A баш линеарна комбинација првих n-вектора, али се може тако приказати, јер међу векторима чију линеарну комбинацију посматрамо постоји онај са највећим индексом, а онима са мањим индексом који не учествују доделимо скалар нула.)

Међутим, L_n нема више елемената него Q^{2n}, јер је пресликавање $\mathrm{Q}^{2n}\ni(\beta_1,\gamma_1,\dots,\beta_n,\gamma_n)\mapsto(\beta_1+i\gamma_1)x_1+\dots+(\beta_n+i\gamma_n)x_n$ очигледно „на“. Како је Q^{2n} пребројив, пребројив је и L_n, а тиме и $\mathscr{L}in(A)$ као пребројива унија пребројивих скупова.

2° Нека су $x\in X$ и $\varepsilon>0$ произвољни. Како је A фундаменталан скуп, постоји $n\in\mathrm{N}$ и скалари $\lambda_j\in\mathrm{C}$, $1\le j\le n$ такви да је $\|x-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jx_j\|<\varepsilon/2$. Међутим, постоје и рационални бројеви β_j,γ_j такви да је $|\mathrm{Re}\,\lambda_j-\beta_j|$, $|\mathrm{Im}\,\lambda_j-\gamma_j|<\varepsilon/(2n\|x_j\|)$ и тада $|\lambda_j-(\beta_j+i\gamma_j)|\le|\mathrm{Re}\,\lambda_j-\beta_j|+|\mathrm{Im}\,\lambda_j-\gamma_j|<\varepsilon/(n\|x_j\|)$, па је

$$\|x-\sum_{j=1}^{n}(\beta_j+i\gamma_j)x_j\|\le\|x-\sum_{j=1}^{n}\lambda_jx_j\|+\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j-(\beta_j+i\gamma_j)|\|x_j\|<\frac{\varepsilon}{2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon}{n\|x_j\|}\|x_j\|=\varepsilon.$$

□

6.18. Став. *Ако Банахов простор X има Шаудерову базу, онда је сепарабилан.*

Доказ. Свака Шаудерова база је фундаменталан скуп. Заиста, ако је x_1, x_2, … Шаудерова база, и $x \in X$ онда је $x = \sum_{j=1}^{+\infty} \alpha_j x_j = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ за неке скаларе α_j, односно свако $x \in X$ је лимес коначних линеарних комбинација базних вектора.

Тврђење онда следи на основу претходног става. □

Примедба 1: Према томе, ако простор није сепарабилан, онда нема Шаудерову базу. Тврђење обратно, овом ставу, међутим, није тачно. Постоји сепарабилан Банахов простор који нема Шаудерову базу. Тај пример није једноставан.

6.19. Став. *Ако у X постоји непребројив* потпуно дискретан *скуп, онда X није сепарабилан.*

Примедба 2: За скуп A у метричком простору (M,d) кажемо да је потпуно дискретан ако постоји $\delta > 0$ такво да за различите x, $y \in A$ важи $d(x,y) > \delta$.

Доказ. Претпоставимо да је A непребројив потпуно дискретан скуп, тј. да је $d(x,y) > \delta$ за све различите x, $y \in X$ и неко фиксирано $\delta > 0$. Тада су кугле

$$B(x;\delta/2), \qquad x \in A \tag{11}$$

међусобно дисјунктне.

Претпоставимо супротно, да је X сепарабилан. Тада постоји прбројив скуп B свуда густ у X. Како онда свака тачка из X има тачку из B на произвољно малој удаљености, то посебно важи и за елементе скупа A. Отуда свака кугла (11) садржи бар по један елемент из B. Како су кугле дисјунктне, то су и ти елементи из B међусобно различити. А како кугли има непребројиво много, то излази и да је скуп B непребројив супротно претпоставци. □

6.20. Примери. Простори низвова c_0, l^p, $1 \le p < +\infty$ су сепарабилни. Наиме, као фундаменталан скуп може послужити низ вектора

$$e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots), \qquad \text{(јединица на } n\text{-том месту).} \tag{12}$$

И простор c конвергентних низова је сепарабилан. Наиме, један његов фундаменталан скуп чине вектори (12) и вектор $e = (1,1,1,\dots)$ - видети ????

Међутим, простор l^∞ свих ограничених низова није сепарабилан. За произвољан скуп $E \subseteq \mathrm{N}$ уочимо низ χ_E који се састоји од нула и јединица, и то тако да се на n-том месту налази јединица ако и само ако $n \in E$. Сви дати низови су ограничени и $||\chi_E|| = 1$. међутим, ако је $E \ne F$, онда се у разлици $\chi_E - \chi_F$ барем на једном месту налази 1 или -1, док се на осталим, поред бројева ± 1 могу налазити и нуле. Отуда је $||\chi_E - \chi_F|| = 1$. Дакле скуп

$$\{\chi_E \mid E \subseteq \mathrm{N}\}$$

је потпуно дискретан. Он је и непребројив, јер подкупова скупа N има непребројиво много. Стога l^∞ није сепарабилан.

Простори $C[a,b]$ и $L^p(a,b)$, $1 \le p < +\infty$ су сепарабилни, јер за фундаментален скуп може послужити скуп монома 1, t, t^2, t^3, ….

Међутим, простор $L^\infty(a,b)$ није сепарабилан. Наиме, скуп карактеристичних функција интервала облика (a,u), $a<u<b$ је непребројив (кардиналност му је иста као и скупу (a,b)), и потпуно дискретан, јер је (за $u<v$, на пример)

$$||\chi_{(a,v)}-\chi_{(a,u)}||=||\chi_{[u,v)}||=1.$$

6.21. Став. *Хилбертов простор H је сепарабилан ако и само ако има највише пребројиву Хилбертову базу.*

Доказ. Нека H има пребројиву Хилбертову базу e_n, $n=1,2,\ldots$. Та база је фундменталан скуп, што следи из Става 6.5 (ii). Стога један смер следи на основу става 6.5.

Нека H има непребројиву Хилбертову базу e_i, $i\in I$. Тада за $i\neq j$ имамо

$$||e_i-e_j||^2=\langle e_i-e_j,e_i-e_j\rangle=||e_i||^2+||e_j||^2-2\operatorname{Re}\langle e_i,e_j\rangle=2,$$

тј. $||e_i-e_j||=\sqrt{2}$. Стога је та баз уједно и потпуно дискретан скуп. ☐

Последица: Међу бесконачно димензионалним Хилбертовим просторима, суштински постоји само један сепарабилан. Наиме, сви сепарабилни простори имају пребројиву Хилбертову базу, па се према ставу 6.10 они изоморфни.

Остали појмови базе

Размотрићемо још појам безусловне базе и појам Рисове базе. Њихова својства наводимо без доказа.

6.22. Безусловна база. Нека је X Банахов простор и нека је x_1, x_2, … нека Шаудерова база простора X. Кажемо да је та база *безусловна* ако за сваки избор скалара $\alpha_n\in\mathrm{K}$ ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n x_n \tag{13}$$

безусловно конвергира. Безусловна конвергенција је синоним за комутативну конвергенцију, па то значи заједно са редом конвергира и ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{\sigma(n)}x_{\sigma(n)} \tag{14}$$

за сваку пермутацију $\sigma:\mathrm{N}\to\mathrm{N}$. Показује се у том случају да је сума реда (14) увек једнака суми реда (13). Другим речима ако конвергенција реда (14) не зависи од пермутације, онда ни сума не зависи од пермутације.

Следећи Став наводимо без доказа.

6.23. Став. *Следећи услови су међусобно еквивалентни:*

(i) *Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n$ безусловно конвергира;*

(ii) *Ред $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\alpha_n x_n$ конвергира за сваки ограничен низ комплексних бројева α_n;*

(iii) *Ред* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\pm x_n)$ *конвеīира за сваки избор знакова* $+$*, односно* $-$.

Одавде се може показати да нису све Шаудерове базе безусловне.

Наводимо прмер, тзв. *кумулаīивне базе* у простору c свих конвергентних низова. Нека је $f_n=(0,0,\dots,0,1,1,\dots)$, где јединице почињу од n-тог места. За $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)\in c$ ставимо

$$y_1=\xi_1,\quad y_k=\xi_k-\xi_{k-1},\ \text{за}\ k\geq 2. \tag{15}$$

Тада је $\xi_n=\sum_{k=1}^{n}y_k$ и стога

$$\sum_{n=1}^{N}y_nf_n=(y_1,y_1+y_2,\dots,y_1+y_2+\dots+y_N,\dots)=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\xi_n,\xi_n,\dots).$$

Одатле је

$$\left\|x-\sum_{n=1}^{N}y_nf_n\right\|=\|(0,0,\dots,0,\xi_{n+1}-\xi_n,\xi_{n+2}-\xi_n,\dots)\|=\sup_{k>n}|\xi_k-\xi_n|\to 0,$$

односно

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}y_nf_n. \tag{16}$$

Због једнакости (15) представљање (16) је јединствено. Тако f_n чине Шаудерову базу простора c. Међутим, та база није безусловна. Наиме, ???

6.24. Рисова база. Нека су H и K Хилбертови простори.

(а) Кажемо да је линеарно пресликавање $S:H\to K$ *тоӣолошки изоморфизам* ако је линеарно, ограничено и ако је S^{-1} такође ограничено. (Тиме је прећутно претпостављено да је S бијективно.)

(б) За низ $x_n\in H$ кажемо да је *Рисова база* ако постоји ортонормирана база e_n простора K и тополошки изоморфизам $S:H\to K$ такав да је $Sx_n=e_n$. (Овде је, пак, прећутно претпоствањено да ке K, а тиме и H, сепарабилан простор.

Карактеризацију Рисове базе наводимо без доказа.

6.25. Став. *Нека је H Хилбертов ӣростор и x_n низ вектора из H. Следећи услови су међусобно еквивалентни:*

(i) *Низ x_n образује Рисову базу ӣростора H;*

(ii) *Низ x_n је безусловна база и ӣостоје константе m и M такве да за све n важи*

$$m\leq\|x_n\|\leq M;$$

(iii) *Низ x_n је Шаудерова база ӣростора H и за сваки низ α_n скалара важи еквиваленција*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_nx_n\ \textit{конверīира}\iff\sum_{n=1}^{+\infty}|\alpha_n|^2<+\infty;$$

(iv) *Низ x_n је фундаментàлан у H и йостоје константе $0 < m < M$ такве да за сваки избор скалара α_n и свако природно N важи*

$$m\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2 \leq \left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n x_n\right\|^2 \leq M\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2;$$

(v) *На H постоји скаларни производ еквивалентан полазном у односу на који је x_n ортонормиран и потпун.*

Вежбања

6.1. Дат је систем *Лежандрових полинома* $L_n(x) = \dfrac{\sqrt{n+1/2}}{2^n n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$

а) Показати да је тај систем потпун и ортонормиран у $L^2(-1,1)$;

б) Показати да се систем L_n добија полазећи од монома $1, x, x^2, \ldots$ Грам-Шмитовим поступком.

6.2. Показати да је систем *Лагерових полинома* $G_n(t) = \dfrac{1}{n!}e^t\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^n e^{-t})$ ортонормиран у простору $L^2((0,+\infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t)$.

6.3. Показати да систем $H_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{x^2/2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2})$ (Ермитови полиноми) чини потпун ортонормиран систем у простору $L^2(-\infty,+\infty)$.

6.4. Доказати да је систем *Харових функција*

$$\varphi_{m,n}(x) = \begin{cases} 2^{m/2}, & (n-1)/2^m \leq x < (n-1/2)/2^m \\ -2^{m/2}, & (n-1/2)/2^m \leq x < n/2^m \\ 0, & x \notin [(n-1)/2^m, n/2^m) \end{cases},$$

$m \in \mathrm{N}$, $1 \leq n \leq 2^m$, један потпун ортонормиран систем у $L^2(0,1)$.

6.5. а) Показати да је систем Радемахерових функција $\varphi_m(x) = (-1)^{[2^m x]}$ ортонормиран али није потпун у $L^2(0,1)$.

б) Доказати да је систем *Волшових функција* $\varphi_{m_1,m_2,\ldots,m_n}(x) = \varphi_{m_1}(x)\varphi_{m_2}(x)\ldots\varphi_{m_n}(x)$, $m_1 < m_2 < \ldots m_n$, потпун ортонормиран систем у $L^2(0,1)$.

6.6. Израчунати $d(e_1, L)$, где је $L = \{x \in l^2 \mid \sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j = 0\}$.

6.7. Дат је скуп $W_2^1(a,b) = \{f : (a,b) \to \mathrm{C} \mid f$ је апсолутно непрекидна и $f' \in L^2(a,b)\}$ – *простор Собољева.*

а) Показати да је са $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t + \int_a^b f'(t)\overline{g'(t)}\mathrm{d}t$ задат скаларни производ на $W_2^1(a,b)$;

б) Показати да је $W_2^1(a,b)$ Хилбертов простор у односу на тако задат скаларни производ.

в) Одредити ортокомплемент скупа $\{e^{int} \mid n \in \mathrm{Z}\}$ у $W_2^1(-\pi,\pi)$.

6.8. Нека је e_j неки потпун ортонормиран систем у Хилбертовом простору H, и нека је f_j неки други ортонормиран систем за који важи $\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\|e_j - f_j\|^2 < +\infty$. Доказати да су коначне линеарне комбинације вектора f_j свуда густе у H, то јест да је f_j такође ПОНС.

6.9. Доказати да је функција $g(x) = e^{\frac{\log x}{\log^2 x + \pi^2}}\sin\frac{\sqrt{x}\log x + \pi}{\log^2 x + \pi^2}$ ортогонална на све полиноме у простору $L^2((0,+\infty), e^{\frac{-\pi\sqrt{x}}{\log^2 x + \pi^2}}\,\mathrm{d}x)$

6.10. Доказати да је низ вектора $e, e_1, e_2, \ldots$ (где је $e = (1,1,1,\ldots)$, а e_n вектор са јединицом на n-том месту и нулама на осталим) Шаудерова база простора c.

6.11. Да ли је простор $NBV[0,1]$ сепарабилан?

6.12. а) Нека је X Банахов простор, и нека је X^* сепарабилан. Доказати да је тада и X сепарабилан. [За пребројив свуда густ скуп функционала $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, наћи векторе x_n на којима φ_n достиже норму, па доказати да је x_n фундаменталан низ.]

б) Примером показати да обрат не важи, тј. да постоји сепарабилан X такав да X^* није сепарабилан.

6.13. Нека је X Банахов простор такав да је X^* сепарабилан, и нека је φ_n неки фундаменталан низ у X^*.

а) Доказати да је функција $d : X \times X \to [0, +\infty)$ дата са

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} |\varphi_n(x-y)|$$

једна метрика на простору X.

б) Доказати да $x_n \xrightarrow{w} x$ ако и само ако $d(x_n, x) \to 0$.

7. КОМПАКТНОСТ

Компактни оператори

7.1. Дефиниција. Нека су X и Y Банахови простори. За линеарно пресликавање $T : X \to Y$ кажемо да је *компактно* ако је слика јединичне лопте B_X у X релативно компактан подскуп простора Y.

Ако је T компактан, онда је и ограничен. Заиста, како је сваки релативно компактан скуп, тотално ограничен, а сваки тотално ограничен уједно и ограничен, то је сликаједничне лопте B_X ограничен подскуп простора Y, на пример $T(B_X) \subseteq B(0;M)$, односно за свако $x \in B_X$ имамо $\|Tx\| \le M$. Тада је $\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|Tx\| \le M$, односно T је ограничен.

Ако је T компактан, онда он слика ограничене скупове у релативно компактне. Заиста, ако је $S \subseteq X$ ограничен, рецимо $S \subseteq B(0;R)$, онда је $A(S) \subseteq A(B(0;R)) = RA(B_X)$. Како је $A(B_X)$ релативно компактан, он је и тотално ограничен, па је такав и $RA(B_X)$ (до на замену ε-мреже, $R\varepsilon$-мрежом). Тада је и $A(S)$ тотално ограничен, као подскуп тотално ограниченог скупа.

Скуп свих компактних оператора из X у Y означаваћемо са $K(X;Y)$, а ако је $X = Y$ онда кратко са $K(X)$.

7.2. Став. *Нека су S, $T \in K(X;Y)$. Тада:*

(а) *Линеарна комбинација компактних оператора је компактан, тј. $\lambda T + \mu S \in K(X;Y)$;*

(б) *Скуп компактних оператора је затворен у норми простора $L(X;Y)$, тј. $K(X;Y) \le L(X;Y)$;*

(в) *Производ компактног и ограниченог оператора је компактан. Прецизније, ако је $S_1 \in K(Y;Z)$ и $S_2 \in K(W;X)$, онда $S_1T \in K(X;Z)$, $TS_2 \in K(W;Y)$. Посебно, ако је $X = Y$, онда је $K(X)$ двострани идеал у $L(X)$.*

Доказ. (а) Нека су скупови $A = T(B_X)$, $B = S(B_X)$ слике јединичне лопте операторима T односно S. Према претпоставци скупови A и B су тотално ограничени. Нека је, још $C = (\lambda T + \mu S)(B_X)$. Докажимо и да је C тотално ограничен скуп. Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Тада постоји коначна $\varepsilon/2|\lambda|$-мрежа за A, рецимо a_1, a_2, …,

a_n, и коначна $\varepsilon/2|\mu|$-мрежа за B, рецимо b_1, b_2, …, b_m. Доказаћемо да је скуп $\{\lambda a_i + \mu b_j \mid 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$ коначна ε-мрежа за C. Заиста, ако $y \in C$, онда је $y = (\lambda T + \mu S)x = \lambda Tx + \mu Sx$ за неко $x \in B_X$. Међутим, тада $Tx \in A$, па постоји $1 \le i \le n$ такво да је $||Tx - a_i|| < \varepsilon/2|\lambda|$ и слично, $Sx \in B$, па постоји $1 \le j \le m$ такво да је $||Sx - b_j|| < \varepsilon/2|\mu|$. Но, тада је и

$$||y - (\lambda a_i + \mu b_j)|| = ||\lambda(Tx - a_i) + \mu(Sx - b_j)|| \le |\lambda|\,||Tx - a_i|| + |\mu|\,||Sx - b_j|| < \varepsilon.$$

(б) Нека је $T_n \in K(X;Y)$ низ компактних оператора који конвергира ка T у норми простора $L(X;Y)$, тј. $||T_n - T|| \to 0$. Означимо са $A = T(B_X)$, односно $A_n = T_n(B_X)$ слике јединичне лопте операторима T, односно T_n. Нека је $\varepsilon > 0$ дато. Тада из $||T_n - T|| \to 0$ следи да постоји природан број n такав да је $||T_n - T|| < \varepsilon/2$. За тако одабрано n, скуп A_n је тотално ограничен, па има коначну $\varepsilon/2$-мрежу. Нека су то вектори a_1, a_2, …, a_m. Тврдимо да исти вектори образују коначну ε-мрежу за скуп A. Заиста, ако $y \in A$, онда $y = Tx$ за неко $x \in B_X$. Како за такво x, $T_n x \in A_n$, то постоји j са својством $||T_n x - a_j|| < \varepsilon/2$ и тада:

$$||y - a_j|| = ||Tx - T_n x + T_n x - a_j|| \le ||T - T_n||\,||x|| + ||T_n x - a_j|| < (\varepsilon/2)\cdot 1 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(в) Докажимо прво да ограничен оператор $S_1 \in L(Y;Z)$ слика релатвино компкатне скупове у релативно компактне. Нека је $A \subseteq Y$ релативно компактан, тј. тотално ограничен скуп, и нека је $\varepsilon > 0$ дато. Тада скуп A има коначну $\varepsilon/||S_1||$-мрежу, рецимо y_1, …, y_m. Тврдимо да тада вектори $S_1 y_1$, $S_1 y_2$, …, $S_1 y_m$ чине коначну ε-мрежу за $S_1(A)$. Заиста, ако $z \in S_1(A)$ онда је $z = S_1 y$ за неко $y \in A$, па постоји $1 \le j \le m$ тдј. $||y - a_j|| < \varepsilon/||S_1||$. Но, тада је $||z - S_1 a_j|| = ||S_1(y - a_j)|| \le ||S_1||\,||y - a_j|| < \varepsilon$.

Ако је $T \in K(X;Y)$ компактан, и $S_1 \in L(Y;Z)$ ограничен, онда T слика ограничене скупове у релативно компактне, а S_1 релативно компактне у релативно компактне. Ако је $A \subseteq X$ ограничен, онда је $T(A)$ релативно компактан, а $S_1 T(A)$ такође релативно компактан, па је $S_1 T$ компактан.

Слично, ако је $S_2 \in L(W;X)$ ограничен, а $T \in K(X;Y)$ компактан, онда S_2 пресликава ограничене скупове у ограничене, а T слика ограничене скупове у релативно компактне. Према томе, ако је $A \subseteq W$ ограничен, онда је $S_2(A)$ такође ограничен, па је $TS_2(A)$ релативно компактан, па је TS_2 компактан. ☐

7.3. Лема. *Нека је H Хилбертов простор, и нека је x_n произвољан ограничен низ. Тада x_n има слабо конвергентан подниз.*

Доказ. Нека је e_i, $i \in I$ Хилбертова база за H. Скуп индекса $\{i \in I \mid \langle x_n, e_i\rangle \ne 0$, за све $n\}$ је највише пребројив, јер је пребројива унија највише пребројивих скупова $I_n = \{i \in I \mid \langle x_n, e_i\rangle \ne 0\}$.

Нека су, дакле, e_1, e_2, итд. они базни вектори за које је $\langle x_n, e_j\rangle \ne 0$ за барем једно n. Њихов затворени линеарни омотач означимо са H_1, а њихов ортокомплемент са H_2. Према томе, остали базни вектори $e_\alpha \ne e_j$ припадају H_2, док сви $x_n \in H_1$ јер је због Става 6.5 (ii)

$$x_n = \sum_{j=1}^{+\infty} \langle x_n, e_j\rangle e_j.$$

Како је низ $\langle x_n, e_1\rangle$ ограничен ($|\langle x_n, e_j\rangle| \le ||x_n||$), то он има конвергентан подниз у $\mathbb{C}$. Нека је $x_n^{(1)}$ одговарајући подниз низа x_n. Низ $\langle x_n^{(1)}, e_j\rangle$ је такође ограничен, па има конвегентан подниз. Одговарајући подниз низа $x_n^{(1)}$ означимо са $x_n^{(2)}$, итд. Тако долазимо до низа поднизова $x_n^{(k)}$ од којих је сваки следећи подниз претходног. Узмимо дијагонални подниз $x_n^{(n)}$. Он је подниз свих поменутих поднизова (почев од n), па лимес

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x_n^{(n)}, e_j\rangle$$

постоји за свако j.

Са базних вектора прећи ћемо на све векторе из H_1 помоћу принципа конвергенције. Наиме, низ функционала

$$\varphi_n(x) = \overline{\langle x_n^{(n)}, x\rangle}$$

је линеаран и униформно ограничен. Наиме, $|\varphi_n(x)| \le ||x_n^{(n)}||\,||x||$, па је $||\varphi_n|| \le ||x_n^{(n)}|| \le M < +\infty$, и конвергира за $x = e_j$, а вектори e_j образују фундаменталан скуп у H_1. Стога $\varphi_n(x)$ конвергира за свако $x \in H_1$.

Ако је $x \in H$, онда је, према теореми о ортопројекцији, $x = y + z$ за јединствене $y \in H_1$ и $z \in H_2$. Но, како је $x_n \perp z$ за све n то је

$$\lim_{n\to+\infty}\langle x_n^{(n)}, x\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle x_n^{(n)}, y\rangle,$$

а последњи постоји.

Стога је $x_n^{(n)}$ тражени слабо конвергентан подниз. □

7.4. Став. *Нека је $T \in K(X;Y)$ компактан оператор.*

(а) *За сваки низ $x_n \in X$ важи импликација*

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow Tx_n \to Tx. \qquad (1)$$

Другим речима, компактни оператори преводе слабу конвергенцију у јаку.

(б) *Ако су, још, X и Y Хилбертови простори, онда важи и обрат, тј. ако је импликација (1) тачна за сваки низ $x_n \in X$, онда је T компактан.*

Доказ. (а) Преласком на низ $x_n - x$ уместо x_n довољно је доказати (1) за случај $x = 0$.

Претпоставимо супротно, нека је $x_n \xrightarrow{w} 0$, и нека није тачно да $||x_n|| \to 0$. Тада постоји подниз x_{n_k} низа x_n такав да је $||x_{n_k}|| \ge \varepsilon > 0$ за неко $\varepsilon > 0$.

На основу Става 4.14 (а), низ норми $||x_n||$ је ограничен, па је скуп вредности подниза x_{n_k} ораничен скуп у X. Како је T компактан, скуп вредности низа Tx_{n_k} је релативно компактан, па низ Tx_{n_k} има конвергентан подниз, који ћемо опет означити са Tx_{n_k} да не би компликовали ознаке, тј. $Tx_{n_k} \to y$ за неко $y \in Y$. Одатле је

$$||y|| = \lim ||Tx_{n_k}|| \ge \varepsilon. \qquad (2)$$

Међутим, с једне стране важи и $Tx_{n_k} \xrightarrow{w} y$, а с друге стране, како је T компактан, он је и ограничен, па $Tx_n \xrightarrow{w} 0$, што важи и за подниз Tx_{n_k}. Како је слаби лимес јединствен, то је $y = 0$, што се коси са (2).

(б) Нека је $y_n \in A(B_H)$ произвољан низ из слике јединичне лопте. Тада је $y_n = Ax_n$ за неко $x_n \in B_H$. Низ x_n је ограничен, па има слабо конвергентан подниз, рецимо $x_{n_k} \overset{w}{\to} x$. Према претпоставци тада $Ax_{n_k} \to Ax$. Дакле, слика јединичне лопте је релативно компактан скуп. □

Примедба: Обратан смер осим за Хилбертове просторе важи и за рефлексивне Банахове просторе.

7.5. Лема. *Нека је $A \subseteq M$ релативно компактан скуп у метричком простору M, онда у A постоји пребројив свуда густ скуп.*

??? Изгледа да ова лема није битна ????

Доказ. Скуп A је релативно компактан, па је и тотално ограничен. Отуда за свако $\varepsilon > 0$ постоји коначна ε-мрежа за A. Показаћемо прво, да се та мрежа може одабрати тако да све тачке припадају самом скупу A.

Нека је $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ коначна $\varepsilon/2$-мрежа за A. Можемо претпоставити да свака лопта $B(x_j; \varepsilon/2)$ садржи бар једну тачку из A, јер у супротном, тачку x_j можемо да изоставимо. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ такви да је $d(a_j, x_j) < \varepsilon/2$. Тврдимо да a_j чине коначну ε мрежу за A. Заиста, ако $x \in A$ тада постоји x_j такво да је $d(x, x_j) < \varepsilon/2$ и тада $d(x, a_j) \le d(x, x_j) + d(x_j, a_j) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Узимајући $\varepsilon = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$ налазимо низ коначних $1/k$-мрежа за скуп A. Означимо их са $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n_k}^{(k)}$. Скуп

$$\{x_j^{(k)} \mid k \ge 1, 1 \le j \le n_k\}$$

је пребројив као преборијива унија коначних. Он је и свуда густ, јер за све $\varepsilon > 0$ и све $x \in A$ постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да је $1/k < \varepsilon$ и $1 \le j \le n_k$ такво да је $d(x, x_j^{(k)}) < 1/k$, одакле је и $d(x, x_j^{(k)}) < \varepsilon$. □

7.6. Став [Шаудер]. *Оператор $T : X \to Y$ је компактан ако и само ако је $T^* : Y^* \to X^*$ компактан.*

Доказ. Претпоставимо да је T компактан. Тада је $T(B_X)$ тотално ограничен скуп, па има своју коначну $\varepsilon/3$ мрежу, односно постоје $x_1, x_2, \dots, x_n \in B_X$, такви да Tx_j чине коначну $\varepsilon/3$ мрежу скупа $T(B_X)$. Уочимо пресликавање $S : Y^* \to \mathbb{C}^n$ дато са

$$S\varphi = (\varphi(Tx_1), \varphi(Tx_2), \dots, \varphi(Tx_n)) = ((T^*\varphi)x_1, (T^*\varphi)x, \dots, (T^*\varphi)x_n).$$

Ово пресликавање је непрекидно, јер су непрекидна сва координатна пресликавања $\varphi \mapsto \varphi(Tx_j)$. Стога је $S(B_{Y^*})$ ограничен скуп, а како је кодомен $\mathbb{C}^n$ коначно димензионалан, то је он и тотално ограничен, па има своју коначну $\varepsilon/3$-мрежу. Другим речима, постоје $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ такви да $S\varphi_1, S\varphi_2, \dots, S\varphi_m$ чине коначну $\varepsilon/3$ мрежу за $S(B_{Y^*})$.

Доказаћемо да вектори $T^*\varphi_j$, $1 \le j \le m$ чине коначну ε-мрежу за $T^*(B_{Y^*})$. Ако $\varphi \in B_{Y^*}$ онда постоји $1 \le j \le m$ такво да је $||S\varphi - S\varphi_j|| < \varepsilon/3$, а како је за све $1 \le i \le n$, $(T^*\varphi)x_i - (T^*\varphi_j)x_i$ заправо i-та координата вектора $S\varphi - S\varphi_j$ важи и

$$|(T^*\varphi)x_i - (T^*\varphi_j)x_i| \le ||S\varphi - S\varphi_j|| < \varepsilon/3,$$

за све $1 \le i \le n$. Нека је $x \in B_X$ произвољно. Тада постоји i такво да је $\|Tx - Tx_i\| < \varepsilon/3$, па имамо

$$\begin{aligned}|(T^*\varphi)x - (T^*\varphi_j)x| &\le |(T^*\varphi)x - (T^*\varphi)x_i| + |(T^*\varphi)x_i - (T^*\varphi_j)x_i| + \\ &\quad + |(T^*\varphi_j)x_i - (T^*\varphi_j)x| \le \\ &\le \|\varphi\|\|Tx - Tx_i\| + \varepsilon/3 + \|\varphi_j\|\|Tx_i - Tx\| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon,\end{aligned}$$

јер је $\|\varphi\|$, $\|\varphi_j\| \le 1$ и $(T^*\varphi)x = \varphi(Tx)$. Ако у последњој неједнакости узмемо супремум по свим $x \in B_X$ добијамо $\|T^*\varphi - T^*\varphi_j\| < \varepsilon$, што је и требало доказати.

Тако смо доказали имликацију $T \in K(X;Y)$ повлачи $T^* \in K(Y^*;X^*)$. Докажимо обратну.

Нека је $T : Y^* \to X^*$ компактан. Према већ доказаном, оператор $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ је компактан. Означимо са Φ канонско утапање $\Phi : X \to X^{**}$ које вектору $x \in X$ додељује функционал $\Lambda_x \in X^{**}$ израчунавања у тачки, тј. $\Lambda_x(\varphi) = \varphi(x)$. Слично дефинишемо и $\Psi : Y \to Y^{**}$. Пресликавање Φ је изометрија, тиме ограничено, па је композиција $T^{**}\Phi : X \to Y^{**}$ компактно. Међутим, како је

$$(T^{**}\Phi(x))(\varphi) = (T^{**}\Lambda_x)(\varphi) = \Lambda_x(T^*\varphi) = T^*\varphi(x) = \varphi(Tx) = \Lambda_{Tx}(\varphi),$$

то је $T^{**}\Phi(x) = \Lambda_{Tx} = \Psi(Tx)$, односно $T^{**}\Phi = \Psi T$. Дакле, ΨT је компактан оператор, односно слика $\Psi T(B_X)$ је релативно компактан скуп. Међутим, Ψ је изометрија, па је и $T(B_X)$ релативно компактан скуп. ☐

Фредхолмова теорија

7.7. Лема. *Ако је T компактан и $0 \neq \lambda \in \mathrm{C}$, тада је слика оператора $\lambda I - T$ затворен потпростор.*

Доказ. Означимо $K = \ker(\lambda I - T)$. На количничком простору X/K дефинишимо оператор $S : X/K \to Y$ са

$$S(x + K) = (\lambda I - T)x.$$

(Пресликавање је коректно дефинисано, јер ако $x + K = y + K$ онда $(\lambda I - T)(x - y) = 0$.) Како је $\|S(x + K)\| = \|(\lambda I - T)x\| \le \|\lambda I - T\|\|x\|$, и $\|x\| \le \|x + K\|$, то је $\|S\| \le \|\lambda I - T\|$, односно S је ограничен. Доказаћемо да је S ограничен одоздо, тј. да постоји константа $m > 0$ са својством

$$\|S(x + K)\| \ge m\|x + K\| \qquad \text{за све } x + K \in X/K. \tag{3}$$

Претпоставимо супротно. Тада постоји низ $x_n + K \in X/K$ такав да је $\|x_n + K\| = 1$, и $S(x_n + K) \to 0$. Ово последње значи да $(\lambda I - T)x_n \to 0$. Шта више представник класе x_n се може одабрати тако да буде $\|x_n\| < 1 + \varepsilon$. Тада је низ x_n ограничен, па на основу компактности оператора T низ Tx_n има конвергентан подниз. Рецимо $Tx_{n_k} \to y$. Међутим, тада

$$\lambda x_{n_k} = (\lambda I - T)x_{n_k} + Tx_{n_k} \to 0 + y = y, \tag{4}$$

одакле и $Tx_{n_k} = (1/\lambda)T\lambda x_{n_k} \to (1/\lambda)Ty$, па како низ Tx_{n_k} не може да има две различите граничне вредности закључујемо да је $y - (1/\lambda)Ty = 0$, односно $y \in K$. Према (4) $\|x_{n_k} - (1/\lambda)y\| \to 0$, па је $1 = \|x_{n_k} + K\| \le \|x_{n_k} - (1/\lambda)y\| \to 0$, што је контрадикција.

Према томе, важи (3), а одатле је према Леми 5.13 $\operatorname{ran} S$ затворен потпростор. Доказ је завршен, јер је $\operatorname{ran}(\lambda I - T) = \operatorname{ran} S$. ☐

7.8. Став. *Нека је $T : X \to Y$ компактан оператор и $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$.*

(а) *Језгро оператора $\lambda I - T$ има коначну димензију. Другим речима сопствени потпростор оператора T који одговара сопственој вредности $\lambda \neq 0$ је коначно димензионалан.*

(б) *За низ језгара $K_n = \ker(\lambda I - T)^n$ важи $K_n \subseteq K_{n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$. При томе тај низ не може неограничено да расте, већ је $K_n = K_{n_0}$ за $n \geq n_0$.*

Доказ. (а) Нека је $N = \ker(\lambda I - T)$, тада је $T|_N = \lambda I|_N$, јер је за $x \in N$, $(\lambda I - T)x = 0$, тј. $Tx = \lambda x$. Заједно са T и било која његова рестрикција је компактно пресликавање, па је онда $T(B_N) = \lambda B_N$ релативно компактан скуп. Отуда је $\dim N < +\infty$. (У бесконачно димензионалном простору, лопта није компактан скуп – Став 2.15.)

(б) Ако је $(\lambda I - T)^n x = 0$, онда је, тим пре, и $(\lambda I - T)^{n+1} x = (\lambda I - T)(\lambda I - T)^n x = (\lambda I - T)0 = 0$, па је $K_n \subseteq K_{n+1}$.

Претпоставимо да је увек $K_n \subsetneqq K_{n+1}$, и одаберемо низ $x_n \in K_n$ такав да је $||x_n|| = 1$ и $d(x_n, K_{n-1}) > 1/2$ што је могуће према леми о скоро ортогоналном вектору. Тада за $n > m$ имамо

$$Tx_n - Tx_m = \lambda x_n - (\lambda I - T)x_n + (\lambda I - T)x_m - \lambda x_m.$$

Међутим сви сабирци, осим првог λx_n, припадају K_{n-1}, па је $Tx_n - Tx_m = \lambda x_n - z$ за неко $z \in K_{n-1}$, односно

$$||Tx_n - Tx_m|| = |\lambda| \, ||x_n - (1/\lambda)z|| \geq |\lambda| d(x_n, K_{n-1}) > |\lambda|/2.$$

Тако низ $T_n x_n$ нема ни један Кошијев подниз што противречи компактности оператора T.

Према томе, за неко $n \in \mathbb{N}$ важи $K_n = K_{n+1}$. Нека је сада $m \geq n$. Ако $x \in K_{m+1}$ онда је $(\lambda I - T)^{m+1} x = 0$, па $(\lambda I - T)^{m-n} x \in K_{n+1} = K_n$, отуда је $(\lambda I - T)^m x = (\lambda I - T)^n (\lambda I - T)^{m-n} x = 0$, тј. $x \in K_m$. Дакле за све $m \geq n$ је $K_m = K_{m+1}$. ☐

7.9. Лема. Нека је $T : X \to X$ компактан, и $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Оператор $\lambda I - T$ је „на“ ако и само ако је $\lambda I - T^*$ „$1-1$“.

Доказ. Нека је $\lambda I - T$ „на“, и нека је $(\lambda I - T^*)\varphi = 0$. Тада за свако $x \in X$ важи $(\lambda I - T^*)\varphi x = 0$, тј. $\varphi((\lambda I - T)x) = 0$. Другим речима $\varphi|_{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} = 0$, тј. $\varphi \equiv 0$, јер је $\operatorname{ran}(\lambda I - T) = X$.

Нека сада $\lambda I - T$ није „на“. Како је $\operatorname{ran}(\lambda I - T) \subsetneqq X$ затворен потпростор, то према једној од последица Хан-Банахове теореме (Последица 3.13 (г)) постоји функционал $0 \neq \varphi \in X^*$, такав да је $\varphi|_{\operatorname{ran}(\lambda I - T)} \equiv 0$, односно за све $x \in X$ је $\varphi((\lambda I - T)x) = 0$. Последње је, по дефиницији еквивалентно са $((\lambda I - T^*)\varphi)x = 0$, односно $0 \neq \varphi \in \ker(\lambda I - T^*)$. ☐

7.10. Став (Фредхолмова алтернатива). *Нека је T компактан. Тада је оператор $\lambda I - T$ инјективан ако и само ако је сурјективан.*

Доказ. Нека је $\lambda I - T$ сурјективан. Претпоставимо да није инјективан, тј. да $\ker(\lambda I - T)$ није тривијално. Означимо $K_n = \ker(\lambda I - T)^n$. Нека је $0 \neq x_1 \in$

$\ker(\lambda I - T) = K_1$. Како је $\lambda I - T$ „на“, то постоји x_2 са својством $(\lambda I - T)x_2 = x_1$. Тада $x_2 \in K_2$, али $x_2 \notin K_1$. Према томе $K_1 \subsetneqq K_2$. Наставимо индукцијом. Ако је $K_{n-1} \subsetneqq K_n$ и $0 \neq x_n \in K_n \setminus K_{n-1}$. Због сурјективности оператора $\lambda I - T$ налазимо x_{n+1} са својством $(\lambda I - T)x_{n+1} = x_n \neq 0$. Тада $x_{n+1} \in K_{n+1} \setminus K_n$.

Дакле, за све n важи $K_n \subsetneqq K_{n+1}$ што се противи Ставу 7.8. Тиме смо доказали да сурјективност повлачи инјективност.

Нека је сада $\lambda I - T$ инјективан. Доказаћемо да је конјугован оператор $\lambda I - T^*$ сурјективан. Нека је $\psi \in X^*$ произвољно. На слици $\mathrm{ran}(\lambda I - T)$ дефинишемо функционал φ са

$$\varphi((\lambda I - T)x) = \psi(x). \tag{5}$$

Очигледно је реч о линеарном пресликавању. Оно је и ограничено. Наиме, $\lambda I - T$ је инјективно, $\mathrm{ran}(\lambda I - T)$ је затворен потпростор, па је пресликавање $\lambda I - T : X \to \mathrm{ran}(\lambda I - T)$ ограничена бијекција Банахових простора, па има непрекидан инверз према теореми о отвореном пресликавању. С друге стране, (5) у ствари значи да је $\varphi = \psi \circ (\lambda I - T)^{-1}$, па је φ ограничено као композиција два ограничена оператора. Према Хан-Банаховој теореми, функционал φ продужимо до читавог простора X. Најзад (5) се може прочитати и као $(\lambda I - T)^* \varphi = \psi$, па како је ψ било произвољно, то значи да је $\lambda I - T^*$ сурјективно.

Сада, према доказаном у првом кораку закључујемо да је $\lambda I - T^*$ инјективно. Тада је према Леми 7.9, оператор $\lambda I - T$ сурјективан. ☐

7.11. Последица. *Ако је $T : X \to X$ компактан, онда је $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$.*

Доказ. Спектар компактног оператора обавезно садржи нулу. Заиста, у противном би постојао ограничен T^{-1}, па како компактни оператори чине идеал, то би био и $I = TT^{-1}$ компактан, а то је немогуће кад год је простор X бесконачно димензионалан.

Нека је $\lambda \neq 0$ тачка спектра. Ако λ није сопствена вредност, онда је оператор $\lambda I - T$ инјективан, па је према Фредхолмовој алтернативи и сурјективан. Онда постоји његов инверз који је још и ограничен према теореми о отвореном пресликавању. Дакле тада је λ тачка резолвентног скупа. ☐

7.12. Последица. *Нека је $T : X \to X$ компактан оператор. Тада он има највише пребројиво много сопствених вредности, и оне образују нула низ. Такође, све сопствене вредности су коначне вишеструкости, тј. одговарајући сопствени потпростори имају коначне димензије.*

Доказ. Биће довољно да доказажемо да T може имати само коначно много линеарно независних сопствених вектора који одговарају сопственим вредностима λ за које важи $|\lambda| \geq m > 0$.

Претпоставимо супротно, да постоји бесконачно много линеарно независних вектора x_n, $n \in \mathrm{N}$ чије сопствене вредности λ_n испуњавају услов $|\lambda_n| \geq m$.

Уочимо потпросторе $L_n = \mathscr{L}in\{x_1, \ldots, x_n\}$. Они су коначно димензионални, па су затворени. Такође важи $L_n \leq L_{n+1}$, као и $TL_n \subseteq L_n$. Према леми о скоро ортогоналном вектору, постоји $y_n \in L_n$ такво да је $\|y_n\| = 1$ и $d(y_n, L_{n-1}) > 1/2$. Вектор $Ty_n - \lambda_n y_n$ припада мањем потпростору L_{n-1}. Заиста, $y_n = z + \alpha x_n$ за неко

$z \in L_{n-1}$ и неко $\alpha \in \mathrm{C}$, па је

$$Ty_n - \lambda_n y_n = Tz - \lambda_n z + \alpha(Tx_n - \lambda_n x_n) = Tz - \lambda_n z \in L_{n-1}.$$

За $m < n$ и вектор $Ty_m \in L_{n-1}$, па имамо

$$\begin{aligned} ||Ty_n - Ty_m|| &= ||\lambda_n y_n + Ty_n - \lambda_n y_n - T_m y_m|| = \\ &= |\lambda_n| \, ||y_n + \frac{1}{\lambda_n}(Ty_n - \lambda_n y_n - T_m y_m)|| \geq \\ &\geq |\lambda_n| d(y_n, L_{n-1}) > \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

те стога низ Ty_n нема ниједан Кошијев подниз, што се противи компактности оператора T. □

Основи спектралне теорије

7.13. У овом одељку се бавимо компактним операторима на Хилбертовом простору. Мотивацију чини теорема Линеарне алгебре према којој свака симетрична матрица има сличну дијагоналну, те да се на њеној дијагонали налазе сопствене вредности полазне матрице.

У бесконачно димензионалном случају, не можемо писати матрице бесконачног формата, па ћемо потражити еквивалент горе наведене тврдње. Наиме, ако је A симетрична матрица формата $n \times n$, тада постоји база простора R^n, x_1, $\ldots$, x_n, коју чине сопствени вектори, тј. $Ax_j = \lambda_j x_j$, λ_j сопствене вредности. При томе важи

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j. \tag{6}$$

Формула (6) имала би смисла и на беконачно димензионалним просторима, ако се коначна сума замени конвергентним редом. Симетричној матрици одговара самоадјунгован оператор, а појму сопствене вредности, појам тачке спектра.

Међутим, у овом првом сусрету са спектралном теоријом, мораћемо да претпоставимо и да је оператор A компактан, поред тога што је самоадјунгован. Нешто већ знамо о компактним операторима на Банаховим просторима. Али на Хилбертовим просторима који су посебан случај Банахових можемо очекивати и додатна својства.

7.14. Став. *Нека је* $A = A^* \in L(H)$. *Тада је*

$$||A|| = \sup_{x \in X, ||x||=1} |\langle Ax, x \rangle|. \tag{7}$$

Доказ. Нека је

$$C = \sup_{x \in H, ||x||=1} |\langle Ax, x \rangle|.$$

Очигледно је за све $x \in H$ (примењујући претходно на $x/||x||$)

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq C ||x||^2.$$

Треба доказати да је $C = ||A||$. Једна неједнакост је једноставна. За $||x|| = 1$ непосредно из Коши-Шварцове неједнакости имамо $|\langle Ax, x \rangle| \leq ||Ax|| \, ||x|| \leq ||A||$, па је $C \leq ||A||$.

За обратну неједнакост подсетимо се да се норма оператора може одредити помоћу његовог билинеарног функционала, тј. да је $||A|| = \sup|\langle Ax, y\rangle|$, где се супремум узима по свим јединичним векторима x, y.

С једне стране, за произвољне јединичне x, $y \in H$ имамо

$$\begin{aligned} |\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle| = \frac{1}{2}|\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle| \leq \\ \leq \frac{1}{2}C(||x+y||^2 + ||x-y||^2) = C(||x||^2 + ||y||^2) = 2C. \end{aligned} \tag{8}$$

С друге стране постоји $\lambda \in [0, 2\pi)$ такво да је $\langle Ax, y\rangle = e^{i\lambda}|\langle Ax, y\rangle|$, и тада

$$|\langle Ae^{-i\lambda}x, y\rangle + \langle Ay, e^{-i\lambda}x\rangle| = |2\,\mathrm{Re}\langle e^{-i\lambda}Ax, y\rangle| = 2|\langle Ax, y\rangle|,$$

па примењући (8) на векторе $e^{-i\lambda}x$ и y налазимо

$$2|\langle Ax, y\rangle| \leq 2C,$$

одакле је $||A|| \leq C$. □

7.15. Став. *Нека је $A \in L(H)$ компактан и самоадјунгован оператор. Тада се у (7) достиже максимум, тј. постоји $x_0 \in H$ такво да је*

$$|\langle Ax_0, x_0\rangle| = \max_{x \in H, ||x||=1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Такво x_0 је сопствени вектор оператора A. Одговарајућа сопствена вредност λ_0 задовољава једнакост $|\lambda_0| = ||A||$, односно $\lambda_0 = \pm||A||$, када се узме у обзир да су сопствене вредности самоадјунгованог оператора реалне.

С обзиром да бројеви чији је модуо већи од $||A||$ не могу бити тачке спектра, то значи да је λ_0 највећа по модулу сопствена вредност.

Доказ. Због претходног става постоји низ јединичних вектора x_n такав да $|\langle Ax_n, x_n\rangle| \to ||A||$, тј. или $\langle Ax_n, x_n\rangle \to ||A||$ или $\langle Ax_n, x_n\rangle \to -||A||$. Узмимо, на пример прву могућност. Како је низ x_n ограничен, он има слабо конвергентан подниз, рецимо $x_{n_k} \overset{w}{\to} x_0$. На основу компактности оператора A (Став ???), важи и $Ax_{n_k} \to Ax_0$ и то у норми. Међутим, тада

$$\begin{aligned} |\langle Ax_{n_k}, x_{n_k}\rangle - \langle Ax_0, x_0\rangle| \leq |\langle Ax_{n_k} - Ax_0, x_{n_k}\rangle| + |\langle Ax_0, x_{n_k} - x_0\rangle| \leq \\ \leq ||Ax_{n_k} - Ax_0|| + |\langle Ax_0, x_{n_k} - x_0\rangle| \to 0, \end{aligned}$$

односно

$$\langle Ax_0, x_0\rangle = \lim_{k \to +\infty} \langle Ax_{n_k}, x_{n_k}\rangle = ||A||.$$

Одатле је, међутим

$$||A|| = \langle Ax_0, x_0\rangle \leq ||Ax_0||\,||x_0|| \leq ||A||, \tag{9}$$

односно у Коши-Шварцовој неједнакости постиже се једнакост. То значи да су вектори Ax_0 и x_0 колинеарни, тј. $Ax_0 = \lambda_0 x_0$. Но, сада на основу (9) имамо и

$$||A|| = \langle Ax_0, x_0\rangle = \langle \lambda_0 x_0, x_0\rangle = \lambda_0.$$

Случај $\langle Ax_n, x_n\rangle \to -||A||$ се аналогно разматра, и тада је $\lambda_0 = -||A||$. □

7.16. Став. *Нека је* $A = A^* \in L(H)$. *Ако су* $\lambda \neq \mu$ *сопствене вредности оператора* A, *онда су одговарајући сопствени вектори ортогонални.*

Доказ. Нека је $Ax = \lambda x$, $Ay = \mu y$ и $\lambda \neq \mu$. Од раније знамо да λ, $\mu \in \mathrm{R}$, тј. $\overline{\lambda} = \lambda$, $\overline{\mu} = \mu$. Тада је

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle,$$

па мора бити $\langle x, y\rangle = 0$, јер би у противном испало $\lambda = \mu$. □

Примедба: Подсетимо се и да су сопствене вредности компактног оператора коначне вишеструкости, тј. да је потпростор одговарајућих сопствених вектора $S_\lambda = \{x \in H \mid Ax = \lambda x\}$ коначне димензије. Заиста, рестрикција $A|_{S_\lambda} = \lambda I$ је компактан, па је отуда јединична лопта у S_λ релативно компкатан скуп, па S_λ мора бити коначне димензије.

7.17. Спектрална теорема (за компактне самоадјунговане операторе). *Нека је* $A = A^* \in L(H)$ *компактан оператор, и нека је* λ_n *низ сопствених вредности оператора* A *уређен опадајуће по модулу, тј.*

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| \geq \ldots$$

При томе рачунамо и вишеструкост, тј. допуштамо могућност $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ *ако је сопствени потпростор димензије строго веће од један. Нека је* e_n *одговарајући низ сопствених вектора, тј.* $Ae_n = \lambda_n e_n$.

Тада је e_n *потпун ортонормиран систем у слици* $\operatorname{ran} A$ *и важи:*

$$Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n. \tag{10}$$

Доказ. Претпоставке Теореме су конзистентне. Заиста, сопствене вредности λ_n образују нула низ према Последици 7.12. Према истој Последици свака сопствена вредност је конацне вишеструкости, што омогућава да се низови λ_n и e_n могу одабрати као што је наведено у исказу.

На пример ако је λ вишеструка сопствена вредност онда је њен сопствени потпростор конацне димензије, рецимо k и садржи тачно k линеарно незвисних вектора. Ти линеарно независни вектори се могу ортонормирати Грам-Шмитовим поступком. Тако сопственој вредности λ вишеструкости k одговара k ортонормираних сопствених вектора. Такву сопствену вредност поновимо k-пута у низу λ_n (што неће променити особину $\lambda_n \to 0$, и сваком појављивању доделимо различит сопствени вектор. Најзад према Ставу 7.16 сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима су међусобно ортогонални.

Прелазимо на доказ тврдње. Према Ставу 7.15, постоји највећа по модулу сопствена вредност, означимо је са λ_1, тј. $|\lambda_1| = ||A||$, и $Ae_1 = \lambda_1 e_1$. Означимо $H_1 = \{e_1\}^\perp$. Тада је $H_1^\perp = \mathscr{L}in\{e_1\}$.

Тврдимо да су потпростори H_1 и $H_1^\perp$ инваријантни за A. За $H_1^\perp$ је то очигледно, јер ако $x \in H_1^\perp$ онда $x = \alpha e_1$ за неко $\alpha \in \mathrm{C}$, те је $Ax = A(\alpha e_1) = \alpha\lambda_1 e_1 \in H_1^\perp$. Ако, пак, $x \in H_1$, онда $x \perp e_1$, па је

$$\langle Ax, e_1\rangle = \langle x, Ae_1\rangle = \lambda_1\langle x, e_1\rangle = 0,$$

одакле и $Ax \in H_1$. Тако за произвољно $x \in H$, на основу теореме о ортопројекцији постоје јединствени $x_1 \in H_1$ и $\alpha \in \mathrm{C}$ за које је $x = \alpha e_1 + x_1$, и тада је $\langle x, e_1 \rangle = \alpha$, и отуда

$$Ax = \lambda_1 \alpha e_1 + Ax_1 = \lambda_1 \langle x, e_1 \rangle e_1 + Ax_1, \tag{11}$$

при чему $Ax_1 \in H_1$.

Посматрајмо оператор $A_1 = A|_{H_1}$ добијен рестрикцијом оператора A на H_1. И A_1 је компактан самоадјунгован оператор, па претходно разматрање можемо применити на њега. Тако налазимо сопствену вредност λ_2 за коју важи $|\lambda_2| = ||A_1|| = ||A|_{H_1}|| \le ||A||$, док за одговарајући јединични сопствени вектор $e_2 \in H_1 \le H$ имамо $Ae_2 = A_1 e_2 = \lambda_2 e_2$, и $e_2 \perp e_1$. Такође, произвољно $x_1 \in H_1$ се може представити као $x_1 = \alpha_1 e_2 + x_2$, где $x_2 \in H_2 = \{x_1 \in H_1 \mid x_1 \perp e_2\} = \{e_1, e_2\}^\perp$, и важи

$$Ax_1 = A_1 x_1 = \lambda_2 \langle x_1, e_2 \rangle e_2 + A_1 x_2.$$

Комбинујући то са (11) налазимо

$$Ax = \lambda_1 \langle x, e_1 \rangle + \lambda_2 \langle x, e_2 \rangle e_2 + Ax_2, \qquad x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + x_2, \quad x_2 \in H_2,$$

јер је $x_1 = x - \alpha e_1$ и $e_1 \perp e_2$, и отуда $\langle x_1, e_2 \rangle = \langle x, e_2 \rangle - \alpha \langle e_1, e_2 \rangle = \langle x, e_2 \rangle$.

Поступак настављамо индуктивно, па добијамо низ сопствених вредности λ_n, низ сопствених вектора e_n и низ потпростора H_n за које важи

$$H_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}^\perp,$$

$$Ae_n = \lambda_n e_n, \qquad |\lambda_n| = ||A_n|| = ||A|_{H_n}||, \tag{12}$$

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k + Ax_n, \qquad x_n \in H_n. \tag{13}$$

$$||x||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 + ||x_n||^2, \qquad ||Ax||^2 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 |\langle x, e_k \rangle|^2 + ||Ax_n||^2.$$

Како већ знамо да $\lambda_n \to 0$, то из (12) налазимо и $||A|_{H_n}|| \to 0$, а одатле и $||Ax_n|| \le ||A|_{H_n}|| \, ||x_n|| \le ||A|_{H_n}|| \, ||x|| \to 0$, па на основу (13) имамо

$$Ax = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k,$$

што је еквивалентно са (10).

Остаје још да се докаже да је систем e_j потпун у слици оператора A. Како знамо да је $\overline{\mathrm{ran}\, A} = \ker A^\perp$, довољно је доказати да из $x \perp e_n$ за све n следи $x \in \ker A$. Међутим, ако је $x \perp e_n$ за све n, онда из (10) налазимо $Ax = 0$. □

7.18. Последица. *Ако је A компактан самоадјунгован оператор на Хилбертовом простору H онда постоји ортонормиран систем његових сопствених вектора e_n који је потпун у $\overline{\mathrm{ran}\, A} = \ker A^\perp$. Односно свако $x \in H$ може бити представљено као*

$$x = y + \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle e_n, \qquad y \in \ker A. \tag{14}$$

Доказ. Заиста, на основу Беселове неједнакости, ред у (14) конвергира. С друге стране, због (10) имамо

$$A\left(x-\sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle e_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\langle x,e_n\rangle e_n-\sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle Ae_n=$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\langle x,e_n\rangle e_n-\sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle\lambda_n e_n=0.$$

Тако је $y=x-\sum_{n=1}^{+\infty}\langle x,e_n\rangle e_n\in\ker A$. Стога резултат важи на основу релације $\ker A\oplus\overline{\operatorname{ran}A}=H$ која важи за самоадјунговане операторе. □

Интегрални оператори

7.19. Интегрални оператори на простору $C[a,b]$. *Нека је* $K:[a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ *непрекидна функција. Тада је пресликавање* $T:C[a,b]\to C[a,b]$ *дато са*

$$Tx(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s \tag{15}$$

компактан линеаран оператор.

Доказ. Докажимо прво да је T коректно дефинисан, тј. да је функција Tx заиста непрекидна. Функција K је непрекидна на компактном скупу $[a,b]\times[a,b]$ па је ту и ограничена, тј. постоји константа $M>0$ таква да је $|K(s,t)|\le M$ за све s, $t\in[a,b]$, па је и $|K(t,s)x(s)|\le M\|x\|_{C[a,b]}$. Константна функција је интеграбилна на коначном интервалу, па је према ТДК

$$\lim_{t\to t_0}Tx(t)=\lim_{t\to t_0}\int_a^b K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s=\int_a^b\lim_{t\to t_0}K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s=Tx(t_0).$$

Даље, имамо

$$|Tx(t)|\le\int_a^b|K(t,s)||x(s)|\,\mathrm{d}s\le\int_a^b M\|x\|\,\mathrm{d}s=M(b-a)\|x\|,$$

тј.

$$\|Tx\|\le M(b-a)\|x\|.$$

Тако је за $\|x\|\le 1$, испуњено $\|Tx\|\le M(b-a)$, односно слика јединичне лопте $T(B_C)$ је униформно ограничен скуп, па је испуњен први услов Арцела-Асколијеве теореме.

Даље, функција K је, према Канторовој теореми и равномерно непрекидна, односно за $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$ тако да $d((t_1,s_1),(t_2,s_2))<\delta$ повлачи $|K(t_1,s_1)-K(t_2,s_2)|<\varepsilon/(b-a)$. Ако је $|t_1-t_2|<\delta$, тим пре је $d((t_1,s),(t_2,s))<\delta$ за произвољно $s\in[a,b]$ па имамо

$$|Tx(t_1)-Tx(t_2)|\le\int_a^b|K(t_1,s)-K(t_2,s)||x(s)|\,\mathrm{d}s\le\|x\|(b-a)\varepsilon/(b-a)\le\varepsilon,$$

за $\|x\|\le 1$, па је слика $T(B_C)$ уједно и равностепено непрекидна. Стога је према Арцела-Асколијевој теореми, та слика релативно компактан скуп. □

7.20. Интегрални оператори на простору $L^2(a,b)$. *Ако је функција* $K : [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{C}$ *квадрашно иншеірабилна, шј. ако је мерљива и*

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t < +\infty \tag{16}$$

шада је формулом (15) задаш комиакшан оиерашор $T : L^2(a,b)\to L^2(a,b)$.

Доказ. Послужићемо се Ставом 7.4 (б) којим су окарактерисани компактни оператори на Хилбертовом простору као они који преводе слабо конвергентне низове у јако конвергентне.

Нека је x_n низ функција из $L^2(a,b)$ који слабо конвергира ка функцији x. То значи да за свако $y\in L^2(a,b)$ важи $\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$, односно

$$\int_a^b x_n(s)\overline{y(s)}\,\mathrm{d}s\to\int_a^b x(s)\overline{y(s)}\,\mathrm{d}s.$$

Посебно, то важи и за функцију $y_t(s)=\overline{K(t,s)}$, где је $t\in[a,b]$ фиксирано, односно

$$\int_a^b x_n(s)K(t,s)\,\mathrm{d}s\to\int_a^b x(s)K(t,s)\,\mathrm{d}s.$$

Тиме смо добили да $Tx_n(t)\to Tx(t)$ за фиксирано t, односно $Tx_n\to Tx$ тачка по тачка. Низ x_n, као слабо конвергентан, мора бити ограничен, односно $\|x_n\|\le M$ за неку константу M, и отуда $\|x_n-x\|\le 2M$. Због тога, и на основу Хелдерове неједнакости, имамо

$$|Tx_n(t)-Tx(t)|^2\le\int_a^b|K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s\int_a^b|x_n(s)-x(s)|^2\,\mathrm{d}s\le 4M^2\int_a^b|K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s.$$

Међутим, функција коју смо добили $t\mapsto 4M^2\int_a^b|K(t,s)|^2\,\mathrm{d}s$ је интеграбилна због (16), па према теореми о доминантној конвергенцији имамо

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b|Tx_n(t)-Tx(t)|^2\,\mathrm{d}t=\int_a^b\lim_{n\to+\infty}|Tx_n(t)-Tx(t)|^2\,\mathrm{d}t=0.$$

Дакле, Tx_n у норми конверира ка Tx, па је T компактан. □

7.21. Став. Нека је интегрални оператор $T : L^2(a,b)\to L^2(a,b)$ дат са (15). Тада је адјунгован оператор T^* дат са

$$T^*x(t)=\int_a^b\overline{K(s,t)}x(s)\,\mathrm{d}s. \tag{17}$$

Посебно, T је самоадјунгован ако и само ако једнакост

$$\overline{K(s,t)}=K(t,s) \tag{18}$$

важи скоро свуда у односу на дводимензиону Лебегову меру.

Доказ. Имамо

$$\begin{aligned}\langle T^*x,y\rangle =&\langle x,Ty\rangle = \int_a^b x(t)\overline{Ty(t)}\,\mathrm{d}t = \int_a^b\int_a^b x(t)\overline{K(t,s)y(s)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\\ =&\int_a^b\left(\int_a^b \overline{K(t,s)}x(t)\,\mathrm{d}t\right)\overline{y(s)}\,\mathrm{d}s=\\ =&\left\langle s\mapsto\int_a^b \overline{K(t,s)}x(t)\,\mathrm{d}t, y(s)\right\rangle,\end{aligned}$$

за све $y\in L^2(a,b)$. Отуда се функције $T^*x(s)$ и $s\mapsto\int_a^b\overline{K(t,s)}x(t)\,\mathrm{d}t$ поклапају као елементи простора $L^2(a,b)$, односно једнаке су скоро свуда. Отуда важи (17).

Ако важи (18) онда је несумњиво $T=T^*$. Ако је T самоадјунгован онда једнакост

$$\int_a^b\overline{K(s,t)}x(s)\,\mathrm{d}s=\int_a^b K(t,s)x(s)\,\mathrm{d}s$$

важи за скоро свако t и за сваку функцију $x\in L^2(a,b)$. Ставимо $x=\chi_E$ за неки мерљив E, а затим интегралимо последњу једнакост по $t\in F$, где је F неки други мерљив скуп. Добијамо:

$$\iint_{E\times F}\overline{K(s,t)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\iint_{E\times F}K(t,s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Како скупови облика $E\times F$ генеришу Борелову σ-алгебру у $(a,b)\times(a,b)$ то закључујемо да су интеграли функција $\overline{K(s,t)}$ и $K(t,s)$ једнаки по сваком мерљивом подксупу скупа $(a,b)\times(a,b)$. Отуда, на основу Теореме о анихилацији интеграла, једнакост (18) важи скоро свуда. □

7.22. Лема. *Нека је (a,b) интервал у* R*, и нека је $L^2((a,b)\times(a,b))$ Хилбертов простор квадратно интеграбилних функција у односу на дводимензиону Лебегову меру. Скуп функција облика $h(x,y)=f(x)g(y)$, где f, $g\in L^2(a,b)$ је фундаменталан у простору $L^2((a,b)\times(a,b))$.*

Доказ. За почетак, функције облика $h(x,y)=f(x)g(y)$ припадају простору $L^2((a,b)\times(a,b))$. Наиме

$$\int_a^b\int_a^b|h(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b|f(x)|^2\,\mathrm{d}x\int_a^b|g(y)|^2\,\mathrm{d}y<+\infty.$$

Одредићемо ортогонални комплемент скупа $A=\{f(x)g(y)\mid f,g\in L^2(a,b)\}$. Нека је $F\in L^2((a,b)\times(a,b))$ произвољна функција, и нека је $F\perp A$. Тада је између осталог $F\perp\chi_{[\alpha,\beta)\times[\gamma,\delta)}$, односно

$$0=\int_a^b\int_a^b F(x,y)\chi_{[\alpha,\beta)}(x)\chi_{[\gamma,\delta)}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{[\alpha,\beta)\times[\gamma,\delta)}F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Како скупови облика $[\alpha,\beta)\times[\gamma,\delta)$ чине полуалгебру која генерише све Борелове скупове, и како се Лебег мерљиви скупови разликују од Борелових за скуп мере нула, то важи и $\iint_E F\,\mathrm{d}m=0$ за сваки мерљив скуп E. Отуда је $F=0$ скоро свуда, тј. F је нула вектор. □

7.23. Став (репрезентација интегралног језгра). *Нека је* $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathrm{R}$ *квадратно интеграбилна функција, која задовољав услов* $K(t,s) = \overline{K(s,t)}$. *Знамо (на основу Става 7.21) да је интегрални оператор дат са (15) самоадјунгован.*

Ако су λ_n *његове сопствене вредности, а* φ_n *одговарајући јединични сопствени вектори, тада је*

$$K(t,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(t)\overline{\varphi_n(s)}, \tag{19}$$

при чему ред конвергира у L^2 *норми.*

Доказ. Функције $\Phi_n(t,s) = \overline{\varphi_n(t)}\varphi_n(s)$ су ортогоналне у $L^2((a,b)\times(a,b))$, што се једноставно проверава. Стога ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle K, \Phi_n\rangle \Phi_n$$

конвергира у норми некој функцији $P \in L^2((a,b)\times(a,b))$. С обзиром да је

$$\langle K, \Phi_n\rangle = \int_a^b \int_a^b K(t,s)\overline{\varphi_n(t)}\varphi_n(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_a^b T\varphi_n(t)\overline{\varphi_n(t)}\,\mathrm{d}t = \langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle = \lambda_n$$

имамо

$$P(t,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \overline{\varphi_n(t)}\varphi_n(s).$$

Користећи Последицу 7.18, за било коју функцију $g \in L^2(a,b)$ имамо $g = h + \sum_{n=1}^{+\infty}\langle g, \varphi_n\rangle \varphi_n$, и одатле

$$\int_a^b P(t,s)\overline{g(s)}\,\mathrm{d}s = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \overline{\varphi_n(t)}\varphi_n(s)\overline{\left(h(s) + \sum_{n=1}^{+\infty}\langle g, \varphi_n\rangle \varphi_n(s)\right)}\mathrm{d}s =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \varphi_n(t)\langle g, \varphi_n\rangle = Ag = \int_a^b K(t,s)\overline{g(s)}\,\mathrm{d}s$$

Отуда је $K(t,s) = P(t,s)$ скоро свуда. □

Ред у (19) конвергира у норми простора L^2 али не мора да конвергира равномерно, чак ни када је језгро непрекидно. Међутим, уз још једну претпоставку, може се добити равномерна конвергенција.

7.24. Теорема (Мерсер). *Ако је* $K : (a,b)\times(a,b) \to \mathrm{C}$ *непрекидна функција и ако оператор* T *дат са (15) испуњава услов*

$$\langle Tf, f\rangle \geq 0, \qquad \text{за све } f \in L^2(a,b) \tag{20}$$

онда су све сопствене функције φ_j *непрекидне, и ред (19) равномерно конвергира.*

Додатно, ако је језгро реално, тј. $K(t,s) \in \mathrm{R}$ *за све* t, $s \in (a,b)$ *онда се сопствене функције могу одабрати тако да буду реално вредносне.*

Доказ. Услов (20) повлачи да је T самоадјунгован. Заиста, тада је $\langle Tf,f\rangle\in \mathrm{R}$, и отуда $\langle Tf,f\rangle=\langle f,Tf\rangle=\langle T^*f,f\rangle$, па је кавдратна форма $\langle (T-T^*)f,f\rangle\equiv$. Користећи поларизациони идентитет налазимо и да је $\langle (T-T^*)f,g\rangle\equiv 0$, одакле је $T-T^*=0$. Тако важе услови Става 7.23 па важи и развој (19).

Из истог услова лако закључујемо да је $\lambda_n=\langle T\varphi_n,\varphi_n\rangle\geq 0$.

Сада доказујемо да за свако $t\in[a,b]$ важи $K(t,t)\geq 0$. Ако је $K(x_0,x_0)\in \mathrm{C}\setminus[0,+\infty)$ онда постоји околина тачке (x_0,x_0) облика $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ тако да за све (x,y) из те околине, вредност $K(x,y)$ припада околини V тачке $K(x_0,x_0)$ која је конвексна и не сече позитиван део реалне осе. Тада бирајући за $f=\chi_{(x_0-\delta,x_0+\delta)}$ налазимо да је

$$\langle Tf,f\rangle=\iint_{(x_0-\delta,x_0+\delta)\times(x_0-\delta,x_0+\delta)} K(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

што мора остати у V и не може бити позитивно.

Сада желимо да докажемо да су фукције φ_n непрекидне. За сада знамо да $\varphi_n\in L^2(a,b)$, али на коначном интервалу је $L^2\subseteq L^1$, па знамо и да су интеграбилне. Међутим, тада је $|K(t,s)\varphi_n(s)|\leq M|\varphi_n(s)|$, где је M ограничење непрекидне функције $|K|$. Стога функција $M|\varphi_n|$ може послужити као интеграбилна доминанта, па на једнакост

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{\lambda_n}(T\varphi_n)(t)=\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b K(t,s)\varphi_n(s)\,\mathrm{d}s$$

можемо деловати лимесом кад $t\to t_0$, одакле следи непрекидност функције φ_n, када се узме у обзир непрекидност јегра $K(t,s)$.

Посебно, тада је непрекидна и функција $K_n(t,s)=K(t,s)-\sum_{k=1}^n\lambda_k\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(s)}$. Међутим, језгру K_n одговара оператор

$$T-\sum_{k=1}^n\lambda_k\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\lambda_k\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$$

који је такође позитиван, па важи и $K_n(t,t)\geq 0$, односно

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\lambda_k|\varphi_k(t)|^2\leq K(t,t). \tag{21}$$

Ако означимо $M=\max_{a\leq t\leq b}K(t,t)$ добијамо, помоћу Коши-Шварцове неједнакости

$$\left|\sum_{k=m}^n\lambda_k\varphi_k(t)\overline{\varphi_k(s)}\right|^2\leq\left(\sum_{k=m}^n\lambda_k|\varphi_k(t)|^2\right)\left(\sum_{k=m}^n\lambda_k|\varphi_k(s)|^2\right)\leq M\sum_{k=m}^n\lambda_k|\varphi_k(t)|^2,$$

што тежи ка нули, јер је због (21) реч о остатку конвергентног реда. Штавише, конвергенција је равномерна, јер је ред у (21) монотон, а гранична функција непрекидна, па се може применити Динијев критеријум за равномерну конвергенцију.

Најзад, ако је $K(t,s)\in\mathrm{R}$, и $T\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$, онда комплексним конјуговањем релације $T\varphi_n=\lambda_n\varphi_n$, тј.

$$\int_a^b K(t,s)\varphi_n(s)\,\mathrm{d}s=\lambda_n\varphi_n(t)$$

налазимо да је и $T\overline{\varphi_n} = \lambda_n \overline{\varphi_n}$. Ако су φ_n и $\overline{\varphi_n}$ линеарно зависне, онда φ_n можемо заменити са $\operatorname{Re}\varphi_n = (\varphi_n + \overline{\varphi_n})/2$. Ако су независне, онда ће линеарно независне бити и $\operatorname{Re}\varphi_n$ и $\operatorname{Im}\varphi_n$, па се пар сопствених функција φ_n, $\overline{\varphi_n}$ може заменити паром $\operatorname{Re}\varphi_n$ и $\operatorname{Im}\varphi_n$. □

Примене у теорији диференцијалних једначина

7.25. Фредхолмове једначине. *Фредхолмова интегрална једначина прве врсте* је једначина облика

$$\int_a^b K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s = g(t), \tag{22}$$

а *Фредхолмова интегрална једначина друге врсте* је једначина облика

$$g(t) + \lambda\int_a^b K(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s = f(t). \tag{23}$$

У оба случаја, задатак је наћи функцију f за дату непрекидну функцију g и дато непрекидно језгро K.

Примећујемо да се помоћу интергалног оператора T задатог са (15) једначине (22) и (23) могу записати као

$$Tf = g, \qquad \text{односно} \qquad g + \lambda Tf = f.$$

Одатле одмах уочавамо нека њихова својства.

Једначина прве врсте (22), формално има решење $f = T^{-1}g$. Међутим, знамо да је T компактан оператор, те стога T^{-1} не постоји. И не само то, T никада не може бити сурјективно. Наиме, тада би због теореме о отвореном пресликавању морало бити $T(B_X) \supseteq rB_Y$ за неко $r > 0$ што би значило да слика јединичне лопте није релативно компактан скуп.

Стога закључујемо:

Фредхолмова једначина прве врсте нема решења за поједине изборе функције g.

Једначина друге врсте, формално има решење $f = (I - \lambda T)^{-1}g$, што се може записати и као

$$f = \frac{1}{\lambda}((1/\lambda)I - T)^{-1}g = \frac{1}{\lambda}R_T(1/\lambda)g,$$

где је R_T ознака за резолвенту оператора T. Како знамо да је T компактан оператор, то закључујемо да важи *Фредхолмова алтернатива*:

> *Или хомогена једначина (23) (што значи да је $g \equiv 0$) има нетривијално решење, или нехомогена једначина има јединствено решење за свако g.*

Наиме, ако је $1/\lambda$ сопствена вредност оператора T, онда оператор $I - \lambda T$ има нетривијално језгро, у ком случају хомогена једначина (23) има нетривијално решење, и поврх тога оператор $I - \lambda T$ није „на“ па одговарајућа нехомогена једначина нема решења за поједине функције g.

С друге стране, ако $1/\lambda$ није сопствена вредност оператора T, онда је оператор $I - \lambda T$ инвертибилан, и тада хомогена једначина има само тривијално решење, а одговарајућа нехомогена једначина има јединствено решење за сваку функцију g.

Знамо и да T има највише пребројиво много сопствених вредности које образују нула низ. Отуда оних бројева λ за које се једначина (23) понаша „рђаво“ (хомогена има нетривијално, а нехомогена нема увек решење) има највише пребројиво много, и теже ка бесконачности, тј. немају нити једну коначну тачку нагомилавања.

7.26. Штурм-Лјувилов проблем и Гринова функција. Познато је да линеарна диференцијална једначина облика $ay''+by'+cy=f$ са такозваним почетним условима $y(x_0)=y_0$ и $y'(x_0)=y_1$ има јединствено решење у околини тачке x_0. (Претпостављамо да су коефицијенти a, b, c непрекидне фукције у околини тачке x_0.) Такав проблем назива се *Кошијев проблем*.

Међутим, у многим ситуацијама, занимљив је и проблем са граничним условима. Наиме, решавамо једначину

$$L[y]\equiv-(py')'+qy=f, \tag{24}$$

са тзв. граничним условима

$$\begin{aligned}\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=0\\ \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=0.\end{aligned} \tag{25}$$

Такав проблем назива се *Штурм-Лјувилов проблем*.

За разлику од Кошијевог проблема, Штурм-Лјувилов проблем може уопште да нема решења, или да их има више. На пример, ако се посматра једноставан проблем

$$-y''+y=f, \qquad y(0)=y(\pi)=0,$$

он за $f\equiv 0$ има више решења, то су све функције облика $y(x)=A\sin x$, где је A произвољна константа. С друге стране, ако је $f(x)=x$, онда проблем нема решења. Заиста, тада је опште решење диференцијалне једначине облика $y=x+A\cos x+B\sin x$ за неке константе A, B, док граничн услови, редом, постају $A=0$ и $\pi-A=0$ што је немогуће.

Примедба: Под одређеним уловима, свака се линеарна диференцијална једначина другог реда, може записати у облику (24). Рецимо, довољно је једначину $ay''+by'+cy=f$ помножити функцијом g која задовољава релацију $g'a=ga'-gb$.

Показује се, у теорији диференцијалних једначина да се решење Штурм-Лјувиловог проблема (24), (25), под условом да је језгро диференцијалног оператора L тривијално, може изразити као

$$y(t)=\int_a^b G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s, \tag{26}$$

где је $G:[a,b]\times[a,b]\to\mathrm{R}$ тзв. *Гринова функција*, дата са

$$G(t,s)=\begin{cases}-\frac{1}{pW}u_2(t)u_1(s), & a\le s\le t\le b\\ -\frac{1}{pW}u_2(s)u_1(t), & a\le t\le s\le b\end{cases}, \tag{27}$$

при чему су u_1, односно u_2 функције које задовољавају хомогену једначину $L[y]=0$, и по један гранични услов, тј.

$$L[u_1]=L[u_2]=0, \qquad \alpha_1 u_1(a)+\alpha_2 u_1'(a)=0, \quad \beta_1 u_2(b)+\beta_2 u_2'(b)=0,$$

док је W њихов *Вронскијан*, односно

$$W(t)=\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}.$$

При томе, показује се да је функција $p(t)W(t)$ константна функција, те стога у формули (27) није наведен агумент производа функција pW.

7.27. Извођење Гринове функције. *Нека је језгро диференцијалног оператора L тривијално. Тада се решење Штурм-Лјувиловог проблема (24), (25) може изразити формулом (26) где је Гринова функција G дата са (27).*

Доказ. Најпре изводимо формулу

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)W(t))=0.$$

Имамо

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p(t)W(t))&=p'(t)W(t)+p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}=\\ &=p'(t)\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}+p(t)\left(\begin{vmatrix} u_1'(t) & u_2'(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1''(t) & u_2''(t) \end{vmatrix}\right)=\\ &=\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ p'(t)u_1'(t)+p(t)u_1''(t) & p'(t)u_2'(t)+p(t)u_2''(t) \end{vmatrix}=\\ &=\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ (p(t)u_1'(t))' & (p(t)u_2'(t))' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ qu_1(t) & qu_2(t) \end{vmatrix}=0.\end{aligned}$$

Одатле следи да је производ $p(t)W(t)$ константан.

Даље, нека су y_1 и y_2 линеарно независна решења хомогене једначине $L[y]=0$. Опште решење је онда дато са $y=C_1y_1+C_2y_2$. Било који од два гранична услова (25) довешће до линеарне везе између C_1 и C_2. Нека је, дакле u_1 решење хомогене једначине $L[y]=0$ које задовољава први гранични услов, а u_2 које задовољава други гранични услов. Важно је да тада u_1, односно u_2 не испуњвају оба, већ само један гранични услов. У супротном оператор L имао би нулу за сопствену вредност на скупу два пута диференцијабилних функција које задовољавају граничне услове (25).

До одговарајућег решења нехомогене једначине (24) можемо доћи методом варијације константи. Укратко, ставимо

$$y=C_1u_1+C_2u_2, \tag{28}$$

а затим и

$$C_1'u_1+C_2'u_2=0, \qquad L[C_1u_1+C_2u_2]=f.$$

После краћег рачуна налазимо да је последњи услов еквивалентан са $C_1'pu_1+C_2'pu_2=-f$. Тако налазимо да пар C_1', C_2' јесте решење система две линеарне (алгебарске) једначине. Детерминанта тог система је pW, па употрбом Крамерових правила налазимо да је

$$C_1'=fu_2/pW, \qquad C_2'=-fu_1/pW,$$

односно, после интеграције и замене у (28)

$$y=\left(C+\frac{1}{pW}\int_a^x f(t)u_2(t)\,\mathrm{d}t\right)u_1(x)+\left(D-\frac{1}{pW}\int_a^x f(t)u_1(t)\,\mathrm{d}t\right)u_2(x). \quad (29)$$

Када уврстимо граничне услове (25) добијамо да су константе C и D једнаке

$$C=-\frac{1}{pW}\int_a^b f(t)u_2(t)\,\mathrm{d}t, \qquad D=0$$

одакле (29) постаје

$$y=-\frac{1}{pW}\int_x^b f(t)u_2(t)\,\mathrm{d}t\,u_1(x)-\frac{1}{pW}\int_a^x f(t)u_1(t)\,\mathrm{d}t\,u_2(x),$$

што је еквивалентно са (26) и (27). ☐

7.28. Својства Гринове функције. *Гринова функција задата са (27) има следећа својства*

- (i) *G је релано вредносна и важи $G(s,t)=G(t,s)$;*
- (ii) *$G(t,s)$ је непрекидна;*
- (iii) *G је диференцијабилан, осим на дијагонали, тј. за $t=s$;*
- (iv) *На дијагонали важи $\left.\frac{\partial^+}{\partial t}G(t,s)\right|_{t=s}-\left.\frac{\partial^-}{\partial t}G(t,s)\right|_{t=s}=\frac{1}{p(s)}$.*

Доказ. Непосредна провера. ☐

7.29. Став (својства интегралног оператора задатог Гриновом функцијом). *Интегрални оператор $T_G : L^2[a,b]\to L^2[a,b]$ задат са*

$$T_G f=\int_a^b G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

има следећа својства

- (i) *T_G је компактан и самоадјунгован.*
- (ii) *T_G и L су међусобно инверзни.*
- (iii) *T_G има највише пребројиво много сопствених вредности, све су реалне, а одговарајуће сопствене функције чине ортонормиран систем, потпун у слици оператора T_G.*
- (iv) *Важи и Фредхолмова алтернатива – Или једначина $T_G f=\lambda f$ има нетривијално решење или једначина $T_G f-\lambda f=g$ има јединствено решење за сваку функцију $g\in L^2$. (Овде је или искључно, у говору познато као „или-или“.)*

Доказ. Својство (i) следи из претходног става. Својтво (ii) на основу изводјења Гринове функције. Својства (iii) и (iv) следе на основу првог својства и одговарајућих ставова о компактним операторима. ☐

7.30. Последица. *Како је једначина* $T_G f - \lambda f = g$ *еквивалентна са* $f = L[\lambda f + g]$, *тј. са* $\mu f - L[f] = g_1$, *где је* $\mu = 1/\lambda$ *и* $g_1 = (1/\lambda)L[g]$ *непосредно закључујемо:*

(i) *Диференцијални оператор* L *задат са (24) који делује на густом потпростору простора* L^2 *свих два пута непрекидно диференцијалних функција које задовољавају граничне услове (25) има највише пребројиво много сопствених вредности и оне образују низ који тежи ка бесконачности.*

(ii) *За једначину* $L[y] - \lambda y = g$ *важи Фредхолмова алтернатива – или она има нетривијално решење за* $g \equiv 0$ *или има јединствено решење за свако* g.

Следи један пример из математичке физике.

7.31. Шредингерова једначина. Шредингерова једначина описује промену квантног стања датог квантног система у времену. У зависности од система она може имати различите облике. Један од једноставнијих облика је Шредингерова једначина која описује стање електрона у у енергетском извору са бесконачним потенцијалним баријерама. Ако се електрон може кретати само дуж x-осе (једнодимензионални случај), онда одговарајућа Шредингерова једначина гласи

$$-\frac{\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\Psi = E\Psi, \tag{30}$$

где је $\hbar$ Планкова константа подељена са 2π, m маса електрона, $V(x)$ потенцијал поља, Ψ квантно стање које означава вероватноћу да се електрон налази на позицији x, а E укупна енергија електрона. При томе, овде је узет једноставнији, временски независан случај.

Поред једначине, функција стања Ψ задовољава и граничне услове

$$\Psi(0) = \Psi(a) = 0,$$

ако се баријере налазе на x-координатама 0 и a. Очигледно је једначина (30) специјалан случај једначине (24), и то за $p(x) \equiv \hbar/2m$, $q(x) = V(x) - E$. Присуство граничних услова означава да се ради о Штурм Лјувиловом проблему. Ипак, посматраћемо случај $q(x) = V(x)$, док ће енергија E представљати сопствене вредности.

На основу до сада изложедне теорије можемо закључити следеће:

Није могуће да електрон има било коју укупну енергију. Скуп могућих енергија електрона је највише пребројив, састоји се од изолованих тачака које теже ка бесконачности.

Свака сопствена вредност мора бити коначне вишеструкости, па за дату могућу енергију постоји коначан скуп стања у којима се може наћи електрон.

Овај пример стоји у пореклу речи спектар. Наиме, спектар Шредингеровог оператора, тј. његове сопствене вредности јесу могуће енергецке вредности. Практично одређивање енергецких вредности сводило се на одређивање таласне дужине фотона који емитује електрон при прелазу из једног стања у друго, а таласна дужина се одређивала бојом светлости. Тако је реч спектар која означава скуп могућих боја почела да се користи за скуп сопствених вредности компактног оператора.

Није тачно да Шредингерова једначина увек има дискретан спектар. За то је неопходно да се појаве гранични услови, и они се могу појавити и када нема ниаквих енергетских баријера. На пример, када се разматра понашање електрона у атому, морају се узети у обзир све три димензије. Међутим, тачку у простору је најлакше представити сферним координатама (ρ,φ,θ), и тада се природно појављује гранични услов $\Psi(\rho,\theta,0)=\Psi(\rho,\theta,2\pi)$. Разматрање овог случаја не подлеже теорији коју смо извели из више разлога. Прво, одговарајућа Шредингерова једначина није више обична диференцијална једначина, већ парцијална. Друго, гранични услов је мешовит.

Разматрање понашања електрона у атому је скопчано са дуготрајним и заморним рачунајем и превише би оптеретило текст, али се може наслутити да ће се добити слични резултати онима које смо добили за Штурм Лјувилов проблем.

Тако смо, после вишегодишњег школовања сазнали и математичке разлоге зашто електрон у атому не може да се нађе било где, већ искључиво на квантованим енергетким нивоима.

Овде је крај курса.

Вежбања

7.1. Нека је λ_j произвољан низ комплексних бројева, и нека је $T:l^2\to l^2$ пресликавање дато са $T(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots)=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\dots)$.

а) Доказати да је T линеарно пресликавање, и да је T ограничено ако и само ако је низ λ_j ограничен. Тада је и $\|T\|=\sup_{n\ge1}|\lambda_n|$. [У ствари, ако λ_n није ограничен, онда T није коректно дефинисан, тј. постоји $x=(\xi_n)_{n\ge1}\in l^2$ такво да $Tx\notin l^2$.]

б) Доказати да је T компактан ако и само ако је $\lim\limits_{n\to+\infty}\lambda_n=0$. [Тако компкатан оператор „тежи нули“ кад број димензија „тежи ка бесконачно“.]

7.2. Нека су X и Y Банахови простори. Доказати следеће тврдње:

а) Ако је X бесконачне димензије, и $T:X\to Y$ компактан оператор, онда T нема инверзни, тј. не постоји ограничен $T^{-1}:Y\to X$.

б) Ако је $\dim\operatorname{ran}T<+\infty$ онда је T компактан.

в) Ако је $\dim(X/\ker T)<+\infty$ онда је T компактан.

7.3. Нека је $P_n:l^1\to l^1$ низ пројектора дат са $P_n(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,\xi_{n+1},\dots)=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n,0,0,\dots)$.

а) Доказати да $P_nx\to x$ за свако $x\in l^1$.

б) Доказати да не важи $P_n\rightrightarrows I$. [Искористити претходни задатак и Став 7.2 б).]

7.4. Нека су $T,S:X\to Y$ (X и Y Банахови простори) и нека постоји константа $C>0$ таква да за све $x\in X$ важи $\|Tx\|\le C\|Sx\|$. Ако је S компактан доказати и да је T компактан.

7.5. Нека је $T:X\to Y$ компактан оператор. Ако је $\dim X=+\infty$ и T инјективан, доказати да слика $\operatorname{ran}T$ не може бити затворен потпростор.

7.6. Дат је оператор $A:C[0,1]\to C[0,1]$ са $Af(s)=\int_0^1\log(1+st)f(t)\,\mathrm{d}t$ $(\log=\ln)$. Показати да је оператор A линеаран и ограничен. Користећи теорему Арцела-Асколија (или другачије) показати да је оператор A компактан.

7.7. Дато је пресликавање $A:l^1\to l^1$ са $y=Ax$, $y=(\eta_n)_{n=1}^{+\infty}$, $x=(\xi_n)_{n=1}^{+\infty}$, $\eta_n=\sum_{k=1}^{+\infty}e^{-kn}\xi_k$. Доказати да је A компактан оператор. [Искористити карактеризацију релативно компактних скупова у l^p просторима.]

7.8. Дато је пресликавање $A:l^p\to l^q$, $(1/p+1/q=1)$ $y=Ax$, $y=(\eta_n)_{n=1}^{+\infty}$, $x=(\xi_n)_{n=1}^{+\infty}$, $\eta_n=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+nk+k^2}\xi_k$. Доказати да је A компактан оператор. [Исто упутство као у претходном задатку.]

7.9. Дат је *Волтерин оператор* $V : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ са

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

а) Доказати да је V компактан оператор;

б) Доказати да V нема ниједну сопствену вредност, па извести закључак $\sigma(V) = \{0\}$;

в) Наћи адјунгован оператор V^*, и извести да је

$$(V^*V)f(x) = \int_x^1 \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t;$$

г) Одредити сопствене вредности оператора V^*V, показати да је он самоадјунгован и користећи Став 3.22 (iv) доказати да је $||V|| = 2/\pi$.

7.10. Дато је пресликавање $A : C[0,\pi] \to C[0,\pi]$ са

$$Ax(t) = \int_0^\pi \sin(s+t)x(s)\,\mathrm{d}s.$$

а) Доказати да је слика $\mathrm{ran}A$ садржана у дводимензионалном потпростору. Одредити барем једну базу тог потпростора. Извести закључак да је оператор A компактан. [Ограничени скупови у коначно димензионалним потпросторима су релативно компактни.]

б) Доказати да A мора да има бар једну сопствену вредност, а највише две. Одредити их.

в) Проверити да ли је A нормалан. Ако јесте одредити $||A||$ служећи се резултатом $||A|| = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ који важи за нормалне операторе.

7.11. Дато је пресликавање $A : L^2(-1,1) \to L^2(-1,1)$ са $Af(x) = \int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

а) Доказати да је A компактан линеаран оператор;

б) Наћи адјунгован оператор A^*, и испитати да ли је A нормалан;

в) Одредити спектар оператора A.

7.12. Дато је пресликавање $A : C[0,1] \to C[0,1]$ са $Ax(s) = x(s) + \int_0^s \sin(s+t)x(t)\,\mathrm{d}t$.

а) Доказати да је реч о ограниченом линеарном пресликавању, чија норма не превазилази 2.

б) Испитати да ли је A компактан оператор. [Други сабирак јесте компактан оператор. Одатле закључити да A не може да буде компактан.]

7.13. Дат је Хилбертов простор

$$H = L^2((0,+\infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t) = \{f : (0,+\infty) \to \mathrm{C} \,|\, f - \text{мерљива}, \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0\},$$

са скаларним производом $\langle f,g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

а) Доказати да су функције $g_0(t) = 1$, $g_1(t) = 1-t$, $g_2(t) = 1-2t+t^2/2$ и $g_3(t) = 1-3t+3t^2/2-t^3/6$ ортонормиране у H.

б) Одредити функцију $K : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to \mathrm{C}$ такву да за ортогонални пројектор P на линеарни омотач скупа $\{g_0, g_1, g_2, g_3\}$ важи $Pf(x) = \int_0^{+\infty} K(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

7.14. На Хилбертовом простору $L^2(0,+\infty)$ дато је пресликавање $Tf(x) = f(x+1)$.

а) Одредити адјунгован оператор T^*.

б) Одредити све карактеристичне вредности оператора T, његов спектар, и језгро.

в) Испитати да ли је T нормалан.

7.15. На Хилбертовом простору $L^2(0,1)$ дато је пресликавање $Tf(x) = (|3x-1| + |3x-2|)f(x)$.

а) Доказати да је T ограничен линеаран оператор и одредити му норму. Показати да је T самоадјунгован.

б) Одредити спектар оператора T, и све његове карактеристичне вредности.

в) Доказати да T није компактан.

7.16. Доказати да је пресликавање $T : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, дато са $Tx(s) = \int_0^s tx(t)\,\mathrm{d}t$, компактан линеаран оператор, показати да T нема ниједну карактеристичну вредност, и одредити $\sigma(T)$.

7.17. На Хилбертовом простору $L^2(1,+\infty)$, дат је оператор A са $Af(x)=\dfrac{1}{[x]}f(x)$.

а) Доказати да је A линеаран ограничен и самоадјунгован оператор и да је $||A||=1$.

б) Одредити сопствене вредности и сопствене векторе оператора A.

в) Доказати да A није компактан оператор.

7.18. Нека је A самоадјунгован оператор на Хилбертовом простору H. Показати да је оператор $U=(A-iI)(A+iI)^{-1}$ унитаран, тј. да је $UU^*=U^*U=I$.

7.19. Нека је H Хилбертов простор, и $A:H\to H$ ограничен линеаран оператор, и $A^*:H\to H$ оператор дефинисан са $\langle Ax,y\rangle=\langle x,A^*y\rangle$ за све $x,y\in H$.

а) Доказати да важи $H=\ker A\oplus\overline{\operatorname{ran}A^*}$;

б) Ако је $A=A^*$ доказати да је $\ker A=\ker A^2$;

в) Проверити да ли се може добити и боље $\ker A=\ker A^n$ за све $n\in\mathrm{N}$.

г) Да ли претходна два закључка важе и за све нормалне операторе?

7.20. а) Да ли је систем функција $\{1,e^{ix},e^{2ix},e^{3ix}\}$ ортонормиран у Хилбертовом простору $L^2(-\pi,\pi)$?

б) Нека је $P:L^2(-\pi,\pi)\to L^2(-\pi,\pi)$ оператор који свакој функцији додељује њену пројекцију на $\mathscr{L}\{1,e^{ix},e^{2ix},e^{3ix}\}$. Одредити функцију $K:(-\pi,\pi)^2\to\mathrm{C}$, такву да је $(Pf)(x)=\int_{-\pi}^{\pi}K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$.

в) Да ли је P компактан оператор?

7.21. Дато је пресликавање $A:L^2(0,1)\to L^2(0,1)$ са $(Af)(t)=tf(t)$.

а) Показати да је A линеаран, ограничен и самоадјунгован оператор и да је $||A||\leq 1$.

б) Показати да A нема својствених вредности, и да је $\sigma(A)=[0,1]$.

в) Да ли је A компактан? Зашто?